Kosztolányi József
Kovács István
Pintér Klára
Urbán János
Vincze István

Matematika

tankönyv

10

Mozaik Kiadó – Szeged, 2013

TARTALOMJEGYZÉK

Gondolkodási módszerek

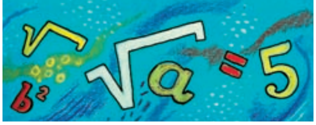
A gyökvonás

A másodfokú egyenlet

Geometria

A körrel kapcsolatos ismeretek bővítése

A hasonlósági transzformáció és alkalmazásai



1. Racionális számok, irracionális számok

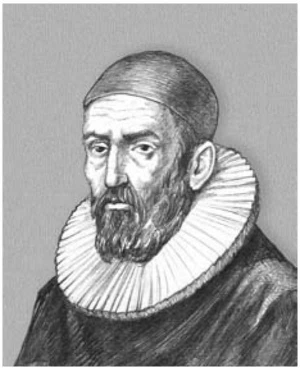
racionális szám

DEFINÍCIÓ: A két egész szám hányadosaként felírható számokat *racionális számoknak* nevezzük.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}; q \neq 0 \right\}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{8}{12} = \ldots$$

Mivel egyszerűsítés és bővítés során a törtszám nem változik, ezért minden racionális számnak végtelen sok alakja van.



A tizedes törtek mai alakjukban 1616-ban jelentek meg John Napier [néjpjer] művében, amelyben a szerző az egész és törtrészeket ponttal választotta el. Később Napier a tizedespont helyett ajánlotta a tizedesvessző használatát is. Angliában a pont, de a legtöbb európai országban a vessző használata terjedt el.

1. példa

Írjuk fel a következő racionális számok tizedes tört alakját!

a) $\frac{5}{8}$; *b)* $\frac{13}{9}$; *c)* $\frac{5}{6}$; *d)* $\frac{157}{333}$.

Megoldás

a)	*b)*	*c)*	*d)*
5 : 8 = 0,625 50 20 40 0	13 : 9 = 1,44… 40 40 4 …	5 : 6 = 0,833… 50 20 20 2 …	157 : 333 = 0,471… 1570 2380 490 157 …

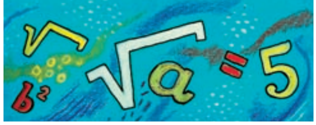
a) $\frac{5}{8} = 5:8 = 0{,}625$ véges tizedes tört.

b) $\frac{13}{9} = 13:9 = 1{,}444\ldots = 1{,}\dot{4}$ végtelen szakaszos tizedes tört.

c) $\frac{5}{6} = 5:6 = 0{,}8333\ldots = 0{,}8\dot{3}$ végtelen szakaszos tizedes tört.

d) $\frac{157}{333} = 157:333 = 0{,}4714714\ldots = 0{,}\dot{4}7\dot{1}$ végtelen szakaszos tizedes tört.

Általánosítva: Ha p és q pozitív egész számok, a $\frac{p}{q}$ racionális szám tizedes tört alakja véges, ha a maradékos osztás elvégzése során maradékként a 0 lép fel. Ha a 0 nem fordul elő a maradékok között, akkor a lehetséges maradékok 1, 2, … , $q - 1$. Így legfeljebb q osztás után – a skatulyaelv miatt – olyan maradékot kapunk, amely már szerepelt. Ettől kezdve a maradékok ismétlődnek, tehát a tizedes tört végtelen szakaszos lesz.



2. példa

Írjuk fel két egész szám hányadosaként a következő számokat!

a) 3,82; *b)* 1,215; *c)* $1{,}\dot{3}8\dot{7}$

Megoldás

a) $3{,}82 = \frac{382}{100} = \frac{191}{50}$; *b)* $1{,}215 = \frac{1215}{1000} = \frac{243}{200}$;

c) Jelöljük a számot egy betűvel: $1{,}\dot{3}8\dot{7} = x$! Mivel három jegy ismétlődik, írjuk fel a szám 1000-szeresét: $1000x = 1387{,}\dot{3}8\dot{7}$, ebből kivonva az eredeti számot: $999x = 1386$, tehát: $x = \frac{1386}{999} = \frac{154}{111}$.

Ez a módszer n jegyből álló szakasz esetén úgy alkalmazható, hogy 10^n-nel szorzunk.

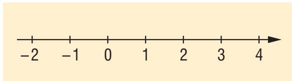
átírás tört alakba

◆ ◆ ◆

irracionális szám

DEFINÍCIÓ: ***Irracionális számnak*** **nevezzük azokat a számokat, melyek tizedes tört alakja végtelen nem szakaszos.**

Pl. belátható, hogy irracionális lesz a következő módon képzett szám: 1,2323323332333…, ahol mindig eggyel növeljük a hármasok számát, vagy 5,6789101112…, ahol a pozitív egész számokat írjuk egymás után.

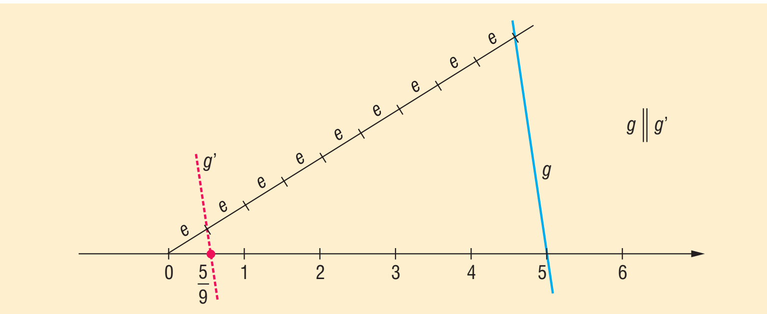


1. ábra

A számegyenesen az egység ismeretében az egész számok helye könnyen megadható. ***(1. ábra)***

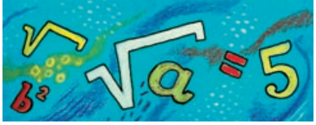
A racionális számok helye hasonlóság alkalmazásával szintén megszerkeszthető. Az $\frac{5}{9}$ helye a 2. ábrán látható módon szerkeszthető.

