Kosztolányi József
Kovács István
Pintér Klára
Urbán János
Vincze István

Matematika

tankönyv

9

Tizenharmadik, átdolgozott kiadás

Mozaik Kiadó – Szeged, 2012

1. Mi mit jelent a matematika nyelvén?

Megfelelnek-e a kirakat árcédulái a reklámfeliratnak?

A hétköznapokban is gyakran szükségünk van arra, hogy adott szöveget pontosan értelmezzünk. A kötőszavak látszólag kis eltérése is teljesen más értelmű mondatot eredményezhet.

1. példa

Egy utazási iroda tájékoztatójából kihagytuk a „legalább” és a „legfeljebb” szavakat. Pótoljuk a hiányzó szavakat, és értelmezzük a mondatokat!

„A repülőgépre .... egy darab .... 15 kg tömegű csomag adható fel, kézipoggyászként egy .... 10 kg tömegű csomag vihető fel az utastérbe. A repülő indulása előtt .... egy órával be kell jelentkezni. Az utazáshoz rendelkezni kell elegendő költőpénzzel, ... napi 30 euróval.”

Megoldás

„A repülőgépre **legfeljebb** egy darab **legfeljebb** 15 kg tömegű csomag adható fel.”
Azaz a feladható csomag darabszáma (d) 1 vagy annál kevesebb: $d \le 1$, tömege (m_1) pedig 15 kg vagy annál kevesebb: $m_1 \le 15$ kg.

„Kézipoggyászként egy **legfeljebb** 10 kg tömegű csomag vihető fel az utastérbe.”
Azaz a kézipoggyász tömege (m_2) 10 kg vagy annál kevesebb lehet: $m_2 \le 10$ kg.

„A repülő indulása előtt **legalább** egy órával be kell jelentkezni.”
Azaz a bejelentkezés és a repülő indulása közötti idő (t) 1 óra vagy annál több: $t \ge 1$ h.

„Az utazáshoz rendelkezni kell elegendő költőpénzzel, **legalább** napi 30 euróval.”
Azaz a napi költőpénz (k) 30 euró vagy annál több legyen: $k \ge 30$ euró.

Ábrázoljuk családonként a fiú és lány gyerekek számát oszlopdiagramon!

2. példa

Öt család fiú és lány gyerekeinek számát táblázatba írtuk. Ennek alapján soroljuk fel, melyek azok a családok, amelyekben:

a) minden gyerek lány,
b) van fiú gyerek,
c) nem igaz, hogy minden gyerek lány,
d) nem igaz, hogy van fiú gyerek.

Család	Fiú gyerekek száma	Lány gyerekek száma
A	0	2
B	1	3
C	2	0
D	1	1
E	0	4

Megoldás

a) Minden gyerek lány = nincs fiú: az *A* és az *E* családban.
b) Van fiú gyerek: a *B*, *C* és a *D* családban.
c) Nem igaz, hogy minden gyerek lány: a *B*, *C* és a *D* családban.
d) Nem igaz, hogy van fiú gyerek: az *A* és az *E* családban.

Észrevehetjük, hogy az *a)* és *d)*, valamint a *b)* és *c)* állítások ugyanazokra a családokra érvényesek.

Valóban, a következő állítások ugyanazt jelentik:

d) és *a)* a „Van fiú gyerek.” kijelentés tagadása:

Nem igaz, hogy **van** fiú gyerek. = **Minden** gyerek **nem** fiú. =
= Minden gyerek lány.

nem igaz, hogy van olyan =
= mindre nem igaz

c) és *b)* a „Minden gyerek lány.” kijelentés tagadása:

Nem igaz, hogy **minden** gyerek lány. = **Van olyan** gyerek,
aki **nem** lány. = Van fiú gyerek.

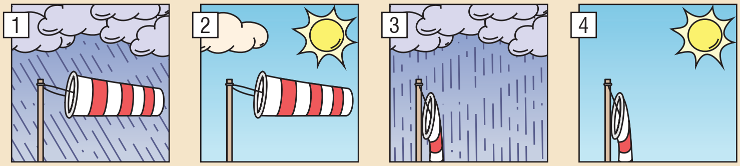
nem igaz, hogy minden =
= van olyan, aki nem

Ha egy kijelentés igaz, akkor a tagadása hamis, és ha egy kijelentés hamis, akkor a tagadása igaz.

Egy kijelentés tagadásának a tagadása pontosan akkor igaz, mint az eredeti kijelentés.

3. példa

Mely képekre igazak a kijelentések?



a) Esik az eső és fúj a szél.
b) Esik az eső vagy fúj a szél.
c) Nem esik az eső és nem fúj a szél.
d) Nem esik az eső vagy nem fúj a szél.

Megoldás (a)

Az 1. képen *Esik az eső és fúj a szél.* Igaz a kijelentés.

A 2. képen nem esik az eső, a 3. képen nem fúj a szél, a 4. képen az eső sem esik és a szél sem fúj, így a 2., 3. és 4. képre a kijelentés hamis.

Megoldás (b)

Az 1. képen az eső is esik és a szél is fúj, a 2. képen fúj a szél, a 3. képen esik az eső, így ezekre igaz, hogy *Esik az eső vagy fúj a szél.*

A 4. képen az eső sem esik és a szél sem fúj, erre a képre a kijelentés hamis.

Megoldás (c)

A *Nem esik az eső és nem fúj a szél* kijelentés a 4. képre igaz, a többire hamis.

Láthatjuk, hogy ez a kijelentés éppen az *Esik az eső vagy fúj a szél* kijelentés tagadása:

Nem igaz, hogy esik az eső **vagy** fúj a szél. =
= **Nem** esik az eső **és nem** fúj a szél.

