# A FIZIKA tanítása

MÓDSZERTANI FOLYÓIRAT

2013/2

MOZAIK

# A FIZIKA TANÍTÁSA

módszertani folyóirat

**Szerkesztőség:**

Főszerkesztő:
Bonifert Domonkosné dr.
főiskolai docens

A szerkesztőbizottság:
Dr. Kövesdi Katalin
főiskolai docens

Dr. Molnár Miklós
egyetemi docens

**Szerkesztőség címe:**
6723 Szeged, Debreceni u. 3/B
Tel.: (62) 470-101,
FAX: (62) 554-666

**Kiadó:**
MOZAIK Kiadó Kft.
Felelős kiadó: Török Zoltán
Tördelőszerkesztő: Forró Lajos
Borítóterv: Szőke András




# TARTALOM




Közlési feltételek:

A közlésre szánt kéziratokat gépelve (két példányban), floppy lemezen vagy e-mailen (kattila@mozaik.info.hu) küldjék meg a szerkesztőség címére. A kéziratok lehetőleg ne haladják meg a 8-10 gépelt oldalt (oldalanként 30 sorban 66 leütés). A rajzokat, ábrákat, táblázatokat és fényképeket külön lapon megfelelő szövegezéssel kérjük ellátni. (A szövegrészben pedig zárójelben utaljanak rá.)

Kérjük, hogy a szövegbeli idézetek név- és évszámjelöléssel történjenek, míg a tanulmányok végén a felsorolt irodalom alfabetikus sorrendben készüljön. Kérjük szerzőtársainkat, hogy a kéziratok beküldésével egyidejűleg szíveskedjenek közölni pontos címüket, munkahelyüket és beosztásukat. A cikk megjelenése után a lemezeket visszaküldjük.

FÓKUSZ

Nagy Mária – Dr. Radnóti Katalin

# A Boltzmann-eloszlás középiskolai feldolgozásának lehetőségei I. rész

A statisztikus fizika témakörének feldolgozása kikerült a középiskolai tananyagból, pedig **szemléletesen, analógiákkal tárgyalva sok diák fantáziáját felvillanyozhatná. A téma feldolgozása azért is ajánlható, mert kapcsolatot teremt a fizika és a kémia világa között.**

**Jelen írásunkban arra teszünk javaslatot, hogy bizonyos elemek miként kerülhetnének sorra a Statisztikus fizika témaköréből például a fakultációs órákon, tehetséggondozás keretében.** Tanulmányunkban bemutatunk egy lehetőséget arra, miként juthatunk el a Boltzmann-eloszlás felírásához és annak tanulmányozásához középiskolások számára ideális mélységben, melyet iskolai környezetben ténylegesen ki is próbáltunk.

A fizikát emelt szinten tanuló, illetve reáltagozatos tanulók esetében a **fizikai fogalmak kialakításához** használhatjuk **eszközként** a matematikát, így segítve a mélyebb megértést, a fizikai fogalmak **megkonstruálását.** E módszer nagyon fontos eredménye az is, hogy így biztosíthatjuk diákjainknak az egyetemi előadások megértéséhez és a gyakorlatokon való eredményes szerepléshez szükséges mélységű alapozást. Javasolt témáink feldolgozásán keresztül **a diákok tanulási folyamatait elősegítve a középiskola és az egyetem közti nagy szintkülönbséget is igyekszünk áthidalni,** hogy az egyetemre bekerülve minél kevesebb problémájuk legyen.

Jelen írásunkban egy témakör emelt szinten történő feldolgozását, annak szakmódszertani reprezentációját 8 szakaszra bontottuk:

1. Matematikai formulák és azok magyarázata
2. Fogalmi váltások, fogalomrendszer
3. Jelenségek, jelenségértelmezés
4. Jelenségmagyarázat
5. A jelenségek mindennapi életben való megnyilvánulása és a történetiség
6. Problémamegoldás
7. Szintetizálás
8. Értékelés

A fenti szakaszok alkalmazását a Boltzmann-eloszlással kapcsolatos tananyagjavaslatunk feldolgozásának példáján keresztül mutatjuk be.

Terjedelmi okok miatt tanulmányunkat három részre bontottuk. Az első részben az első két szakasz ismertetése szerepel; a másodikban a harmadik, negyedik és ötödik szakasz; az utolsó részben pedig a hatodiktól nyolcadik szakaszig mutatjuk be a feldolgozási fázisokat.

## 1. Matematikai formulák és azok magyarázata

A feldolgozás első részében bemutatjuk a diákok számára az adott tananyagrészhez tartozó legfontosabb matematikai formulát/formulákat, s amennyire a középiskolás emelt szintű matematika tananyag mélysége engedi, részletesen megtárgyaljuk azok magyarázatát.

Az első szakasz elemei a jelenlegi téma esetében:
– A Boltzmann-eloszlás/energiaeloszlás felírása
– A matematikai formula értelmezése

**A statisztikus fizika energiaeloszlása/ a Boltzmann-eloszlás:**

$$N(\varepsilon) = N(0) \cdot e^{-\varepsilon/kT}$$

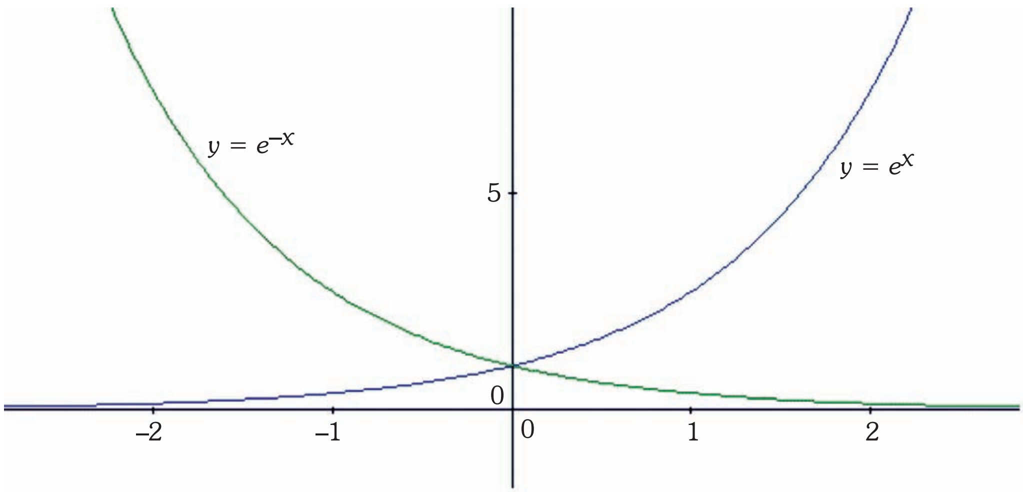
A statisztikus fizika a hőtan (termodinamika) jelenségeit tárgyalja mikroszkopikus – részecskesokaság szemléletű – felfogásban. A fizika, kémia iránt érdeklődő diákok számára talán sokkal érthetőbbé is válik a termodinamika, ha e szemlélet felhasználásával is foglalkozunk a témával.

**Az exponenciális függvény:** a matematikában az exponenciális függvény az egyik legfontosabb függvény. Nagy jelentőséggel bír az elméleti matematikában, a természeti jelenségek leírásában, de a közgazdaságtanban és sok egyéb alkalmazási területen is. A következőkben röviden összefoglaljuk, hogy miként érdemes a fizika fakultáción kiegészíteni a tanulók matematikai tudását az exponenciális függvényekkel kapcsolatban, feltételezve, hogy többen emelt szintű matematikát is tanulnak. Itt tananyag a differenciál- és integrálszámítás alapelemei, melyek sajnálatos módon már több, mint három évtizede nem képezik részét a normál matematika tananyagnak, komoly problémákat okozva ezzel többek közt a fizika, de valójában a többi természettudományos tantárgy tanítása számára is.