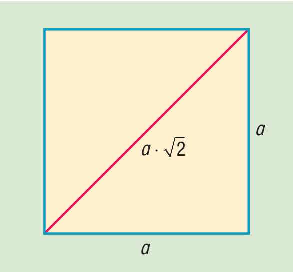
2. ábra



Megjegyzés: Az ókori matematikusok **„összemérhetőnek”** neveztek két szakaszt, ha azokhoz megadható egy olyan egység, melynek mindkét szakasz többszöröse.

Például az $\frac{5}{9}$ és $\frac{3}{4}$ hosszúságú szakaszok többszörösei az $\frac{1}{36}$ hosszúságú szakasznak (az első 20-szorosa, a második 27-szerese). Tehát azt mondhatjuk, hogy a fenti két szakasz összemérhető.





3. ábra

Két racionális számmal megadott szakasz mindig összemérhető. Egységnek megfelel az a tört, melynek számlálója 1, nevezője pedig a nevezők legkisebb közös többszöröse.

Sokáig kérdéses volt, hogy minden szakasz összemérhető-e. Körülbelül a Kr. e. 5. században görög matematikusok bebizonyították, hogy a négyzet oldala és átlója nem összemérhető. ***(3. ábra)***

A 9. osztályban definiált négyzetgyökvonás segítségével is előállíthatunk irracionális számokat.

a $\sqrt{2}$ irracionális szám

TÉTEL: A $\sqrt{2}$ irracionális szám.

Bizonyítás

indirekt bizonyítás

Végezzük a bizonyítást indirekt úton.

Tegyük fel, hogy $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, ahol $p, q \in \mathbb{Z}^+$ és relatív prímek: $(p; q) = 1$.

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q},$$

$$2 = \frac{p^2}{q^2},$$

$$2q^2 = p^2.$$

$$\Downarrow$$

$$2 \mid p^2 \Rightarrow 2 \mid p \Rightarrow 4 \mid p^2,$$

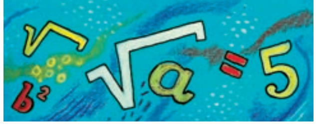
$$\text{ha } 4 \mid p^2 \Rightarrow 2 \mid q^2 \Rightarrow 2 \mid q.$$

$\sqrt{2} \approx 1{,}41421356237309\ldots$

Kr. e. 2300-ban Mezopotámiában a $\sqrt{2}$ közelítésére az $1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} \approx$ $\approx 1{,}4142122$ értéket ismerték.

Azt kaptuk, hogy p és q is páros. Ez ellentmond annak, hogy relatív prímek, tehát az állítás igaz.

Megjegyzés: A fenti módszerekkel belátható, hogy minden olyan pozitív a egész szám esetén, mely nem négyzetszám, a $\sqrt{a}$ irracionális szám.



DEFINÍCIÓ: A racionális számok halmazának és az irracionális számok halmazának uniója a *valós számok halmaza*.

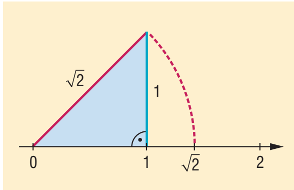
A valós számok halmazának jele $\mathbb{R}$, az irracionális számok halmazát pedig szokás $\mathbb{Q}^*$-gal jelölni. Ezekkel a jelölésekkel: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^*$.

a valós számok halmaza

A számegyenesen bizonyos irracionális számok helye is megszerkeszthető.

Például a $\sqrt{2}$ a Pitagorasz-tétel felhasználásával a 4. ábrán vázolt módon szerkeszthető meg.

Ugyanakkor vannak olyan irracionális számok, például a π, amelyek nem szerkeszthetők meg.



4. ábra

Feladatok

1. Írjuk fel a következő számok tizedes tört alakját!

a) $\frac{5}{12}$; *b)* $\frac{13}{7}$; *c)* $\frac{11}{17}$; *d)* $\frac{10}{17}$.

2. Írjuk fel két egész szám hányadosaként a következő számokat!

a) 3,142; *b)* $3{,}\dot{1}4\dot{2}$; *c)* $3{,}1\dot{4}\dot{2}$; *d)* $3{,}14\dot{2}$.

3. Bizonyítsuk be, hogy a következő számok irracionálisak!

a) $\sqrt{7}$; *b)* $\sqrt{2}+1$; *c)* $\sqrt{3}-1$; *d)* $\sqrt{2}+\sqrt{7}$.

4. Az egység ismeretében szerkesszük meg a

a) $\sqrt{7}$; *b)* $\sqrt{10}$; *c)* $\sqrt{17}$; *d)* $\sqrt{1956}$

hosszúságú szakaszokat!

5. Írjunk fel olyan irracionális számot, amely nagyobb 0,99-nál, de kisebb 1-nél!

Rejtvény

Melyik két egész szám hányadosa lehet az $1{,}\dot{9}$ végtelen szakaszos tizedes tört?

5. Másodfokú egyenlőtlenségek

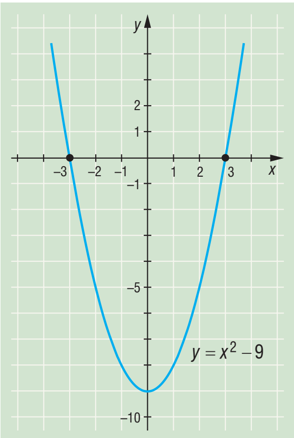
Bármely valós a és b számról el tudjuk dönteni, hogy milyen relációban állnak egymással. Három eset lehetséges:

$$a < b, \text{ vagy } a = b, \text{ vagy } a > b.$$

másodfokú egyenlőtlenség

Ha kifejezéseket kapcsolunk össze a <, >, ≤, ≥ jelekkel, akkor egyenlőtlenségeket kapunk. Ha ezek a kifejezések másodfokúak, akkor **másodfokú egyenlőtlenségekről** beszélünk.