Megoldás (d)

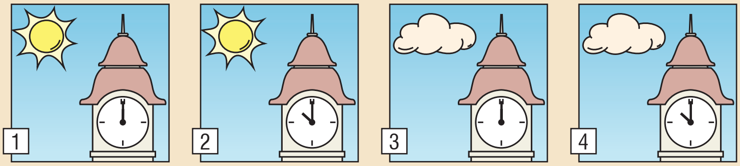
A 2. képen nem esik az eső, a 3. képen nem fúj a szél, a 4. képen az eső sem esik és a szél sem fúj, így ezekre igaz, hogy *Nem esik az eső vagy nem fúj a szél.*

Az 1. képen az eső is esik és a szél is fúj, erre a képre a kijelentés hamis. Ez a kijelentés éppen az *Esik az eső és fúj a szél* kijelentés tagadása:

Nem igaz, hogy esik az eső **és** fúj a szél =
= **Nem** esik az eső **vagy nem** fúj a szél.

4. példa

Mely képekre igazak a kijelentések?



a) Ha dél van, akkor süt a nap.
b) Ha süt a nap, akkor dél van.
c) Ha nincs dél, akkor nem süt a nap.
d) Dél van, és nem süt a nap.

Megoldás (a)

dél van ⇒ süt a nap

Az 1. képen dél van és süt a nap, a kijelentés igaz.

A 2. és a 4. képen nincs dél, akár süt a nap, akár nem, a *Ha dél van, akkor süt a nap* kijelentés igaz.

A 3. képen dél van, de nem süt a nap, a *Ha dél van, akkor süt a nap* kijelentés hamis.

Megoldás (b)

süt a nap ⇒ dél van

A *Ha süt a nap, akkor dél van* kijelentés az 1., 3. és 4. képre igaz, a 2. képre hamis.

Megoldás (c)

nincs dél ⇒ nem süt a nap

A *Ha nincs dél, akkor nem süt a nap* kijelentés az 1., 3. és 4. képre igaz, a 2. képre hamis.

Megoldás (d)

A *Dél van, és nem süt a nap* a 3. képre igaz, az 1., 2. és 4. képre hamis. Ez éppen az *a)* kijelentés tagadása.

◆ ◆ ◆

A ***Ha dél van, akkor süt a nap*** állítás
megfordítása
a ***Ha süt a nap, akkor dél van*** állítás.

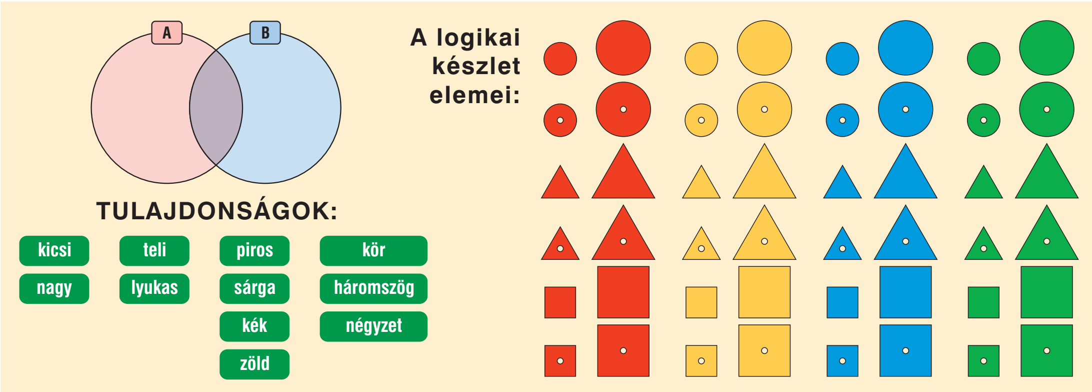
A ***Ha süt a nap, akkor dél van*** állítás
pontosan ugyanakkor igaz, mint
a ***Ha NINCS dél, akkor NEM süt a nap*** állítás.

Az állítás és a megfordítása egyszerre pontosan ugyanakkor igaz, mint a *Dél van, akkor és csak akkor, ha süt a nap.*

A *Ha dél van, akkor süt a nap* kijelentés
tagadása
a *Dél van ÉS NEM süt a nap* kijelentés.

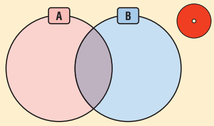
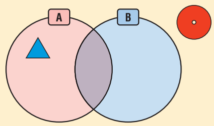
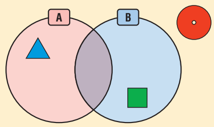
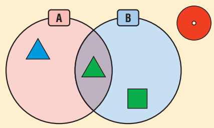
◆ ◆ ◆

Egy számítógépes játékban a gép a logikai készlet elemeiből egy-egy tulajdonság alapján hozza létre az *A* és *B* halmazokat. ***(1. ábra)***



1. ábra

A játékosnak ezeket a tulajdonságokat kell kitalálnia az alapján, hogy rákattint a logikai készlet valamelyik elemére, amit a gép berak a megfelelő halmazrészbe. Például egy játék a következő:

Kérdés	A gép válasza	A válasz után maradt lehetőségek
		*A*: kicsi, teli, sárga, kék, zöld, háromszög, négyzet *B*: kicsi, teli, sárga, kék, zöld, háromszög, négyzet
		*A*: kicsi, teli, kék, háromszög *B*: sárga, zöld, négyzet
		*A*: kék, háromszög *B*: zöld, négyzet
		*A*: háromszög *B*: zöld

Néhány válasz után lehet sejtésünk, hogy melyek a halmazokat meghatározó tulajdonságok. A sejtés bizonyításakor minden más lehetőséget ki kell zárni.

10. Legnagyobb közös osztó, legkisebb közös többszörös

1. példa

Egyszerűsítsük a $\dfrac{1020}{1224}$ törtet!

Megoldás

Eljárhatnánk úgy, hogy egy-egy számmal egyszerűsítünk, és megnézzük, hogy az új számlálót és nevezőt mivel lehet még egyszerűsíteni. Keressük meg a legnagyobb számot, amellyel egyszerűsíteni tudunk!

Készítsük el a számok prímtényezős felbontását!