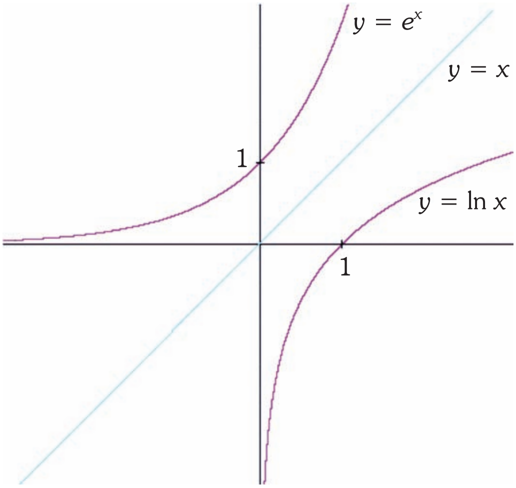
A matematikában névelővel **az exponenciális függvénynek** nevezzük az $e$ alapú $y = e^x$ alakú függvényeket *(1. ábra)*. Ez valós $x$ változókra értelmezett függvény. A függvény görbéje mindig az $x$ tengely felett helyezkedik el (pozitív értékeket vesz fel). Szigorúan monoton növekszik. Soha nem érinti az $x$ tengelyt, de tetszőlegesen megközelíti azt; ezt úgy szoktuk kifejezni, hogy az $x$ tengely a függvény vízszintes asszimptotája.

Inverz függvénye (azaz az $x = y$, a 45° meredekségű egyenesre vett tükörképe) a természetes alapú logaritmus függvény ($\ln x$), mely az összes pozitív $x$-re értelmezve van *(2. ábra)*.

**Általánosabban** szoktuk használni az exponenciális függvény fogalmát, kiterjesztjük a $k \cdot a^x$ alakú függvényekre *(3. és 4. ábra)*. Itt $a$ az alap, $a\ (> 0) \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$. Ha az alap reciprokát (azaz –1. hatványát) vesszük, a függvény grafikonjának $y$ tengelyre vett tükörképét kapjuk.




*1 ábra*




*2. ábra*

Az általánosabb, $a$ alapú exponenciális függvények formulája a logaritmus segítségével adható meg: $a^x = (e^{\ln a})^x$. Mellesleg adható $e^x$-től független definíció is. *(3., 4. ábra)*

**Az exponenciális függvény alapvető tulajdonságai**

– Állandó mértékben többszöröződik.
– Például: speciális kémiai vegyület (baktérium), mely duplázódik időközönként.
– A fenti formula $a = e$-re is igaz:

$$e^x = \left(e^{\ln e}\right)^x = e^{x \ln e} = e^{x \cdot 1} = e^x.$$

**A függvény néhány további tulajdonsága azonosságok formájában *a*, *b* > 0**, **$a, b \in \mathbb{R}$ esetén:**

$\boxed{a^0 = 1}$ $\boxed{a^1 = a}$

$$\boxed{a^{x+y} = a^x \cdot a^y}$$

$$\boxed{a^{x \cdot y} = (a^x)^y}$$

$$\boxed{a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x}$$

$$\boxed{\frac{1}{a^x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x = a^{-x}}$$

Tudjuk, hogy az exponenciális jelölés bevezetésével a törtet és gyökvonást tartalmazó kifejezések egyszerűbbé tehetők, $a > 0$, $a, b \in \mathbb{R}$, $n > 1$:

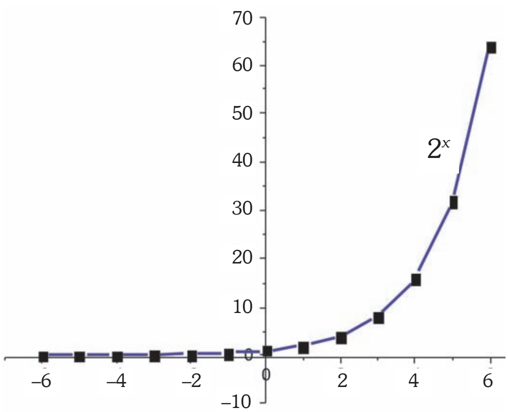
$$\boxed{\frac{1}{a} = a^{-1}}$$

$$\boxed{\sqrt[n]{a^b} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^b = a^{b/n}}$$

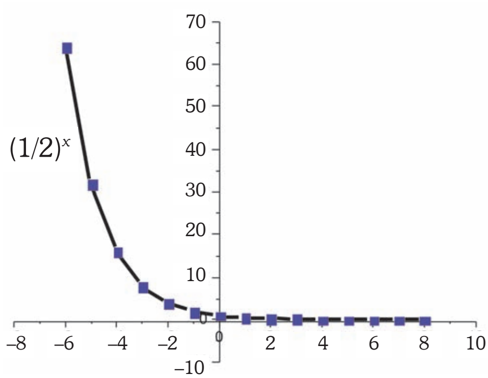
**A függvény deriválása és definíciója**

– **Deriváltja „saját maga”:** $(e^x)' = e^x$, tehát:
 - A görbe meredeksége minden pontban megegyezik a függvény adott pontbeli értékével: $y'(x) = f(x)$.
 - A függvény növekedésének mértéke x -nél egyenlő a függvény x helynél való értékével: $d/dx(f(x)) = f(x)$.
 - A függvény kielégíti az $y = y'$ differenciálegyenletet.

– Pontosan a $c \cdot e^x$ alakú ($c$ konstans) függvényekre (ezekre és csak ezekre) igaz ez a tulajdonság.




*3. ábra*




*4. ábra*

– Tehát az egyetlen függvény, mely konstanssal való szorzás erejéig önmaga deriváltja, és így önmaga primitív függvénye ($C$ konstans) az $e^x$ exponenciális függvény:

$$\boxed{(e^x)' = e^x} \qquad \boxed{\int e^x dx = e^x + C}$$

– Tetszőleges alapú exponenciális függvény deriváltja egyenlő egy konstansnak magával a függvénnyel vett szorzatával ($a = e$ esetben a konstans $= 1$):

$$\boxed{\frac{d}{dx}a^x = (a^x)' = (\ln a)a^x}$$

**– Az exponenciális függvény definíciója végtelen sor összegével:**

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots =$$

$$= \frac{1}{0!} + x\left(\frac{1}{1!} + x\left(\frac{1}{1!} + x\left(\frac{1}{2!} + x\left(\frac{1}{3!} + \ldots\right)\right)\right)\right)$$

**Az Euler-féle szám:** $e$

– A matematika egyik legfontosabb állandója, amely a természetes logaritmus alapját képzi.
– Irracionális és transzcendens szám.
– Értéke a 29. tizedesig jelölve:
$e = 2{,}718\,281\,828\,459\,045\,235\,360\,287\,471\,35\ldots$
– Elnevezés: Leonhard Euler matematikus után, de a logaritmus függvény megalkotójának tiszteletére (John Napier skót matematikus) *Napier-állandóként* is ismert.
– Definíció végtelen sor összegével:

$$e = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots$$

– Az $e$ pozitív valós számra teljesül, hogy:

$$\boxed{\begin{aligned}&\int_1^e \frac{1}{t}dt = \xrightarrow{\text{Newton–Leibnitz–szabály}} = \\ &= [\ln t]_1^e = \ln e - \ln 1 = 1 - 0 = 1.\end{aligned}}$$