A másodfokú egyenlőtlenségek megoldásában lényeges szerepet játszik az, hogy ezeknek a kifejezéseknek a grafikonja a koordináta-rendszerben parabolát határoz meg. A grafikonok megrajzolása minden esetben sokat segíthet a keresett megoldáshalmaz megkeresésében és szemléltetésében.



4. ábra

1. példa

Oldjuk meg az $x^2 - 9 < 0$ egyenlőtlenséget!

I. megoldás

Készítsük el a bal oldali kifejezés által meghatározott függvény grafikonját! ***(4. ábra)***

Azokat az x valós számokat keressük, amelyekre a függvény által felvett értékek negatívok.

A függvény zérushelyei:

$$x_1 = -3;\ x_2 = 3,$$

ezért a megfelelő valós számok a $]-3;\, 3[$ nyitott intervallum elemei.

II. megoldás

Megoldás **algebrai úton,** négyzetgyökvonás alkalmazásával:

$\sqrt{a^2} = |a|$

$$x^2 < 9,$$
$$\sqrt{x^2} < \sqrt{9},$$
$$|x| < 3,$$
$$-3 < x < 3.$$

III. megoldás

Megoldás **szorzattá alakítással:**

$$x^2 - 9 = (x-3)\cdot(x+3) < 0.$$

A szorzat akkor lesz negatív, ha a tényezői különböző előjelűek:

$$x - 3 < 0 \text{ és } x + 3 > 0, \quad \text{vagy} \quad x - 3 > 0 \text{ és } x + 3 < 0,$$
$$x < 3 \text{ és } x > -3. \qquad\qquad x > 3 \text{ és } x < -3.$$

Mivel a második esetnek nincs megoldása a valós számok halmazán, a megoldás:

$$-3 < x < 3.$$

2. példa

Mely valós számokra igaz, hogy $-x^2 + 4x - 5 < 0$?

Megoldás

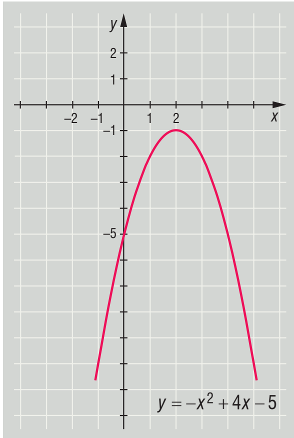
Oldjuk meg első lépésben a $-x^2 + 4x - 5 = 0$ egyenletet! Mivel a diszkrimináns értéke $D = 16 - 20 = -4$, vagyis negatív szám, ezért ennek nem létezik valós megoldása.

Ha ábrázoljuk a bal oldal függvényét, akkor egy olyan lefelé nyíló parabolát kapunk, amelyik nem metszi az x tengelyt, hiszen a másodfokú tag együtthatója negatív szám, és a diszkrimináns negatív.

A grafikon ábrázolásához alakítsuk a $-x^2 + 4x - 5$ másodfokú kifejezést teljes négyzetté:

$$-x^2 + 4x - 5 = -(x^2 - 4x) - 5 = -[(x-2)^2 - 4] - 5 = -(x-2)^2 - 1.$$

A függvény grafikonja az 5. ábrán látható. Ebből látható, hogy az egyenlőtlenség megoldása az értelmezési tartománnyal egyezik meg, azaz a valós számok halmaza.



5. ábra

◆ ◆ ◆

Az olyan egyenlőtlenségeket, melyek megoldásainak halmaza megegyezik az értelmezési tartománnyal, **azonos egyenlőtlenségeknek** nevezzük.

azonos egyenlőtlenség

3. példa

Mely egész számokra igaz, hogy $(x-2)^2 \le 7 - 2x$?

Megoldás

Végezzük el a kijelölt műveleteket, majd rendezzük az egyenlőtlenséget úgy, hogy az egyik oldalon nulla álljon!

$$x^2 - 4x + 4 \le 7 - 2x,$$
$$x^2 - 2x - 3 \le 0.$$

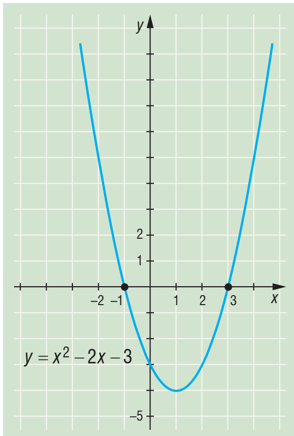
Határozzuk meg a bal oldalon álló másodfokú kifejezés zérushelyeit:

$$x^2 - 2x - 3 = 0.$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2} = \begin{cases} x_1 = -1, \\ x_2 = 3. \end{cases}$$

Mivel az $\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2 - 2x - 3$ függvény grafikonja felfelé nyíló parabola ***(6. ábra)***, ezért az egyenlőtlenségünk megoldása a két zérushely közötti tartomány lesz. Tehát

$$-1 \le x \le 3.$$



6. ábra

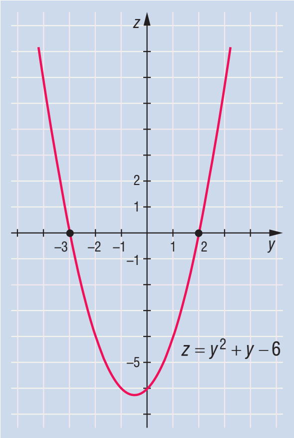
A megoldásokat az egész számok halmazán keressük, ezért a feladat megoldása a következő számokból áll:

$$x \in \{-1; 0; 1; 2; 3\}.$$

4. példa

Oldjuk meg a következő egyenlőtlenséget a valós számok halmazán:

$$x^4 + x^2 - 6 > 0!$$



7. ábra

Megoldás

Vezessünk be új ismeretlent: $y = x^2$.