1020	2
510	2
255	5
51	3
17	17
1	

1224	2
612	2
306	2
153	3
51	3
17	17
1	

$$1020 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 17; \quad 1224 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 17.$$

Láthatjuk, hogy a közös prímtényezők miatt a két számnak vannak közös osztói. A legnagyobb közös osztót a közös prímtényezőkből képezhetjük: $2^2 \cdot 3 \cdot 17 = 204$.

Ezzel egyszerűsítve: $\dfrac{1020}{1224} = \dfrac{5}{6}$.

legnagyobb közös osztó

DEFINÍCIÓ: Két pozitív egész szám esetén a közös osztók közül a legnagyobbat a két szám *legnagyobb közös osztójának* nevezzük.

Az a és b legnagyobb közös osztójának jele: $(a; b)$.

Például az előbbi esetben $(1020; 1224) = 204$.

Bebizonyítható az, hogy a közös osztók mindegyike osztója a legnagyobb közös osztónak.

A legnagyobb közös osztó a prímtényezős felbontásból előállítható úgy, hogy a közös prímtényezőket az előforduló legkisebb hatványon összeszorozzuk.

2. példa

Keressük meg a következő számpárok legnagyobb közös osztóját:

a) (73 125; 7425); *b)* (4617; 6800)!

Megoldás (a)

A számok prímtényezős felbontása:

$$73125 = 3^2 \cdot 5^4 \cdot 13; \;\; 7425 = 3^3 \cdot 5^2 \cdot 11.$$

A legnagyobb közös osztó tehát $(73125; 7425) = 3^2 \cdot 5^2 = 225$.

Euklideszi algoritmus a legnagyobb közös osztó keresésére:

$73\,125 = 9 \cdot 7425 + 6300$
$7425 = 1 \cdot 6300 + 1125$
$6300 = 5 \cdot 1125 + 900$
$1125 = 1 \cdot 900 + \mathbf{225}$
$900 = 4 \cdot 225 + 0$

Az utolsó nem 0 maradék a legnagyobb közös osztó.

Megoldás (b)

A számok prímtényezős felbontása:

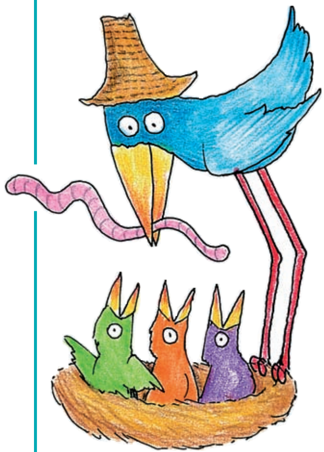
$$4617 = 3^5 \cdot 19;\quad 6800 = 2^4 \cdot 5^2 \cdot 17.$$

A két prímtényezős felbontásban nincs közös tényező. Ez azt jelenti, hogy egyetlen közös osztójuk van, az 1. Tehát (4617; 6800) = 1.

DEFINÍCIÓ: Azokat a pozitív egész számokat, melyeknek a legnagyobb közös osztója 1, *relatív prímeknek* nevezzük.

relatív prímek

Fontos látnunk, hogy ha két különböző szám relatív prím, akkor nem feltétlenül kell prímnek lenniük, de ha prímszámok, akkor biztosan relatív prímek is. Például (15; 8) = 1, (11; 43) = 1, de (11; 275) = 11.



Nemcsak két szám esetén beszélhetünk legnagyobb közös osztóról, hanem három vagy több szám esetén is.

Például (7425; 6800; 73 125) = 5^2 = 25 az előző prímtényezős felbontások alapján.

3. példa

Végezzük el az $\dfrac{1}{1176}+\dfrac{1}{720}$ összeadást!

Megoldás

Közös nevezőnek választhatnánk a két nevező szorzatát, de nagy számok esetén nehéz lenne megtalálnunk az egyszerűsítés lehetőségeit, ezért próbáljuk a lehető legkisebb közös nevezőt előállítani.

A nevezők prímtényezős felbontása: $1176 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7^2$; $720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$.

1176	2
588	2
294	2
147	3
49	7
7	7
1	

720	2
360	2
180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	

Ha az összes itt előforduló prímtényezőt (a közöseket a nagyobb hatványon) összeszorozzuk, akkor mindkét szám többszöröse áll elő, mégpedig a legkisebb: $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2 = 35\,280$.

Az összeadás: $\dfrac{1}{2^3\cdot 3\cdot 7^2}+\dfrac{1}{2^4\cdot 3^2\cdot 5}=\dfrac{2\cdot 3\cdot 5+7^2}{2^4\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7^2}=\dfrac{79}{35\,280}$.

DEFINÍCIÓ: Két pozitív egész szám esetén a közös többszörösök közül a legkisebb pozitív számot a két szám *legkisebb közös többszörösének* nevezzük.

Az *a* és *b* legkisebb közös többszörösének jele: [*a*; *b*].

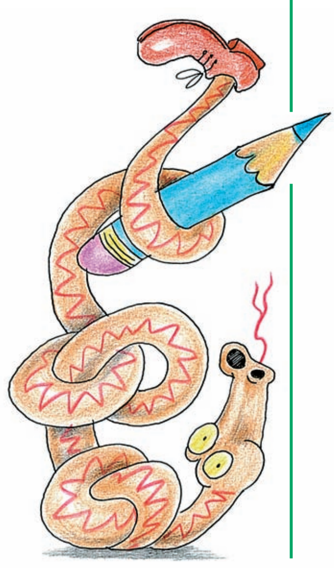
legkisebb közös többszörös

Például az előző esetben: [1176; 720] = 35 280.

A számok prímtényezős felbontásából a legkisebb közös többszörös előállítható úgy, hogy minden előforduló prímet összeszorzunk az előforduló legnagyobb hatványon.

9. A függvénytranszformációk rendszerezése

LEONHARD EULER (1707–1783) svájci matematikus, minden idők egyik legtermékenyebb matematikusa. Igen sokat tett a függvényfogalom fejlesztéséért, tartalmának gazdagodásáért.