## 2. Fogalmi váltások, fogalomrendszer

Az adott témakörhöz tartozó matematikai formula (formulák) valamilyen fizikai fogalmak közti kapcsolatot ír le. **A téma feldolgozásához szükséges fogalmak bevezetését úgy kezdjük el, hogy felmérjük diákjaink előzetes tudását. Ennek eredménye alapján tervezzük meg a tényleges tanulási/tanítási folyamatot, az esetlegesen szükséges megfelelő fogalmi váltásokat.**

A feldolgozás menete:
– Prekoncepciók (előzetes tudás) felmérése
– Hőmérséklet fogalma
– Reverzibilis és irreverzibilis folyamatok
– Valóságos folyamatok
– Statisztikus fizika alapgondolata
– Állapotjelzők fogalomköre
– A termodinamika II. főtétele
– Kváziegyensúly fogalma
– Boltzmann-eloszláshoz szükséges és fontos fogalom: a mikroeloszlások

### Hőmérséklet fogalma

**1/a.** A hőmérséklet a testek termikus állapotát leíró fizikai mennyiség *(5. és 6. ábra)*. Hőmérővel mérjük *(7. ábra)*.

*5. ábra*

*6. ábra*

*7. ábra*

**1/b.** A gázoknál a hőmozgással kapcsolatos belső energia egyenlő a részecskék rendezetlen mozgásából származó mozgási energiák összegével.

$E_b = N \cdot (f/2) \cdot k \cdot T$

A hőmérséklet növekedése a részecskék intenzívebb hőmozgását eredményezi. Magasabb hőmérsékleten nagyobb a részecskék átlagsebessége, így áltagos mozgási energiája is.

**2.** A hőmérséklet az a mennyiség, mely az anyaghalmazok energialeadó képességét számszerűen jellemzi. Önmagától az az anyaghalmaz ad át $Q$ energiát a másiknak, amelyiknek nagyobb a $T$ hőmérséklete. Ez utóbbi hőmérsékletdefiníció matematikai alakja:

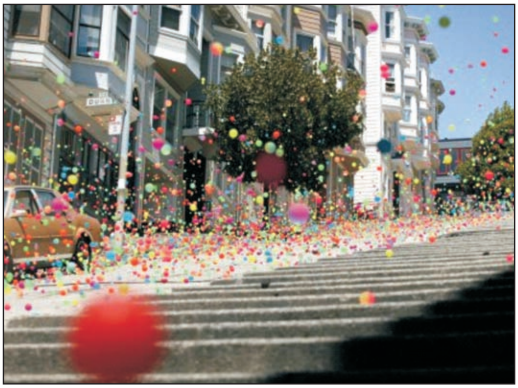
$$\boxed{T = \frac{Q}{k \cdot \Delta \ln Y} = \frac{Q}{\Delta S}}$$

**Reverzibilis és irreverzibilis folyamatok**

Némely valóságos folyamat (közelítőleg) ugyanúgy néz ki, ha azokat videóra felvéve természetes időben, illetve visszafelé tekerve játszszuk le. Ilyen például

- a labda pattogtatása talajon *(8. ábra)*,
- a hintázás *(9. ábra)*,
- az inga lengése a kilendítéstől néhány periódusidőn keresztül nézve *(10. ábra)*,
- a légpárnás sínen vagy sima talajon a két oldalütköző közt oda-vissza haladó kocsi mozgása,
- két kiskocsi, vagy két fonálra függesztett, vagy asztalon lévő golyó (centrális) teljesen rugalmas ütközése *(11. és 12. ábra)*,
- felfelé hajított labda fel-le mozgása stb.

Azokat a folyamatokat, melyek akkor is reálisnak tűnnek, ha videón visszafelé játsszuk le eredeti sebességgel, **reverzibilis – azaz időben megfordítható –** folyamatoknak nevezzük.

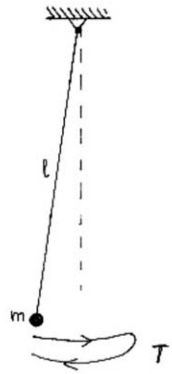


*8. ábra*

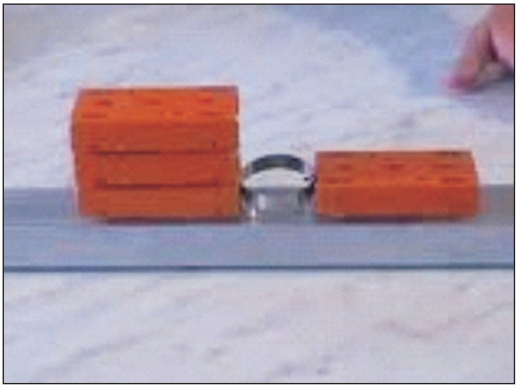
*9. ábra*

A legtöbb folyamat azonban **időben nem megfordítható, azaz irreverzibilis.** Ilyenek azok a termodinamikai folyamatok, melyek csak egy irányban játszódnak le. A rugalmatlanul ütköző testek mozgását *(13. és 14. ábra)* videóra véve nem ugyanazt látjuk, ha visszafelé játsszuk le a filmet. Az asztalon ellökött test megáll, s nem indul el magától visszafelé. Ha egy visszafelé pörgetett felvételen mégis ezt látjuk, meghökkenve keressük a turpisságot, nem érezzük természetesnek a jelenséget. Világképünk szerint lehetetlen, ahogyan egy gáz tágulása utáni spontán összehúzódása is nonszensz. Nem is valósul meg a természetben.

A reverzibilis és irreverzibilis folyamatok markánsan elhatárolhatók egymástól. Azaz **egyértelműen eldönthető,** hogy mely folyamatok azok, amelyek kizárólag egyetlen irányban játszódhatnak le.




*10. ábra*



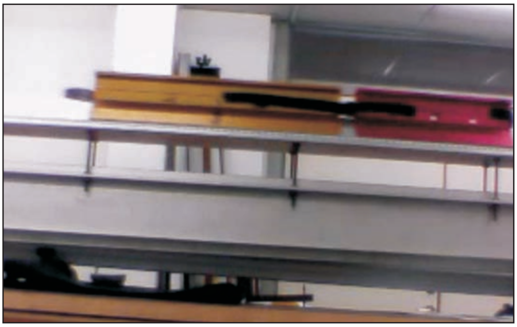
*11. ábra*

*12. ábra*

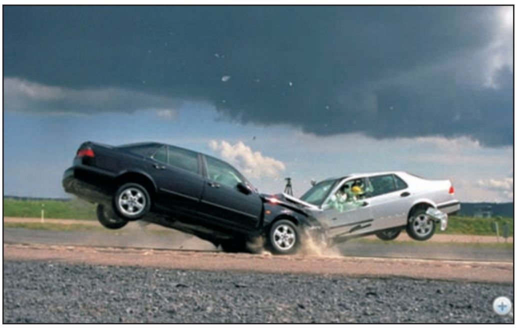
**Valóságos folyamatok**

Ténylegesen az inga és a hinta lengése sem mondható reverzibilis folyamatnak, mert az ingára hat a légellenállás, így idővel csillapodik a lengése, és végül megáll. A hinta is ugyanezt teszi, ha a hintázó gyerek nem hajtja folyamatosan a lábával.