Így a következő egyenlőtlenséget kell megoldanunk:

$$y^2 + y - 6 > 0.$$

Megkeresve az $y^2 + y - 6 = 0$ egyenlet gyökeit:

$$y_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2} = \begin{cases} y_1 = -3, \\ y_2 = 2. \end{cases}$$

Figyelembe véve, hogy a bal oldal függvénye által meghatározott grafikon felfelé nyíló parabola *(7. ábra)*, így az egyenlőtlenség megoldása:

$$y < -3 \quad \text{vagy} \quad y > 2.$$

Az x változót visszahelyettesítve két egyenlőtlenség megoldásait kell megkeresnünk.

Az $x^2 < -3$ feltételnek egyik valós szám sem tesz eleget, hiszen a valós számok négyzete mindig nemnegatív.

Az $x^2 > 2$ egyenlőtlenséget megoldva:

$$\sqrt{x^2} > \sqrt{2},$$

$$|x| > \sqrt{2}.$$

Tehát az egyenlőtlenség megoldása a valós számkörben:

$$x < -\sqrt{2} \quad \text{vagy} \quad x > \sqrt{2}.$$

A másodfokú egyenlőtlenségek megoldásánál érvényben maradnak azok a szabályok, melyeket korábbi tanulmányaink során az elsőfokú egyenlőtlenségeknél megtaláltunk, vagyis:

(1) Az egyenlőtlenség mindkét oldalához hozzáadhatjuk, illetve mindkét oldalból kivonhatjuk ugyanazt a valós számot, szorozhatjuk, illetve oszthatjuk ugyanazzal a pozitív valós számmal, a reláció továbbra is igaz marad.

(2) A negatív számmal való szorzás és osztás megváltoztatja a reláció irányát.

(3) Ha az egyenlőtlenség mindkét oldalát 0-val szorozzuk, akkor megváltozhat a megoldások halmaza.

(4) Négyzetre emeléskor, illetve reciprokképzéskor meg kell vizsgálnunk, hogy az eredeti kifejezések milyen előjelűek, és csak ezek után állíthatunk valamit arról, hogy hogyan változik a reláció iránya.

Ha $a > b$, akkor:

$$a + c > b + c,$$
$$a - c > b - c,$$
$$a \cdot d > b \cdot d,$$
$$\frac{a}{d} > \frac{b}{d},$$

ahol $c \in \mathbb{R}$ és $d \in \mathbb{R}^+$.

Feladatok

1. Oldjuk meg a következő egyenlőtlenségeket!

a) $x^2 - 16 < 0$; *b)* $x^2 - 25 > 0$; *c)* $x^2 - 64 \le 0$.

2. Keressük meg a következő egyenlőtlenségek megoldásait!

a) $x^2 - x - 1 > 0$; *b)* $x^2 - 2x - 3 \le 0$; *c)* $2x^2 - 7x - 4 < 0$.

3. Mely egész számokra igazak a következő egyenlőtlenségek?

a) $x^2 - 4x - 4 > -3x - 3$; *b)* $2x^2 - 4x - 3 \le x^2 - 2x$; *c)* $2x(1 - 7x) - 4 < 0$.

4. Oldjuk meg és ábrázoljuk számegyenesen a következő egyenlőtlenségek megoldásait!

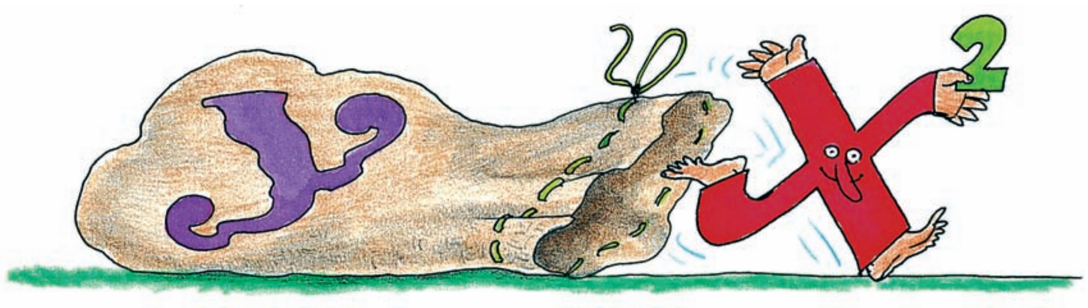
a) $x^4 - 1 > 0$; *b)* $x^4 - 2x^2 - 3 \le 0$; *c)* $2x^6 - 7x^3 - 4 < 0$.

5. Oldjuk meg a következő egyenlőtlenségeket!

a) $\frac{1}{x} - 1 > x$; *b)* $x + \frac{1}{x} - 2 \le 0$; *c)* $\frac{1}{x-1} < 3 + \frac{2}{x-3}$.

6. Az m paraméter milyen értékei mellett elégíti ki az x bármely értéke a következő egyenlőtlenségeket?

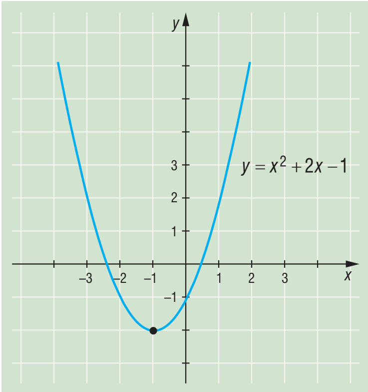
a) $x^2 + 2x + m > 0$; *b)* $x^2 + mx + 4 \le 0$; *c)* $(4 - m)x^2 - 3x + m + 4 > 0$.



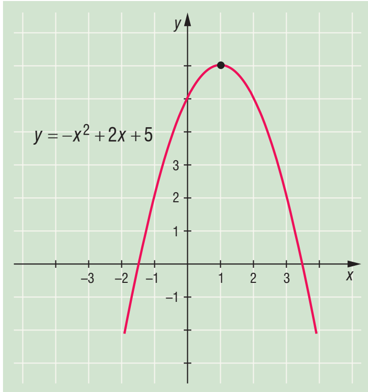
10. Szélsőérték-feladatok (emelt szintű tananyag)

Emlékeztető:
Az f függvénynek az $x = a$ helyen minimuma / maximuma van, ha az értelmezési tartomány minden elemére $f(x) \geq f(a)$ / $f(x) \leq f(a)$.