Konkrét példákon keresztül megismerkedtünk a **függvénytranszformációk**kal.

A következő két oldalon – mint eddig is – olyan függvényekről van szó, amelyek a valós számok egy részhalmazából képeznek a valós számok halmazába. Az értelmezési tartományukat nem tüntetjük fel, mindig feltesszük, hogy a szóban forgó helyeken a függvények értelmezve vannak.

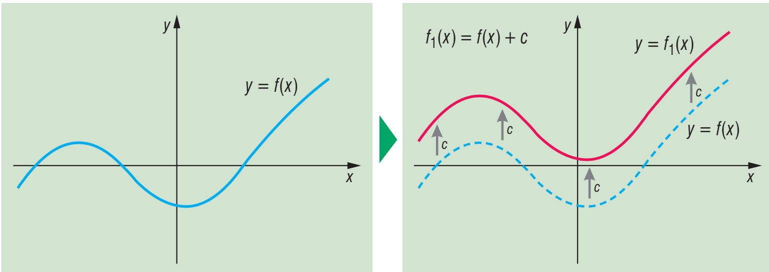
A konkrét függvények esetében már látott függvénytranszformációk alapvetően két csoportba sorolhatók.

Értéktranszformációk

Ismerjük az f függvényt a grafikonjával együtt.

(1) Az f_1 függvényre teljesüljön, hogy $\boldsymbol{f_1(x) = f(x) + c}$.

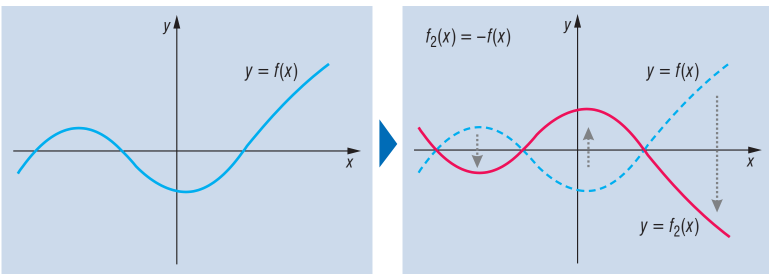
Az f_1 függvény értelmezési tartománya ugyanaz, mint az f függvény értelmezési tartománya. Az f_1 grafikonja pedig úgy keletkezik f grafikonjából, hogy az ***y* tengely mentén *c*-vel eltoljuk,** pozitív c esetén felfelé, pozitív irányba, negatív c esetén lefelé, negatív irányba. ***(89. ábra)***



89. ábra

(2) Legyen $\boldsymbol{f_2(x) = -f(x)}$.

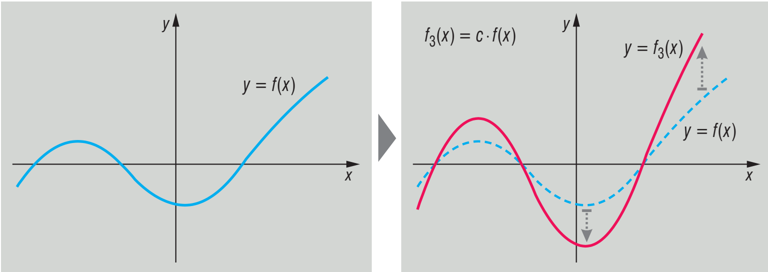
f_2 grafikonját f grafikonjából úgy kapjuk, hogy az ***x* tengelyre tükrözzük.** ***(90. ábra)***



90. ábra

(3) Legyen c pozitív szám, és $\boldsymbol{f_3(x) = c \cdot f(x)}$.

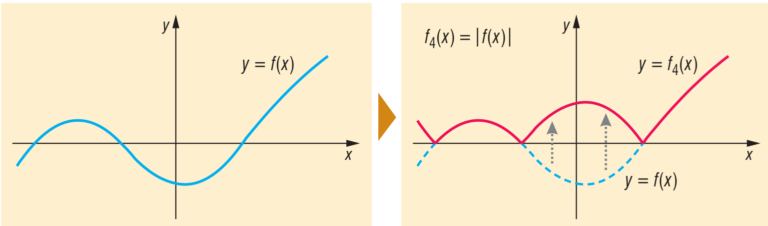
f_3 grafikonja úgy kapható f grafikonjából, hogy a görbe minden pontjának ***y* koordinátáját *c*-szeresére változtatjuk,** az x koordináta változatlanul hagyása mellett. ***(91. ábra)***



91. ábra

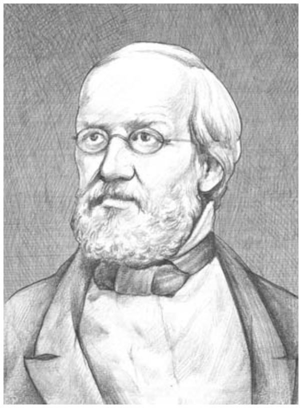
(4) Legyen $\boldsymbol{f_4(x) = |f(x)|}$.

f_4 grafikonját f grafikonjából úgy kapjuk, hogy a görbének azt a részét, amely az ***x* tengely alatt van, azaz *f* negatív értékeket vesz fel, tükrözzük az *x* tengelyre.** A görbének azt a részét, ahol f nemnegatív értékeket vesz fel, változatlanul hagyjuk. ***(92. ábra)***



92. ábra

Ennél a négy függvénytranszformációnál megfigyelhető, hogy az eredeti grafikont az „y tengely irányában” változtattuk, azaz az eredeti függvény értékeit transzformáltuk. Ezért hívják ezeket **értéktranszformációknak.**

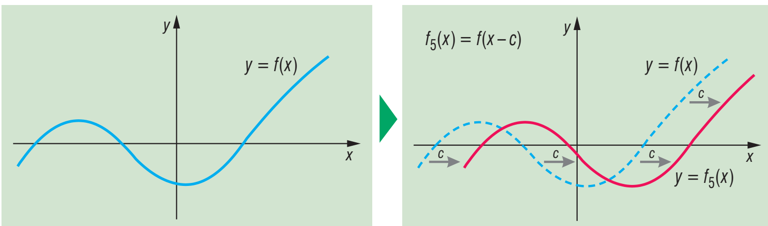


LEJEUNE DIRICHLET (1805–1859) német matematikus alapozta meg a mai modern függvényfogalmat.