**Földi természetes környezetben nem létezik teljesen reverzibilis folyamat,** mivel mindig van légellenállás, súrlódás. Például



*13. ábra*



*14. ábra*

egy cérnán lengő gomb mozgása idővel leáll, az ingatest szétszórja a környező levegő és a cérna molekuláira (azaz sok szabadsági fokra) energiáját, s az újonnan energiát kapott részecskék **hevesebben mozognak.**

Kényszerrezgés esetén a testre az egyensúlyi helyzetébe visszatérítő erőn és a fékező erőhatásokon kívül egy periodikusan változó külső erő is hat, folyamatosan pótolva a szétszórt energiát, így tartva fenn az állandó lengést.

**Valóságos folyamatoknál viszont anyaghalmazaink (a testek) nagyon sok komponensből (atomokból és molekulákból) állnak,** *a sokelemű anyaghalmazok folyamatait pedig örökösen irreverzibilisnek észleljük.*

**Jó közelítéssel azonban** találunk a valóságban reverzibilisnek mondható folyamatokat is (ld. fenti példák).

### A statisztikus fizika alapgondolata

Ebben a szemléletben a világ nagyon nagy számú elemi összetevőinek, pl. az atomoknak **„teljesen rendszertelen”** viselkedését feltételezzük. A hőtan témakörét **mikroszkopikus (részecskesokaság)** nézőpontból tárgyaljuk.

Ez az új, a mechanikától igencsak eltérő szemlélet a molekuláris hőelméletre építkezett. Az új megközelítéssel a sok atomból, molekulából álló komplex anyaghalmazok, a részecskesokaság fizikája, viselkedése leírható. Megadható, miként alakul a gáz sűrűsége, nyomása vagy egy test hőmérséklete stb.

Az új nézőpont teszi **lehetővé azt is, hogy megmondjuk a sokelemű halmazok folyamatainak potenciális irányát, az események kronologikus sorrendjét.**

### Állapotjelzők

Különböző fizikai mennyiségek (nyomás *(p)*, sűrűség *(ρ)*, részecskeszám *(N)*, anyagmennyiség *(n)*, s hozzájuk hasonlóan a térfogat *(V)*, a tömeg *(m)* stb. az állapotjelző gyűjtőnevet kapták. Ezek olyan mérhető mennyiségek, melyek **egy anyaghalmaz egészére jellemzőek,** s így leírják annak állapotát, változásaik pedig a rendszer megváltozását.

Kétféle állapotjelző van. Ha két rendszert egyesítünk, némelyiket **intenzívnek** (kiegyenlítődő), másokat **extenzívnek** (összeadódó) tapasztalunk. Előbbire példa a nyomás *(p)* és a hőmérséklet *(T)*, utóbbira az anyagmennyiség *(n)*, a részecskeszám *(N)*, a tömeg *(m)* és a térfogat *(V)*.

### A termodinamika második főtétele

Az állapotjelzők és a korábban említett megfordíthatóság szemszögéből is megragadhatjuk a rendszerek viselkedését. **Azt, hogy egy folyamat magától milyen irányban játszódhat le, a termodinamika második főtétele határozza meg.** A második főtétel **alaptörvény,** ellenpéldát még senki sem talált.

A folyamatok irányáról szóló egyik megfogalmazás szerint „a környezetüktől elszigetelt (zárt) rendszerekben önmaguktól kizárólag olyan irányú folyamatok játszódhatnak le, melyek közelebb viszik a rendszert egyensúlyi állapotához”. Ez **ekvivalens a zárt rendszer intenzív állapotjelzőinek kiegyenlítődésre való törekvésével.**

A melegebb test felől áramlik a hő a hidegebb test felé, hiszen csakis így tud a hőmérsékletük kiegyenlítődni.

A gáz szabad tágulásakor a teljes tér kitöltésére „törekszik”, mivel csupán így egyenlítődhet ki a tartály két felében uralkodó nyomás. A folyamatban a gáz **rendezetlenebbé** is lesz, hisz a molekulák nagyobb térrészben szóródhatnak szét.

A termodinamika második főtételének egy másik interpretációja, hogy „a magukra hagyott rendszerekben kizárólag olyan folyamatok játszódhatnak le, melyek a rendszerben a rendezetlenséget, a véletlenszerűséget növelik”. A rendezetlenség mértékét az **entrópia (*S*)** adja meg. Minél rendezetlenebb egy anyaghalmaz, annál nagyobb az entrópiája.

Mikor előbbi példánkban a melegebb test felől áramlik hő a hidegebb test felé hőmérsékletük kiegyenlítődése érdekében, akkor a kezdetben melegebb test belső energiája csökken, míg a hidegebbé nő. A hőmérséklet-kiegyenlítődéskor **az eredetileg melegebb test részecskéinek intenzívebb mozgása alábbhagy, míg az eredetileg hidegebb test részecskéi felgyorsulnak.** Ez a rendezetlen részecskemozgás az, ami kapcsolatban van a belső energiával a részecskék mozgási energiájának révén. Termikus kölcsönhatáskor a résztvevő testek hőmérséklete kiegyenlítődik.

**A véletlenszerű kimenetellel járó folyamatokról elmondhatjuk, hogy sokelemű halmazokban mennek végbe.** S lévén **a véletlenszerű kimenetellel járó folyamatok irreverzibilisek,** e két tény összekapcsolásából adódik, hogy **megfordíthatatlan folyamatok a sokelemű halmazokban játszódnak le.** Azaz eljutottunk ugyanahhoz az állításhoz, amit korábban tettünk *(„a sokelemű anyaghalmazok folyamatait pedig örökösen irreverzibilisnek észleljük”).*

Egyszerűbben megfogalmazva ebből adódik az átlagos gimnáziumi tankönyvekben szereplő második főtétel: „A testek termikus kölcsönhatásakor mindig a melegebb test ad át energiát a hidegebb testnek. (Nem is tudnánk elképzelni ennek ellenkezőjét.) Az energiacsere folyamatának ez az iránya – magától, külső beavatkozás nélkül – nem megfordítható.” Tehát a termikus kölcsönhatások során lejátszódó folyamatok mindig irreverzibilisek.

**Kváziegyensúly fogalma**

**A testek mechanikai mozgási energiája haladó vagy forgó mozgás esetén a test részecskéinek valamilyen formában rendezett kinetikus energiákból áll össze.** Ha súrlódó közegben mozog a test, ez a mozgási energia teljes mértékben belső energiává alakulhat a rendezetlen hőmozgás energiáját növelve. Ezt szokták úgy mondani, hogy **„a mechanikai energia hővé szóródik szét”.** Fordított folyamat viszont nem valósulhat meg. **Gyakorlatilag nulla a valószínűsége minden atom spontán és szimultán egy irányban történő rendezett mozgásának.** Azaz a belső energia nem alakulhat vissza teljes egészében mechanikai energiává.

Tehát megállapítottuk, hogy **nincs teljes mértékben reverzibilis folyamat.**

De az első példákból látszik, hogy van értelme olyan **idealizált** esetekkel foglalkozni, amik teljes mértékben reverzibilisnek tekinthetők.