Az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ alakú másodfokú függvények grafikonjai parabolák. Ha $a > 0$, akkor a parabola **felfelé** nyílik *(24. ábra)*, **minimuma** van. Ha $a < 0$, akkor a parabola **lefelé** nyílik *(25. ábra)*, **maximuma** van.



24. ábra



25. ábra

A függvény minimuma, maximuma a függvény ***szélsőértéke*.**

1. példa

Határozzuk meg az $f(x) = x^2 + 2x - 3$ függvény szélsőértékeit akkor, ha

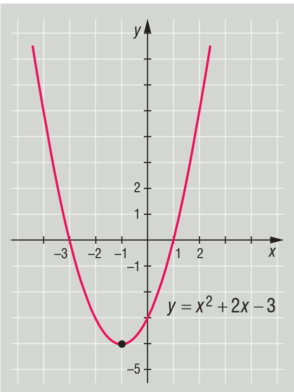
a) $x \in \mathbb{R}$; *b)* $x \in [0; 2]$; *c)* $x \in [-3; -2]$.

Megoldás

A függvényt alakítsuk teljes négyzetté! Ez a lépés a későbbiekben is hatékonynak bizonyul majd akkor, ha másodfokú kifejezések szélsőértékeit keressük.

$$f(x) = x^2 + 2x - 3 = (x + 1)^2 - 1 - 3 = (x + 1)^2 - 4.$$

A függvény grafikonja a 26. ábrán látható.



26. ábra

a) A függvény ott veszi fel a legkisebb értékét, ahol a négyzetes kifejezés a legkisebb, azaz 0. Ez $x = -1$ esetén teljesül. Ekkor a függvény minimális értéke: $f(-1) = -4$.

b) A $[0; 2]$ intervallumon a grafikon szigorúan monoton növekvő. A minimumát az $x = 0$-nál veszi fel, és ennek az értéke $f(0) = -3$. A maximuma $x = 2$-nél lesz, mégpedig $f(2) = 5$.

c) A $[-3; -2]$ intervallumon a függvény szigorúan monoton csökkenő, így a maximumát az intervallum bal oldali végpontjában, míg a minimumát a jobb oldali végpontban veszi fel. A maximum hely $x = -3$, értéke $f(-3) = 0$. A minimum hely $x = -2$, értéke $f(-2) = -3$.

2. példa

Egy 10 cm nagyságú szakaszt két részre osztunk, és a részek fölé négyzeteket rajzolunk. Mikor lesz a két négyzet területének az összege a legkisebb?

Megoldás

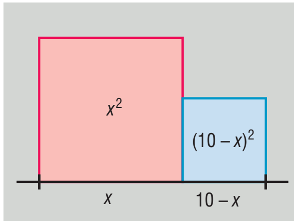
Jelöljük a 27. ábrának megfelelően az egyik négyzet oldalának a hosszát x-szel, ekkor a másik oldal hossza $10 - x$ lesz. Ekkor a négyzetek területének összege:

$$t(x) = x^2 + (10 - x)^2,$$

amely x-re nézve egy másodfokú függvényt határoz meg a $[0;\ 10]$ intervallumon. Ennek a minimumát keressük. Első lépésben alakítsunk teljes négyzetté:

$$t(x) = x^2 + (10 - x)^2 = x^2 + 100 - 20x + x^2 = 2(x^2 - 10x + 50) =$$
$$= 2[(x - 5)^2 + 25] = 2(x - 5)^2 + 50.$$

Ez a függvény az $x = 5$ helyen veszi fel a legkisebb értékét, azaz a 10 cm hosszú szakaszt éppen meg kell feleznünk, és két egyenlő nagyságú, egyenként 25 cm^2 területű négyzetet kell rajzolnunk rá.



27. ábra

3. példa

Két, egymásra merőleges úton a kereszteződés felé egyenletes sebességgel halad két kerékpáros. Egyszerre indultak, az egyik 30 km/h sebességgel 20 km távolságból, a másik 40 km/h sebességgel 10 km távolságból. Mikor és hol lesznek egymáshoz a legközelebb?

Megoldás

Legyen a keresett idő órában mérve x. Ekkor az egyik úton haladó kerékpáros $30x$ km-t tett meg, míg a másik kerékpáros által megtett út hossza $40x$ km lesz. ***(28. ábra)***

A két kerékpáros aktuális távolságát Pitagorasz tételének alkalmazásával számolhatjuk:

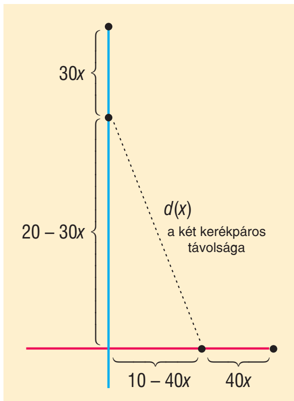
$$d(x) = \sqrt{(20 - 30x)^2 + (10 - 40x)^2}.$$

Ez a függvény a minimumát akkor veszi fel, amikor a következő függvény:

$$d^2(x) = (20 - 30x)^2 + (10 - 40x)^2.$$

Jelöljük ezt a függvényt $f(x)$-szel, és a négyzetre emelések után alakítsuk teljes négyzetté!

$$f(x) = 400 - 1200x + 900x^2 + 100 - 800x + 1600x^2 =$$
$$= 2500x^2 - 2000x + 500 = 2500\left(x^2 - \frac{4}{5}\cdot x + \frac{1}{5}\right) =$$
$$= 2500\left[\left(x - \frac{2}{5}\right)^2 + \frac{1}{25}\right] = 2500\left(x - \frac{2}{5}\right)^2 + 100.$$



28. ábra

A függvénynek $x=\frac{2}{5}$-nél lesz minimuma, azaz a két kerékpáros $\frac{2}{5}$ óra $=24$ perc múlva lesz legközelebb egymáshoz.