Változótranszformációk

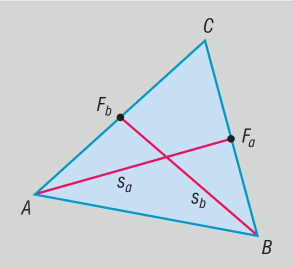
(5) Legyen $\boldsymbol{f_5(x) = f(x - c)}$.

f_5 grafikonját úgy kapjuk, hogy f grafikonját az ***x* tengely mentén *c*-vel eltoljuk,** pozitív c esetén pozitív irányba, negatív c esetén negatív irányba. ***(93. ábra)***



93. ábra

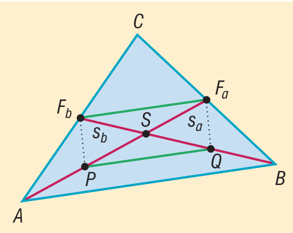
A háromszög súlyvonalai



43. ábra

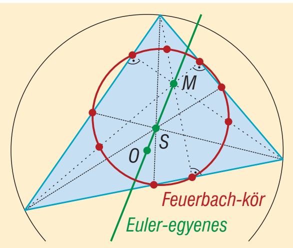
DEFINÍCIÓ: A háromszög *súlyvonala* a csúcsot a szemközti oldal felezőpontjával összekötő szakasz. *(43. ábra)*

TÉTEL: A háromszög bármely két súlyvonala úgy metszi egymást, hogy a metszéspont mindkét súlyvonalat 1 : 2 arányban osztja két részre, a nagyobbik rész másik végpontja a háromszög megfelelő csúcsa.



44. ábra

Be lehet bizonyítani, hogy a háromszög köré írt körének *O* középpontja, *S* súlypontja és *M* magasságpontja egy egyenesre illeszkedik (*Euler-egyenes*), és *S* az *OM* szakasz *O*-hoz közelebbi harmadoló pontja.



Bizonyítható az is, hogy a háromszög oldalfelező pontjai, a magasságok talppontjai és a magasságpontot a csúcsokkal összekötő szakaszok felezőpontjai (összesen 9 pont) egy körre illeszkednek (*Feuerbach-kör*). A Feuerbach-kör sugara fele akkora, mint a háromszög köré írt kör sugara.

a háromszög súlypontja

Bizonyítás

Jelölje az ABC háromszög s_a és s_b súlyvonalának metszéspontját S! Legyen továbbá az AS szakasz felezőpontja P, a BS szakasz felezőpontja Q! ***(44. ábra)***

Az ABC háromszögben F_aF_b középvonal, ezért

$$F_aF_b = \frac{AB}{2},$$

és F_aF_b párhuzamos AB-vel.

Az ABS háromszögben PQ középvonal, ezért

$$PQ = \frac{AB}{2},$$

és PQ párhuzamos AB-vel.

A fenti két észrevételt összevetve kapjuk, hogy

$$F_aF_b = PQ,$$

és F_aF_b párhuzamos PQ-val, ami azt jelenti, hogy a PQF_aF_b négyszög két szemközti oldala párhuzamos és egyenlő. Ebből következik, hogy a PQF_aF_b négyszög paralelogramma.

A paralelogramma átlói felezik egymást, így

$$PS = SF_a \quad \text{és} \quad QS = SF_b.$$

Mivel P és Q az AS illetve BS szakaszok felezőpontjai, ezért

$$AS = 2 \cdot SF_a \quad \text{és} \quad BS = 2 \cdot SF_b.$$

Ezzel tételünket bebizonyítottuk.

Mivel bármely két súlyvonal harmadolja egymást a tételben kimondottaknak megfelelően, ezért a súlyvonalaknak a háromszög csúcsától távolabbi harmadoló pontja közös pont, erre mindhárom súlyvonal illeszkedik. Így az előző tétel következményeként adódik a következő:

TÉTEL: A háromszög súlyvonalai egy pontban metszik egymást. Ez a pont mindhárom súlyvonalnak a háromszög megfelelő csúcsától távolabbi harmadoló pontja.

DEFINÍCIÓ: A súlyvonalak metszéspontját a háromszög *súlypontjának* nevezzük.

Feladatok

1. Egy háromszög oldalainak hossza:
a) 3 cm, 4 cm, 5 cm; *b)* 6 dm, 7 dm, 10 dm;
c) 7,2 m, 410 cm, 50 dm; *d)* 12 cm, 7,2 cm, 48 mm.
Számítsuk ki az egyes esetekben a háromszög középvonalai által meghatározott háromszög oldalainak hosszát!

2. Egy trapéz párhuzamos oldalainak hossza:
a) 4 cm és 8 cm; *b)* 5 dm és 17 dm;
c) 12,5 cm és 0,3 m; *d)* 32 mm és 0,62 dm.
Számítsuk ki az egyes esetekben a szárak felezőpontját összekötő szakasz hosszát!

3. Szerkesszünk derékszögű háromszöget, ha az átfogóval párhuzamos középvonal 3 cm, az átfogóhoz tartozó magasság pedig 2 cm hosszú!

4. Számítsuk ki a derékszögű háromszög köré írt kör sugarát, ha két befogójának hossza:
a) 3 cm és 4 cm; *b)* 5 dm és 12 dm; *c)* 12 mm és 3,5 cm; *d)* a és b!

5. Számítsuk ki a szabályos háromszög magasságának hosszát, ha súlypontja a csúcsoktól:
a) 4 cm; *b)* 6 dm; *c)* 12,3 m; *d)* d
távolságra van!