Akkor jelenthetjük ki, hogy **egy rendszerben abszolút reverzibilis folyamat megy végbe, ha a rendszer permanensen nagyon közel van a termodinamikai egyensúlyhoz önmagán belül nézve és környezetével is egyúttal.**

Tehát *a reverzibilis folyamatok egyensúlyi folyamatok.* Például ha két egymáshoz nagyon közeli hőmérsékletű test lép termikus kölcsönhatásba, akkor valamelyikük hőmérsékletét csak nagyon kicsit kell megváltoztatnunk ahhoz, hogy a folyamat az ellenkező irányban játszódjon le. Másik példa, ha egy gáz adiabatikusan (hőcsere nincs a környezettel), nagyon lassan tágul ki, akkor a külső nyomás nagyon kis növelésével öszsze is nyomható a gáz. Azaz az előbbiek megfordíthatónak mondható folyamatokat jelölnek.

A valóságban persze irreverzibilis folyamat a véges hőmérséklet-különbség hatására bekövetkező hőcsere, a gáz szabad tágulása stb. Nem lehet megfordíthatóvá tenni a jelenséget a körülmények árnyalatnyi módosításával.

**Ellentmondáshoz jutottunk,** mivel egy rendszerben ahol termodinamikai egyensúly van, nem fog lejátszódni semmilyen állapotváltozás; a rendszer nem vesz részt hőcserében, hiszen benne mindenhol azonos a hőmérséklet. Az imént viszont az szerepelt, hogy *„a reverzibilis folyamatok egyensúlyi folyamatok”* (egyensúlyi rendszerben mennek végbe). Például mikor egy gáz dugattyúval ellátott edényben van, nem fog a dugattyú semmilyen irányban elmozdulni, ha a dugattyú két oldalán a külső és belső nyomás megegyezik, azaz mechanikai egyensúly van.

Az **ellentmondás feloldását** az adja, hogy a reverzibilis folyamat fogalma idealizált, a valóságban egészen pontosan sosem zajlik le ilyen procedúra.

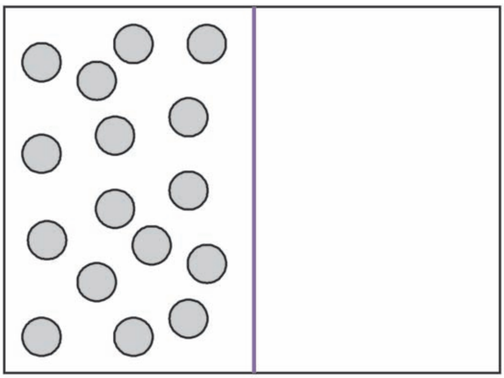
De tudunk kreálni nagyon csekély hőmérséklet- és nyomáskülönbséget, amikor is rendkívül közel tarthatjuk a rendszert az egyensúlyhoz.

**A kváziegyensúlyi folyamatok a majdnem egyensúlyi folyamatokat jelentik.** Ezen fogalom bevezetése is nyomatékosítja a megfordítható folyamatok idealizált mivoltát. A most megkonstruált elnevezés azért fontos, mert tudjuk, hogy minden, a hőtanban megismert folyamat (izochor, izobár, izoterrm és adiabatikus) **kváziegyensúlyi állapotokon keresztül** valósulhat meg. A folyamatokat leíró diagramok (pl. $p$–$V$-görbék) összes pontja a rendszer valamilyen egyensúlyi állapotával ekvivalens, tehát **a görbe egy kváziegyensúlyi folyamatot ír le.**

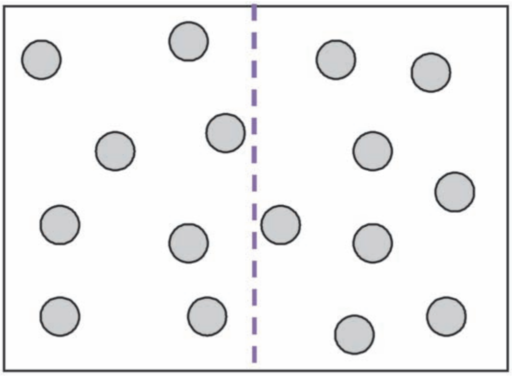
**A Boltzmann-eloszláshoz szükséges és fontos fogalom: a mikroeloszlások**

A **mikroeloszlás** fogalma olyan részletesen jellemzett állapotokat jelöl, melyek egyenlő valószínűséggel valósulnak meg.

Tegyük fel, hogy van egy molekulákat tartalmazó tartály, mely eredetileg két azonos térfogatú részre van osztva *(15. ábra)*. Amennyiben az elválasztófalat kivesszük, a molekulák szabadon röpködnek szét a teljes térben *(16. ábra)*.



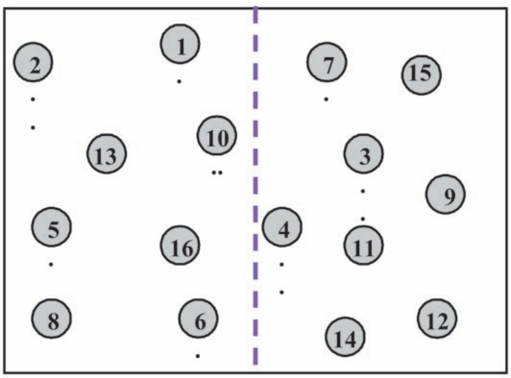
*15. ábra*



*16. ábra*

A rendszertelenül röpködő molekulák bármelyike ugyanakkora valószínűséggel található a tartály jobb, ill. bal felében, hiszen vagy a bal, vagy a jobb felében vannak a tartálynak (50% = 1/2 a valószínűsége, hogy a bal oldaliban van egy molekula, és 50% = 1/2 a valószínűsége, hogy a jobb oldaliban van). Minden egyes molekulát úgy tudunk szemmel követni, ha gondolatban megszámozzuk azokat *(17. ábra)*. Ekkor meg tudjuk mondani, hogy melyik molekula éppen a tartály melyik felében van.

*Az előbbi beszámozásos módszer és a részecskék (elemek) külön-külön tekintése a diákok számára ismerős lehet a 9.-es matematikai tanulmányokból. Ez nem más, mint kombinatorika. N molekula térbeli elhelyezkedését (tehát, hogy melyik molekula van a bal, ill. jobb féltartályban) kell megadni annak figyelembe*



*17. ábra*

*vételével, hogy a molekulák különböznek (lévén számozottak). Megnézzük, hogy az 1. részecske hol van: vagy a bal, vagy a jobb oldalon van, ez 2 lehetőség.*

*A 2. részecske esetében is ugyanígy gondolkodunk: vagy a jobb oldalon van, vagy a bal oldalon van, ami megint 2 lehetőséget ad.*

*Ez mindvégig így megy az N-edik részecskéig.*

*Mivel az összes részecske elfér akár csak az egyik oldalon felhalmozódva is, az egyes részecskére vonatkozó döntések függetlenek. Így a lehetőségek számát össze kell szorozni.*

*Tehát a rendszerre nézve* $2 \cdot 2 \cdot \ldots\ldots \cdot 2$ *(N db 2-es) =* $2^N$ *lehetőség van. Ugyanannyi, mint ahány részhalmaza van egy N elemű halmaznak.*

**A molekulák rendszertelenül mozognak. Ennek a következménye az, hogy az egyes molekula-eloszlások egyenlő valószínűek.**

Példán szemléltetve: $\text{valószínűség}_{\text{A eset}}$ *(18. ábra)* = $\text{valószínűség}_{\text{B eset}}$ *(19. ábra).*

A eset:

az 1. molekula a bal oldali térrészben van,
a 2. a balban,
a 3. a jobban,
…,
a 10. a balban,
…,
az *N*. (= 16.) a balban.