Ez a minimális távolság $\sqrt{100}=10$ km lesz. Ekkor a 40 km/h sebességgel haladó kerékpáros már áthaladt a kereszteződésen.

4. példa

A drágakövek ára egyenesen arányos a tömegük négyzetével. Egy 1 gramm tömegű követ, melynek az ára 100 euró, kettévágunk. Mennyire csökkenhet le így a drágakő értéke?

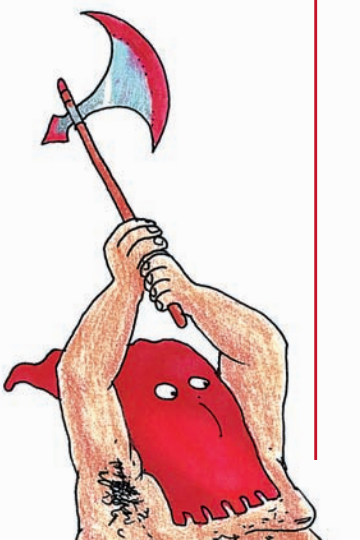
Megoldás

Legyen a keletkezett két kő tömege grammban mérve x, illetve $1-x$. Az adatok alapján megállapítható, hogy a két darab együttes értéke:

$$y(x)=100x^2+100(1-x)^2.$$

Ennek a kifejezésnek a minimumát keressük.

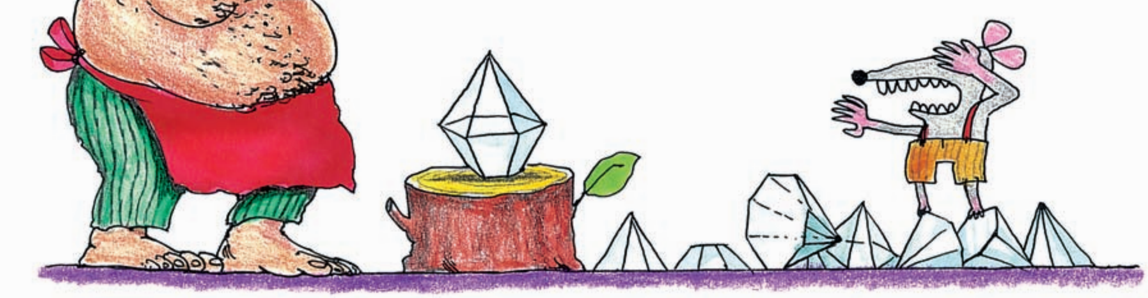
A műveleteket elvégezve, majd teljes négyzetté alakítva a következő másodfokú függvény adódik:



$$y(x)=100x^2+100(1-x)^2=$$
$$=100x^2+100(1-2x+x^2)=200x^2-200x+100=$$
$$=200(x^2-x)+100=200\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right]+100=$$
$$=200\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+50.$$

Mivel ennek a függvénynek a képe felfelé nyíló parabola, ezért minimuma van akkor, amikor a négyzetes tag 0, azaz $x=\frac{1}{2}$ esetén.

Ez azt jelenti, hogy az eredeti drágakő értéke akkor csökken a legnagyobb mértékben, amikor azt éppen félbevágjuk. Ekkor az összérték 50 euró lesz, azaz az eredeti árának éppen a fele.



***Összefoglalva:* A másodfokú kifejezések szélsőértékeinek meghatározásakor első lépésként teljes négyzetté alakítunk:**

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right] + c.$$

Ez a függvény az $x = -\frac{b}{2a}$ helyen veszi fel a szélsőértékét, s ennek értéke $-\frac{b^2}{4a} + c$ lesz.

Ez a szélsőérték minimum, ha $a > 0$, és maximum, ha $a < 0$.

Feladatok

1. Határozzuk meg a következő függvények szélsőértékeit!
a) $f(x) = x^2 - 4$; *b)* $g(x) = -x^2 + 2$; *c)* $h(x) = 2(x-1)^2 + 2$.

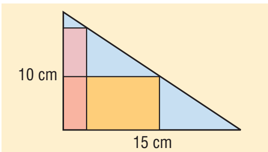
2. Állapítsuk meg a következő függvények szélsőértékeit a valós számok halmazán!
a) $f(x) = -x^2 - 2x - 4$; *b)* $g(x) = -2x^2 + 6x + 2$; *c)* $h(x) = 3x^2 - 2x + 2$.

3. Határozzuk meg az $x \mapsto 2x^2 + 4x - 6$ függvény szélsőértékeit, ha
a) $x \in \mathbb{R}$; *b)* $x \in [-3; -2]$; *c)* $x \in [-2; 1]$!

4. Adjunk meg olyan másodfokú függvényeket, amelyeknek minimuma van az
a) $A(1; 0)$; *b)* $B(-2; 2)$; *c)* $C(3; -5)$ pontban!

5. Adjunk meg olyan másodfokú függvényeket, amelyeknek maximuma van az
a) $A(0; -10)$; *b)* $B(2; -2)$; *c)* $C(4; -3)$ pontban!

6. Bontsuk fel a 30-at két szám összegére úgy, hogy a tagok négyzetösszege a lehető legkisebb legyen!



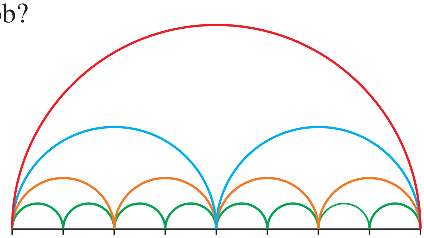
7. Egy 10 cm és 15 cm befogójú derékszögű háromszögbe az ábrának megfelelően téglalapokat írunk. Mekkorák lesznek az így beírt maximális területű téglalap oldalai?

8. Egy 20 cm hosszú szakaszt két részre osztunk, majd az egyes részek mint átmérők fölé félköröket rajzolunk. Legalább mekkora lesz a két félkör területének az összege?