6. Tükrözzük az ABC háromszöget BC oldalának F_a felezőpontjára! Milyen síkidomot határoz meg az eredeti és a képháromszög egyesítése? Számítsuk ki a kapott síkidom átlóinak hosszát, ha
a) $AF_a = 5$ cm, $BC = 8$ cm;
b) $AF_a = 6{,}2$ dm, $BC = 410$ mm;
c) $AF_a = x$, $BC = y$!

7. Szerkesszünk háromszöget, ha adott két oldalának és a közös csúcsból kiinduló súlyvonalnak a hossza!
a) $a = 4{,}2$ cm, $b = 9{,}2$ cm, $s_c = 6$ cm;
b) $a = 50$ mm, $b = 0{,}7$ dm, $s_c = 6$ cm;
c) $a = 4$ cm, $b = 0{,}73$ dm, $s_c = 0{,}06$ m.

8. Bizonyítsuk be, hogy bármely négyszögre igaz a következő állítás: két szomszédos oldal felezőpontját összekötő szakasz feleolyan hosszú, mint a négyszög egyik átlójának hossza!

9. Igazoljuk, hogy bármely négyszög oldalfelező pontjai paralelogrammát határoznak meg!

10. Bizonyítsuk be, hogy bármely négyszög középvonalai felezik egymást!

11. Mit állíthatunk arról a négyszögről, amelynek középvonalai egyenlő hosszúak? Állításunkat indokoljuk!

12. Bizonyítsuk be, hogy a háromszög oldalai mint átmérők fölé szerkesztett körök páronként vett közös szelői egy pontban metszik egymást! Melyik nevezetes pontja ez a háromszögnek?

13. Mutassuk meg, hogy a háromszög súlyvonalai hosszának összege kisebb a háromszög kerületénél, de nagyobb a kerület 75%-ánál!

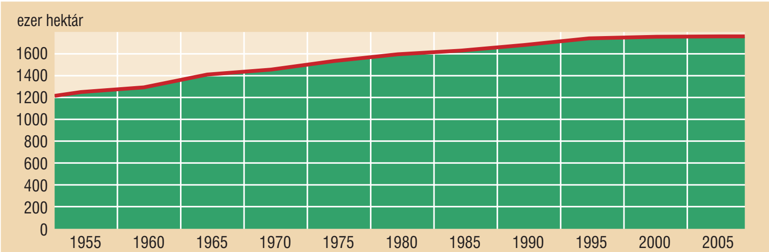
14. Ellenőrizzük számítógépes geometriai szerkesztőprogram segítségével az Euler-egyenesre és a Feuerbach-körre vonatkozó tételeket!

1. Az adatok ábrázolása

A statisztikai elemzésekhez összegyűjtött adatokat ***adatsokaságnak, mintának*** is szoktuk nevezni.

Az adatokat összegyűjthetjük táblázatban, és ábrázolhatjuk diagramon. Számos ilyen diagrammal találkozhatunk az újságokban, tévében.

Év	Erdőterület (ezer hektár)
1955	1240
1960	1280
1965	1360
1970	1440
1975	1500
1980	1590
1985	1610
1990	1640
1995	1700
2000	1770
2005	1775

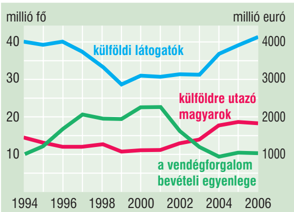


Az erdőfelület nagyságának változása hazánkban

1. ábra

Az 1. ábra táblázata és diagramja például a magyarországi erdőterület változását mutatja 1955-től 2005-ig.

A különböző adatok változását jól követhetjük, és összehasonlíthatjuk, ha a koordináta rendszerben ***görbékkel*** ábrázoljuk. ***(2. ábra)***



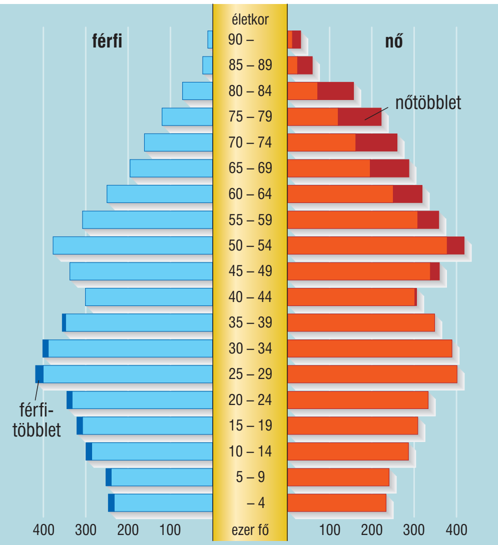
A vendégforgalom alakulása és bevételi egyenlege

2. ábra

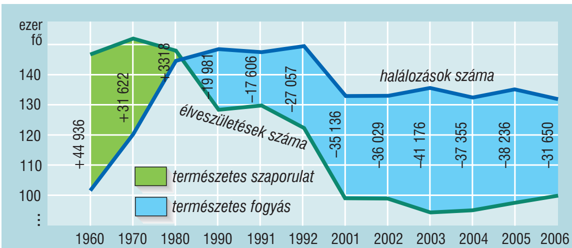
A diagramokról leolvasható információ sokszor csak több táblázattal, vagy szöveggel lenne közölhető. A kép nemcsak szemléletesebb, de több információt is nyújt.

A következő ***oszlopdiagramok*** a magyar népesség alakulását mutatják bizonyos években ***(3. ábra)***. A görbék, oszlopdiagramok akkor hasznosak, ha az adatok változása, egymáshoz való viszonya az érdekes.