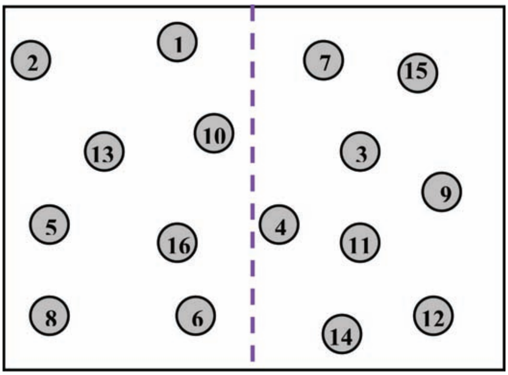
B eset:

az 1. molekula a bal oldali térrészben van,
a 2. a balban,
a 3. a balban
…,
a 10. a jobban,
…,
az *N*. (= 16.) a balban.

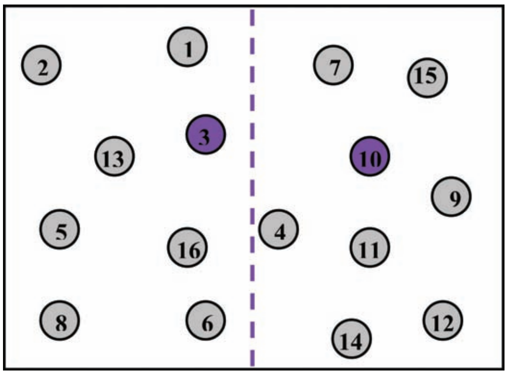
Itt A és B esetben 2 molekulát cseréltünk fel (a 3-ast és 10-est), az összes többit pedig az eredeti térfélen hagytuk.

Persze **igazából** nem fontos, hogy egy gázban külön-külön melyik molekula „mit csinál” éppen, hol helyezkedik el, **csak egészében fontos az elhelyezkedés,** mely megadja a gáz **sűrűségét.** Tehát érdekes az lesz, hogy hány molekula tartózkodik egy adott térrészben (mondjuk a tartály bal felében), de az nem, hogy konkrétan melyek az itt tartózkodó részecskék. Ugyanaz lesz a sűrűség a bal féltartályban akkor, ha az 1., 2., és 3. molekula van ott, mint akkor, ha a 2., 5. és 256987-edik. Szóval a molekulák megszámozására a gyakorlatban nincs szükség, de az előbbi magyarázathoz, a mikroeloszlás fogalmának megkonstruálásához mégis szükséges.

*Az előbb említett matematikai kitérőben kapott értéktől eltérő lesz az eredmény a molekulákat egyenrangúnak tekintő szemlélet szerint: a sorrend nem számít!*




*18. ábra*




*19. ábra*

*Az előbbi sorrendiségnél kapott eredményünket felhasználhatjuk. Az első gondolat szerint annyit kell tennünk, hogy a kapott lehetőség $2^N$ számot leosztjuk az egyenlőnek tekintett lehetőségek számával. De a különböző eloszlások (8–8, 2–14, 3–13) esetben ez nem ugyanakkora osztót jelentene. Mivel az egyenletes eloszlást (8–8) mindig több ugyanolyan elrendezést jelentő alakzat valósítja meg, mint a többit, és az atomok számának növekedésével ez egyre nagyobb mértékben hagyja el a többi elrendezéshez tartozó képek számát – ezért „Össz-Rossz" gondolatelvvel kell gondolkozni. Az atomok számának növekedésével viszont már nem kereshető meg az összes „Rossz" alakzat, s így nem is számolhatóak meg.*

*Egyszerűbb, ha ekkor adott N elemből sorrendiség nélkül kiválasztunk k elemet (ami mondjuk a bal féltartályban lesz) úgy, hogy (mivel egyenrangúak) a sorrend nem számít, s (mivel minden részecskének csak egy helye van) csak egyszer használható fel minden elem. Ekkor ismétlődés nélküli kombinációról beszélünk. Az atomok elrendeződésének lehetséges száma ekkor*

$$\frac{N^k}{k!} = \frac{N\cdot(N-1)\cdot(N-2)\cdot\ldots\cdot(N-k+1)}{k\cdot(k-1)\cdot(k-2)\cdot\ldots\cdot 1} =$$

$$= \prod_{i=1}^{k}\frac{N-k+i}{i} = \frac{N!}{k!(N-k)!} = \binom{N}{k}$$

*binomiális együttható értéke.*

*Ez éppen azon mikroeloszlások száma, ami azt az állapotot alakítja ki, amikor az N molekula közül k molekula valamelyik (mondjuk bal) térrészben tartózkodik.*

*Ugyanezt az eredményt kapjuk akkor is, ha azon állapotokat számoljuk meg, amikor a k db részecskén kívüli többi (N – k db) részecske a másik (jobb) oldalon van:*

$$\binom{N}{k} = \binom{N}{N-k}$$

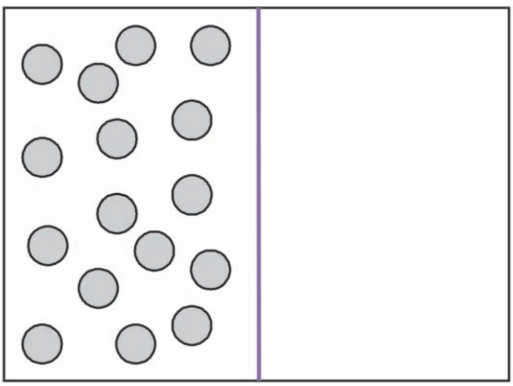
*Ez a Pascal-háromszög azonosságaiból adódik a matematikában. Az állítás gyakorlati bizonyítása: ugyanazt az eredményt kapom a lehetőségek számának értékére, ha pl. kiválasztom egy tanulócsoport 10 diákja közül azt a 4-et, aki jutalom csokit kap, illetve ha kiválasztom azt a 6-ot, aki nem kap (ez 210 lehetőség).*

Az egyes állapotokhoz tartozó **lehetséges mikroeloszlások számának megadásával egy állapotjelző (a sűrűségeloszlás) fluktuációját** vizsgálhatjuk. **A statisztikus fizika azt hívja egyensúlyi állapotnak, amikor a rendszer a legtöbb mikroeloszlással megvalósuló – stacionárius (időben állandó) – állapotban van.** Az anyaghalmazoknak **nagyobb valószínűséggel** az az állapota fog bekövetkezni, amit több azonos valószínűséggel bekövetkező („beszámozott" atomokból álló) molekulaelrendezés valósít meg.

**Különböző számú mikroeloszlás valósítja meg a sűrűség aspektusából különböző állapotokat.** Egyeseket több, másokat kisebb mennyiségű.

**1.** Például azt az állapotot, hogy az összes részecske a bal féltartályban legyen *(20. ábra)*, csak 1-féleképp lehet (úgy, hogy mind ott van) megvalósítani.

**2.** 1 részecske úgy lehet a jobb oldalon, hogy $N$ közül 1 ott van, a többi pedig a bal oldalon; így $N$ lehetőség van ezen sűrűség-állapot megvalósítására. Ahogyan $N$-féleképp lehet 1 részecske a bal oldalon is, ha a többi a jobb oldalon található.



*20. ábra*

**3.** 2 részecske jobb oldalon léte már

$$\binom{N}{2}$$

lehetőséget ad a sűrűség-állapot megvalósítására. Ugyanennyi lehetőség van arra, hogy 2 részecske legyen a bal oldalon, míg a többi a jobb oldalon van, ami eredmény összhangban áll a fenti

$$\binom{N}{k} = \binom{N}{N-k}$$

binomiális azonossággal, melyet mindennapi példával igazoltunk.