9. A koordináta-rendszer két különböző tengelyén egy-egy bogár mozog az origó irányába. Az egyik az $A(40; 0)$ pontból indul és másodpercenként 4 egységet tesz meg. A másik a $B(0; 30)$ pontból és másodpercenként 2 egységet halad. Ha egyszerre indulnak, hány másodperc múlva lesznek egymáshoz a legközelebb?

Rejtvény

Hogyan változik a különböző színű vonalak hossza, ha a szakaszokat mindig felezzük, és félköröket rajzolunk rájuk?

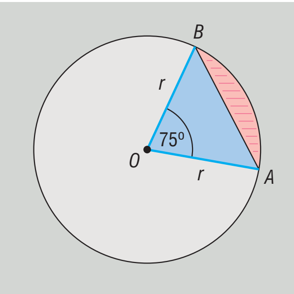


6. Síkbeli és térbeli számítások a szögfüggvények segítségével

Alábbiakban a szögfüggvények alkalmazására mutatunk néhány további példát.

1. példa

Számítsuk ki a 2 cm sugarú körben a 75°-os középponti szöghöz tartozó körszelet területét!



86. ábra

Megoldás

A 86. ábráról leolvasható, hogy a körszelet területe a megfelelő körcikk és középponti háromszög területének különbsége. Emlékeztetünk rá, hogy ha az r sugarú körben α a körcikk középponti szögének radiánban megadott nagysága, akkor a körcikk területe

$$t_{kc} = \frac{\alpha \cdot r^2}{2}.$$

Mivel $75° = 2\pi \cdot \frac{75°}{360°}$ rad $= \frac{5\pi}{12}$ rad, ezért

$$t_{kc} = \frac{\frac{5\pi}{12} \cdot 4}{2} \text{ cm}^2 = \frac{5\pi}{6} \text{ cm}^2.$$

Az ABO háromszög területe:

$$t_{ABO} = \frac{r^2 \cdot \sin 75°}{2} = 2 \cdot \sin 75° \text{ cm}^2.$$

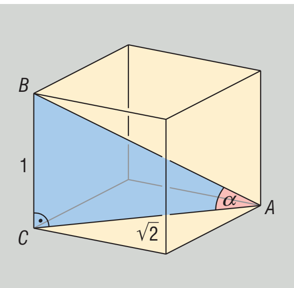
A körszelet területe:

$$t = t_{kc} - t_{ABO} = \frac{5\pi}{6} \text{ cm}^2 - 2 \cdot \sin 75° \text{ cm}^2 \approx 0{,}686 \text{ cm}^2.$$

Megjegyzés: A fenti gondolatmenethez hasonló módon bizonyítható, hogy az r sugarú kör radiánban mérve α nagyságú $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$ középponti szögéhez tartozó körszelet területe:

$$t = \frac{r^2}{2} \cdot (\alpha - \sin \alpha).$$

87. ábra



2. példa

Mekkora szöget zár be a kocka testátlója a végpontjából induló lapátlókkal?

Megoldás

Az egyszerűbb számolás végett legyen a kocka éle egységnyi hosszú. Ekkor Pitagorasz tételéből adódóan a lapátlók hossza $\sqrt{2}$. A 87. ábrán látható ABC derékszögű háromszög α hegyesszögére vagyunk kíváncsiak.

Mivel ebben a derékszögű háromszögben a két befogó ismert, ezért

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}7071,$$

$$\alpha \approx 35°16' \approx 35{,}27°.$$

3. példa

Mekkora szöget zárnak be egymással egy szabályos tetraéder lapsíkjai?

Megoldás

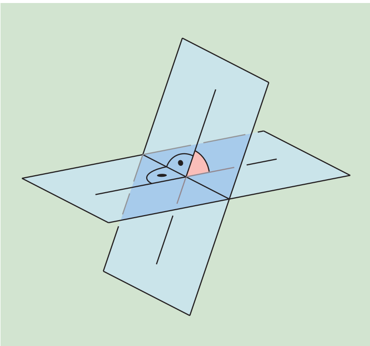
A kérdés megválaszolása előtt emlékeztetünk a **szabályos tetraéder** fogalmára, és definiáljuk, hogy mit értünk **két sík hajlásszögén.**

szabályos tetraéder

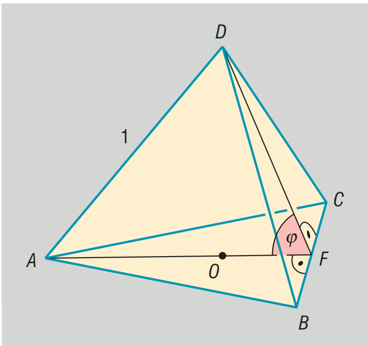
DEFINÍCIÓ: A *szabályos tetraéder* olyan háromszög alapú gúla, amelynek lapjai egybevágó szabályos háromszögek.

két sík hajlásszöge

DEFINÍCIÓ: Tekintsük a két sík metszésvonalának egy pontját! Állítsunk merőlegest a metszésvonalra ebben a pontban mindkét síkban! A *két sík hajlásszöge* ezen merőlegesek által bezárt szög. ***(88. ábra)***



88. ábra

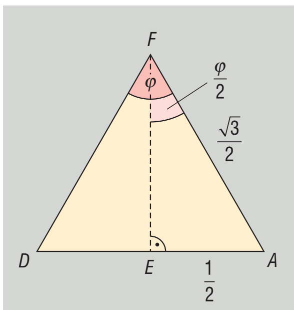


89. ábra

Az egyszerűbb számolás érdekében legyenek az $ABCD$ szabályos tetraéder élei egységnyi hosszúak. ***(89. ábra)***