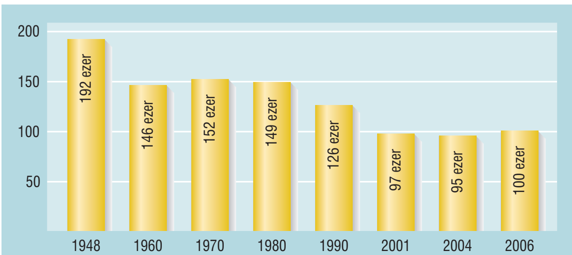
3. ábra



A magyar népesség korfája (2006)



Természetes szaporulat (ill. fogyás) alakulása



Az újszülöttek számának változása

1. példa

Albert 20 pontos matematika dolgozatot írt, Benő 25 pontos fizika dolgozatot. Melyikük dolgozata sikerült jobban, ha a matematika dolgozatnál 25 pontot lehetett elérni összesen, a fizika dolgozatnál pedig 50 pontot?

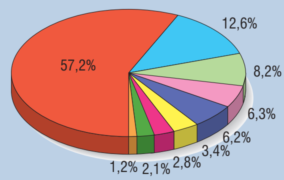
Megoldás

Hiába ért el Benő több pontot, mint Albert, ez az összes pontszámnak csak az 50%-a, míg Albert eredménye az összes pontszámnak 80%-a, így Albert dolgozata sikerült jobban.

Sokszor előfordul, hogy a különböző módon mért mennyiségek összehasonlítása nem nyújt kellő információt, ilyenkor az arányok, **százalékok összehasonlítása** valóságosabb képet ad.

Ha az adatok az egésznek az arányában érdekesek, akkor ezek ábrázolására ***kördiagramot*** érdemes használni, ahol a kört a megfelelő adatok arányában osztjuk fel ***(4. ábra)***.

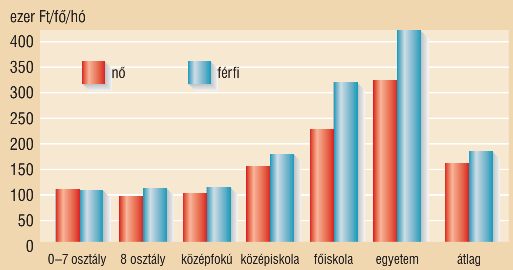
A gyümölcstermesztés fajtánkénti megoszlása Magyarországon



4. ábra

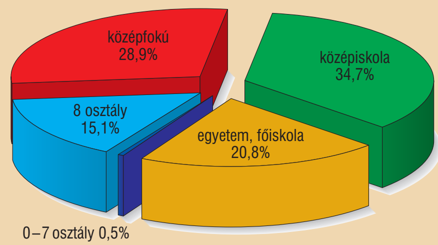
kördiagramok

Az 5. és 6. ábra jól mutatja, hogy mikor hasznosabb az oszlopdiagram, és mikor a kördiagram:



Iskolai végzettség szerinti kereseti adatok 2006-ban Magyarországon

5. ábra



A foglalkoztatottak legmagasabb befejezett iskolai végzettség szerinti létszámmegoszlása 2005-ben Magyarországon

6. ábra

Az egyes adatok előfordulásának számát a ***gyakoriság*** mutatja, melyet ***gyakorisági diagramon,*** más néven ***hisztogramon*** ábrázolhatunk.

gyakoriság

hisztogram

Az adatok és azok gyakorisága együtt ***gyakorisági eloszlást*** alkot.

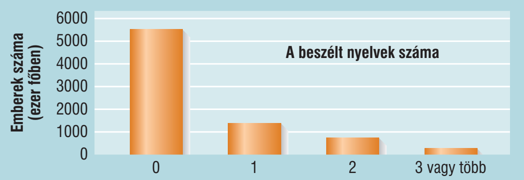
gyakorisági eloszlás

Az adatokat gyakran osztályokba soroljuk, megszámoljuk, hány adat esik az egyes osztályokba, így kapjuk az osztályok gyakoriságát.

A 14 évesnél idősebb magyar állampolgárok nyelvtudását felmérő vizsgálat eredménye a következő:

Nem beszél idegen nyelvet	5 603 ezer fő
1 idegen nyelvet beszél	1 483 ezer fő
2 idegen nyelvet beszél	906 ezer fő
3 vagy több idegen nyelvet beszél	247 ezer fő

7. ábra



relatív gyakoriság

Ha az adatokat a teljes 14 évesnél idősebb népesség arányában adjuk meg, vagyis kiszámítjuk, hogy a 14 évesnél idősebbek hányad része, hány százaléka beszél 0, 1, 2, 3 vagy több nyelvet, akkor az adatok ***relatív gyakoriságát*** kapjuk meg, ami sokszor jobb összehasonlítást tesz lehetővé az adatok között. Ezt is lehet ábrázolni hisztogramon.

2. példa

Egy osztály matematika dolgozatot írt. Az elérhető maximális pontszám 50 volt. A tanulók által szerzett pontok:

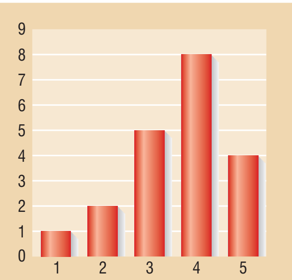
18; 22; 37; 42; 48; 50; 32; 38; 26; 40;
42; 43; 45; 35; 34; 36; 39; 40; 34; 33.

A tanár úgy osztályzott, hogy

5: 43–50; 4: 36–42; 3: 29–35; 2: 22–28; 1: 0–21.

Adjuk meg a jegyek gyakorisági eloszlását és ábrázoljuk oszlopdiagramon!

8. ábra



Megoldás

A gyakorisági eloszlás a 9. ábrán, az oszlopdiagram a 8. ábrán látható.

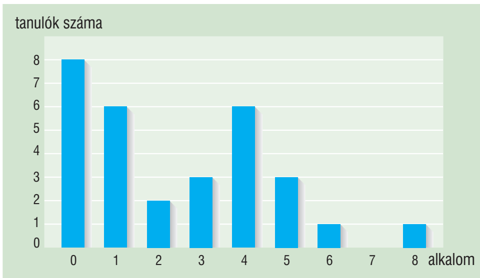
9. ábra

jegy	1	2	3	4	5
gyakoriság	1	2	5	8	4

Feladatok

1. Egy osztályban felmérést végeztek, hogy a tanulók hányszor voltak színházban az elmúlt évben. Az eredményt az oszlopdiagram mutatja.