**4.** A gondolatmenetet folytatva látható, hogy a legnagyobb számú mikroeloszlás azt a sűrűség-állapotot valósítja meg, melyben a részecskék egyenletesen oszlanak szét a térben.

A matematikai magyarázat az, hogy az

$$\binom{N}{k}$$

binomiális együttható akkor a legnagyobb, ha

$$k = \left[\frac{N}{2}\right]$$

(egészrész). Ez a formális magyarázat a binomiális együttható fenti maximumának értékére.

Gyakorlati magyarázat, hogy például amikor 1 részecske kivételével már a jobb oldalra tettünk minden részecskét, akkor visszajutottunk a 2. esetre.

Tehát az a leggyakoribb állapot, amikor a részecskék fele a jobb féltartályban van, másik fele pedig a balban.

Fontos megállapítás, hogy **a magára hagyott anyaghalmaz esetében a mikroeloszlások száma az időben későbbi állapotban több lesz, mint a korábbi állapotban volt.**

**Összefoglalóan** jelen három részes írásunk első részében megismerhette az olvasó a tanulmányban ajánlott módszer szerinti feldolgozás első két szakaszát: a matematikai formula felírásának és annak magyarázatának menetét; valamint a fogalmi rendszer kialakítását. Bemutattuk az exponenciális függvény és az Euler-szám jellemzőit. Majd miután kiemelt szerepet kapott annak hangoztatása, hogy az előzetes tudás felmérése fontos, megtárgyaltuk a hőmérséklet fogalmát, a reverzibilis, az irreverzibilis, és a valóságos folyamatok sajátosságait, a statisztikus fizika alapgondolatát, az állapotjelzők fogalomkörét, a termodinamika II. főtételének különböző interpretációit, a kváziegyensúly koncepcióját, és a Boltzmann-eloszlás tárgyalásához szükséges és fontos mikroeloszlás fogalmát.

A következő részben kerül sor a témakör feldolgozására vonatkozó következő három szakasz ismertetésére, melyek a jelenségek, jelenségértelmezések; a jelenségmagyarázat; valamint a mindennapi életben való megnyilvánulás és a történetiség.

## Irodalom


[1] Gulyás János – Markovits Tibor – Szalóki Dezső – Varga Antal: *Fizika Modern fizika.* Calibra Kiadó, 1996.

[2] Halász Tibor – Jurisits József – Szűcs József: *Fizika 10. osztályosoknak.* MOZAIK Kiadó, 2008.

[3] Halász Tibor – Jurisits József – Szűcs József: *Fizika 11–12. osztályos közép- és emelt szintű érettségire készülőknek.* MOZAIK Kiadó, 2008.

[4] Radnóti Katalin – Nahalka István – Wagner Éva – Poór István: *A fizikatanítás pedagógiája.* Nemzeti Tankönyvkiadó, 2002.

[5] Nagy Mária: *A fizikatanítás pedagógiája: Matematikai eszközök alkalmazása a fizika tanításában. TDK-dolgozat.* Témavezető: Radnóti Katalin. Készítette: Nagy Mária, 2012.

[6] Tóth Eszter: *Fizika IV.* Tankönyvkiadó, 1984.


## Elektronikus források


[1] Radnóti Katalin: Projektoktatás. A konstruktivista pedagógia alapjai http://members.iif.hu/rad8012/pedagogia/Projektoktatas-konstruktivizmus.ppt

[2] Radnóti Katalin, Kiss Csilla: A konstruktivista tanuláselmélet bemutatása a mechanika példáján keresztül című írás. http://metal.elte.hu/~radkat/menu/kezdo.htm

[3] http://www.themathpage.com/aprecalc/logarithmic-exponential-functions.htm

[4] http://home.windstream.net/okrebs/-page54.html
[5] http://hu.wikipedia.org/wiki/Exponenci%C3%A1lis_f%C3%BCggv%C3%A9ny
[6] http://hu.wikipedia.org/wiki/Euler-f%C3%A9le_sz%C3%A1m#Defin.C3.ADci.C3.B3
[7] https://www.google.hu/search?hl=hu&q=hideg&bav=on.2,or.r_gc.r_pw.r_cp.r_qf.&bvm=bv.43148975,d.ZWU&ion=1&biw=1303&bih=640&um=1&ie=UTF-8&tbm=isch&source=og&sa=N&tab=wi&ei=JBw1Ucx-y8S0BqSsgNgE
[8] http://pctrs.network.hu/clubpicture/5/6/3/_/tel_ho_hideg__szep-002_563142_19903.jpg
[9] http://marosvasarhelyi.info/wp-content/uploads/2010/11/homero.jpg
[10] http://katicaovi.hu/album/ovoda%20es%20udvar/slides/hinta%20es%20csuszda.jpg
[11] http://pctrs.network.hu/clubblogpicture/4/_/40098_811108757_big.bmp https:// encrypted-tbn3.gstatic.com/ images? q=tbn:ANd9GcQM5ndgSA6eHUSi78gVVsMGO3YlzeEUC6jl1MHZPVn3vpodYBa5
[12] http://cms.sulinet.hu/get/d/fd27d750-9358-4993-b1c1-0c56dc636efd/1/6/b/preview/video_preview.jpg
[13] https://encrypted-tbn1.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcR4qYvNQgJnTTIfqSoBdLGQHsQM-fKIjsh0bQ3cAmm0iDpHLgxH
[14] http://kep.index.hu/1/0/152/1526/15262/1526221_3da8f4d40626115749d15b28e7933525_wm.jpg

# HANGSZÓRÓ

Dr. Varga Zsuzsa – Dr. Molnár Miklós

# Szakács Jenő Megyei Fizikaverseny

## 2012/2013. tanév, I. forduló

### I. forduló

*Minden versenyzőnek a számára kijelölt **négy** feladatot kell megoldania. A **szakközépiskolásoknak** az **A** vagy a **B** feladatsort kell megoldani a következők szerint:*

**A:** Minden 9. és 10. évfolyamos szakközépiskolai tanuló, és azok a 11–12. (13.) évfolyamos szakközépiskolai tanulók, akik két évig tanulnak fizikát.

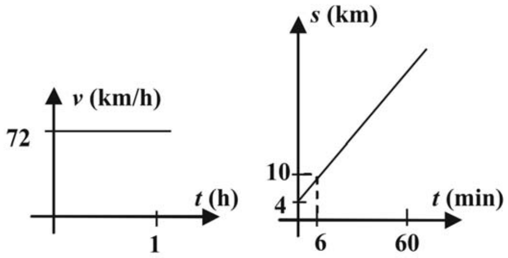
**B:** Azok a 11–12. (13.) évfolyamos szakközépiskolai tanulók, akik több, mint két évig tanulnak fizikát.