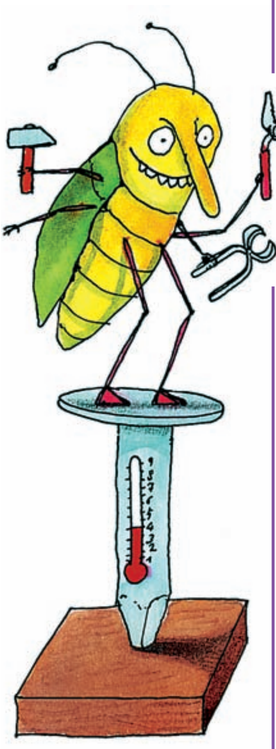
Ha F a BC él felezőpontja, akkor AF, illetve DF az ABC, illetve DBC szabályos háromszögek magasságai, ezért merőlegesek BC-re, és $AF = DF$. Így a fenti definíció értelmében az AFD egyenlő szárú háromszögben a szárak által bezárt φ szög nagyságára vagyunk kíváncsiak. Érdemes ezt a háromszöget külön is megrajzolnunk. ***(90. ábra)***

90. ábra



Pitagorasz tételét az ABF derékszögű háromszögre alkalmazva

$$AF = DF = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$



Az AFD háromszögben az alaphoz tartozó magasság felezi φ-t és AD-t, így ha E az AD él felezőpontja, akkor

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{AE}{AF} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}5774,$$

$$\frac{\varphi}{2} \approx 35°16',$$

$$\varphi \approx 70°32' \approx 70{,}53°.$$

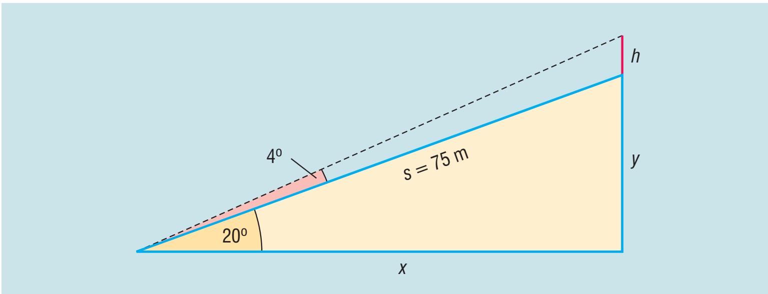
Mivel a tetraéder szabályos, ezért bármely két lapsíkja 70,53°-os szöget zár be egymással.

4. példa

Egy 75 m hosszú egyenes lejtős út aljáról az út felső végén levő emlékmű 4°-os szög alatt látszik. Milyen magas az emlékmű, ha a lejtő hajlásszöge 20°?

Megoldás

A 91. ábrán feltüntettük az adatokat is.



91. ábra

Először a lejtő méterben mért y emelkedését határozzuk meg.

$$\sin 20° = \frac{y}{75},$$

$$y = 75 \cdot \sin 20° \approx 75 \cdot 0{,}342 = 25{,}65 \text{ (m)}.$$

Hasonlóan adódik, hogy a lejtő aljának az emlékműtől vett x „vízszintes távolsága”:

$$x = 75 \cdot \cos 20° \approx 75 \cdot 0{,}9397 \approx 70{,}48 \text{ (m)}.$$

Így az emlékmű h magasságára nézve

$$\operatorname{tg} 24° = \frac{y+h}{x},$$

$$h = x \cdot \operatorname{tg} 24° - y \approx 70{,}48 \cdot 0{,}4452 \text{ m} - 25{,}65 \text{ m} \approx 5{,}73 \text{ m}.$$

Tehát az emlékmű közelítően 5 méter 73 centiméter magasságú.

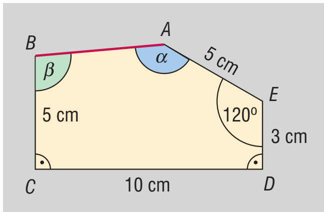
Feladatok

1. Egy körlapból kivágjuk a lehető legnagyobb szabályos
a) hatszöget; *b)* nyolcszöget; *c)* tízszöget; *d)* tizenkétszöget.
Hány százaléka a hulladék területe a körlap területének az egyes esetekben?

2. Egy szabályos négyoldalú gúla (alaplapja négyzet, oldallapjai egyenlő szárú háromszögek) alapéle 1 cm, oldaléle 2 cm hosszú. Számítsuk ki
a) a szomszédos odalélek; *b)* a szemközti oldalélek
szögének nagyságát!

3. Egy szabályos hatoldalú gúla (alaplapja szabályos hatszög, oldallapjai egyenlő szárú háromszögek) alapéle 4 cm, oldaléle 6 cm hosszú. Mekkora
a) az alaplap és egy oldallap; *b)* két szomszédos oldallap
által bezárt szög?

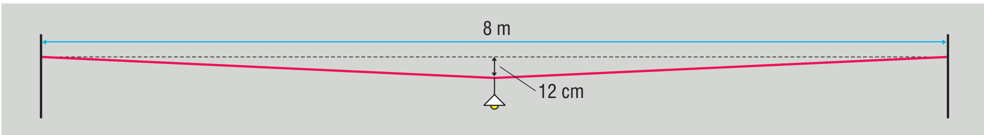
4. Számítsuk ki az ábrán látható ötszög *AB* oldalának hosszát és ismeretlen belső szögeinek nagyságát!



5. Mekkora szögben esnek a Nap sugarai a földre, ha egy villanyoszlop árnyéka
a) kétszer; *b)* háromszor; *c)* ötször
akkora, mint az oszlop?

6. Egy hegy *C* csúcsát a hegy lábánál levő *A* pontból a vízszinteshez képest 60º-os szög alatt látjuk. Ha az *A* pontból a vízszintessel 30º-os szöget bezáró egyenes úton 1 km-t megyünk, akkor olyan *B* pontba jutunk, amelyre $CBA\sphericalangle = 135°$. Milyen magas a hegy?

7. Egy utcai lámpa két felfüggesztési pontjának távolsága 8 m. A lámpa a távolság felezőpontjában függ, belógása 12 cm. Milyen hosszú a huzal, és mekkora a vízszintessel bezárt szöge?



8. Milyen hosszúak a hegyeszögek belső szögfelezőinek háromszögbe eső szakaszai abban a derékszögű háromszögben, amelynek átfogója 4 cm hosszú, és az egyik hegyesszög nagysága
a) 45º; *b)* 60º; *c)* 75º; *d)* 40º; *e)* 27º30’; *f)* α?