Olvassuk le és írjuk táblázatba az adatok gyakorisági eloszlását!



2. Ábrázoljuk a földrészek területét és lakosságának számát oszlopdiagramon!

Földrészek	**Terület** (1000 km^2)	**Lakosság** (millió fő)
Európa	10 508	732
Ázsia	44 411	3969
Afrika	30 319	924
Észak-Amerika	21 515	332
Közép- és Dél-Amerika	20 566	566
Ausztrália és Óceánia	8 510	34
Antarktisz	13 328	–
Föld összesen	149 157	6555

3. A táblázatban Magyarország régióinak adatai láthatók. Készítsünk diagramokat az adatokból!

	Közép-Magyaro.	Közép-Dunántúl	Nyugat-Dunántúl	Dél-Dunántúl	Észak-Magyaro.	Észak-Alföld	Dél-Alföld
Terület (%)	7,4	12,1	12,0	15,2	14,4	19,1	19,8
Lakosság (%)	28,3	11,0	9,8	9,7	12,7	15,1	13,4
Bruttó hazai termék (%)	41,6	10,0	10,3	7,8	8,8	10,6	10,9
Munkanélküliek (%)	15,2	10,5	6,9	11,8	19,2	22,2	14,2
Külföldi tőkebefektetés (%)	64,0	6,8	8,9	3,3	7,7	4,7	4,6
Beruházások (%)	39,4	12,8	11,3	6,9	9,5	11,4	8,7

4. Egy leány kosárlabdacsapat tagjainak kosárcipőket vásárol az egyesület. Megmérték a lányok lábának hosszát centiméterben milliméter pontossággal, és a következő eredményeket kapták:

23,2; 26,3; 28,0; 25,1; 25,8; 24,9; 24,2;
25,4; 25,9; 26,1; 24,4; 24,9; 23,6; 23,4.

Adjuk meg az egyes méretek gyakorisági eloszlását és ábrázoljuk oszlopdiagramon, ha a kosárcipők mérettáblázata a következő:

európai méret	36,0	36,5	37,5	38,0	38,5	39,0	40,0	40,5	41,0	42,0	42,5	43,0
lábhossz (cm)	22,5	23,0	23,5	24,0	24,5	25,0	25,5	26,0	26,5	27,0	27,5	28,0

5. Figyeljük meg, hogy egy nap hány órát töltünk a következő tevékenységekkel: alvás, iskola, lecke, szórakozás, evés és egyéb! Ábrázoljuk oszlopdiagramon és kördiagramon!

Gyűjtsük össze, hogy az osztályban hányan vannak, akik átlagosan naponta 4 óránál kevesebbet alszanak, 4–6 órát, 6–8 órát, 8 óránál többet alszanak és ábrázoljuk a gyakorisági eloszlást oszlopdiagramon!

6. Gyűjtsük össze az adatokat, és ábrázoljuk hisztogramon, hogy az osztályból hányan járnak iskolába gyalog, biciklivel, tömegközlekedési eszközzel és autóval!

7. Készítsünk gyakorisági táblázatot, hogy a történelemkönyvünk első leckéjének első oldalán melyik betűből hány darab van, és ábrázoljuk hisztogramon! Ez alapján melyek a leggyakoribb betűk a magyar nyelvben? Az egyik játékban egy szót kell kitalálni, és lehet mondani 6 betűt. Amelyik betű ezek közül szerepel a szóban, azt megmutatják. Mely betűket mondanánk? Vajon miért kicsi a találat esélye?

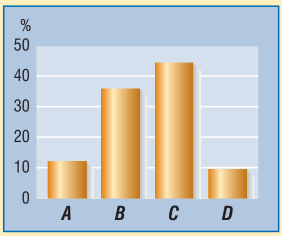
8. Végezzünk kísérletet két érmével! Dobjuk fel egyszerre a két érmét 30-szor egymás után, és jegyezzük fel, hányszor fordult elő a két érmén 0 fej, 1 fej, 2 fej! Ábrázoljuk oszlopdiagramon! Válasszuk ki a leggyakoribb értéket!

Rejtvény

Egy televíziós vetélkedőben négy lehetséges válasz közül kell kiválasztani egyet. A közönség segítséget nyújthat a játékosnak. A kérdés a következő volt: „Kinek a vígjátéka alapján készült a My Fair Lady című musical?

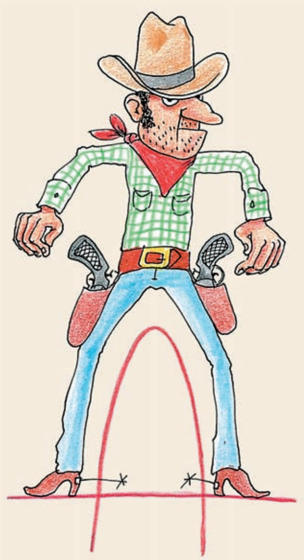
***A)* Shakespeare**   ***B)* Oscar Wilde**
***C)* G. B. Shaw**   ***D)* Neil Simon**

A szavazatok diagramja, az oszlopok sorban az *A*, *B*, *C*, *D* válaszokra adott szavazatokat mutatják. Melyik választ jelöljük meg?



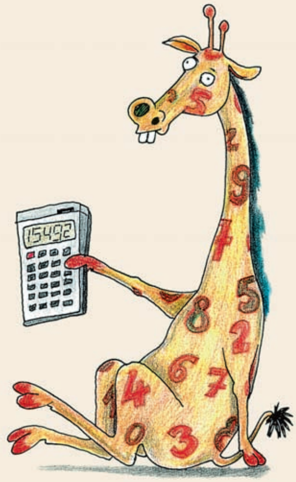
Kombinatorika, halmazok

Algebra és számelmélet



Függvények

Háromszögek, négyszögek, sokszögek



Egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek

Egybevágósági transzformációk

Statisztika