*A rendelkezésre álló idő **180 perc.** A feladatok megoldásait önállóan kell elkészítenie, függvénytáblázat és számológép használható. Egy feladat teljes és hibátlan megoldása 15 pontot ér. Minden feladatot külön lapon oldjon meg!*

**Jó munkát kívánnak a feladatkitűzők: Molnár Miklós és Varga Zsuzsa!**

<table>
<tr><th colspan="2">A gimnazisták feladatai:</th><th colspan="2">A szakközépiskolások feladatai:</th></tr>
<tr><td>9. osztály</td><td>1, 2, 3, 4.</td><td rowspan="2">A</td><td rowspan="2">1, 2, 3, 6.</td></tr>
<tr><td>10. osztály</td><td>4, 5, 6, 7.</td></tr>
<tr><td>11. osztály</td><td>7, 8, 9, 10.</td><td rowspan="2">B</td><td rowspan="2">1, 5, 9, 10.</td></tr>
<tr><td>12. osztály</td><td>11, 12, 13, 14.</td></tr>
</table>

**1.** Az *A* és a *B* városközpontokat, amelyek 54 km-re vannak egymástól, egyenes országút köti össze. Egy autó az *A* városközpontból indul *B* város felé délelőtt 10 órakor. Az autó sebességét, mint az idő függvényét az *a)* ábra mutatja. Egy másik autó szintén 10 órakor indul a *B* város felé, de nem a városközpontból, hanem a városközponttól távolabb, a *C* pontból. A *C* pont ugyancsak az egyenes országúton található, az *A* város és a *B* város között, *A*-tól 4 km távolságra. A második autónak a megtett útját, mint az idő függvényét a *b)* ábra mutatja: az indulástól számított első 6 percben 6 km-t tesz meg, és ugyanilyen ütemben halad tovább.



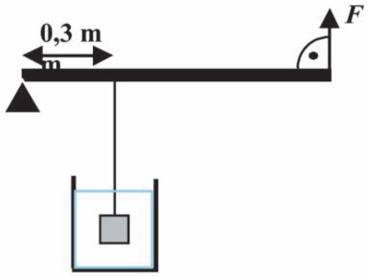
*a)* *b)*

*a)* Állapítsd meg, milyen mozgást végeznek az autók! Miért?
*b)* Mikor és hol éri utol az *A*-ból induló autó a *C*-ből induló autót?
*c)* Mikor érnek az autók a *B* városközpontba?

**2.** Egy kisméretű test 20 m magasságból szabadon esik. Az út első szakasza megtételéhez és a hátralevő út megtételéhez szükséges idők aránya $2 \cdot \sqrt{3} + 3$. A közegellenállástól tekintsünk el, $g = 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

*a)* Mekkora az esés első szakaszának hossza?
*b)* Mekkora a test sebessége az első szakasz végén?

**3.** Az 1 m hosszú, homogén tömegeloszlású, állandó keresztmetszetű rúd egyik végét alátámasztjuk. A rúdra, az ábrának megfelelően, egy 27 kg tömegű, $\rho_{\text{Al}} = 2{,}7\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ sűrűségű alumíniumhasábot akasztunk fonál segítségével. A hasábot az alatta elhelyezett edényben lévő víz teljesen ellepi. A rudat az ábra szerint $F$ = 66 N nagyságú erővel vízszintes helyzetben egyensúlyban tarthatjuk. $\left(\rho_{\text{víz}} = 1\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3},\ g = 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)$.




*a)* Mekkora erő feszíti a hasábot tartó fonalat?
*b)* Mekkora a rúd tömege?
*c)* Mekkora és milyen irányú erő hat az alátámasztásra?

**4.** A 100 kg tömegű kerekes kocsit kell eljuttatni 200 m távolságra. Az 50 kg tömegű gyerek először 100 m hosszan állandó erővel tolja, majd a kocsihoz képest $1\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ nagyságú sebességgel felugrik a kocsira. A kocsi éppen 200 m-re áll meg a kiindulási helytől.

*a)* Mekkora állandó erővel kellett tolni a kocsit, ha a súrlódási együttható a kocsi és a talaj között 0,008?
*b)* Mekkora a kocsi sebessége a 100 m-es gyorsítás után?
*c)* Mennyi ideig tartott a kocsit eljuttatni 200 m-re?

$$\left(g = 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)$$

**5.** A 35 kg tömegű, homogén tömegeloszlású, 4 m hosszúságú mérleghintát rosszul készítették el. A hiba miatt az alátámasztás (a vízszintes forgástengely) a hinta tömegközéppontjához (súlypontjához) képest 45 cm-rel balra került. A hinta jobb oldali végére felül egy 40 kg tömegű kisfiú.

*a)* Egyensúlyba tudja-e hozni a mérleghintát a 72 kg tömegű édesapa, ha felül a hintára?

*b)* Ha az édesapa a hinta bal oldali végére ül, hová kell ülnie a kisfiúnak, hogy a hinta egyensúlyba kerülhessen?

*c)* Mekkora erő hat ebben az esetben az alátámasztásra (a forgástengelyre)? $\left(g = 10\ \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)$

**6.** A fűtésre használt földgáz égéshője (fűtőértéke) $21\dfrac{\mathrm{MJ}}{\mathrm{m}^3}$. A gázzal működő készülékkel (gázbojlerrel) 30%-os hatásfok mellett 6 kg 20 °C-os vizet 90 °C-osra melegítünk $\left(c_{\text{víz}} = 4{,}2\ \dfrac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{K}}\right)$. Mennyi földgázt használtunk fel a melegítéshez?

**7.** Egyik végénél felfüggesztett rugóra egy testet erősítünk. Ekkor a rugó megnyúlása 5 cm. Ha a függőleges rugót további 2,5 cm-rel szándékozunk megnyújtani, úgy 0,25 J nagyságú munkát kell végeznünk.

*a)* Mekkora a rugó rugóállandója?

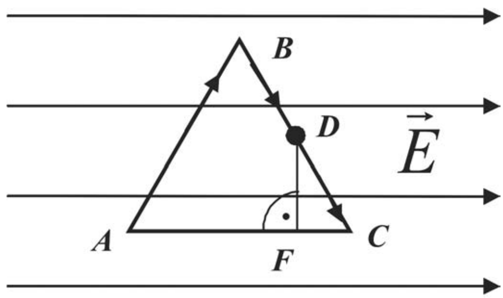
*b)* Mekkora a rugóra erősített test tömege? $\left(g = 10\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)$

**8.** Függőleges helyzetű, hőszigetelt hengert a tetején 5 kg-os, 20 cm$^2$ keresztmetszetű, könnyen mozgó dugattyú zár el. Az edényben kezdetben 300 K-es, 1 liter térfogatú levegő van, a külső levegő nyomása 100 kPa. Az edényben a levegőt beépített fűtőszál segítségével 30 °C-kal felmelegítjük.

*a)* Mekkora plusz tömeget kell fokozatosan felrakni a dugattyúra, ha azt szeretnénk, hogy a levegő térfogata a melegítés ellenére se változzon?

*b)* Mennyivel mozdulna el a dugattyú a melegítés hatására, ha ezt a plusz tömeget nem raknánk föl? $\left(g = 10\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)$

**9.** Homogén elektromos mezőben az elhanyagolható tömegű pozitív töltést 0,045 J munka árán juttathatjuk el az $a$ = 6 cm oldalhosszúságú, egyenlő oldalú háromszög $AC$ oldala mentén $F$-ből $A$-ba. (Az $AC$ oldal párhuzamos a térerősség-vonalakkal.). A mező térerősségének nagysága $2\cdot 10^4\ \dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}$.



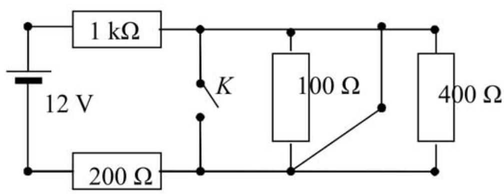

*a)* Hány $\mu$C nagyságú a töltés?

*b)* Mekkora a $C$ pont potenciálja az $A$ pontéhoz képest?

*c)* Mekkora munkát végez az elektromos mező a töltésen, ha a töltés az $A$ pontból az $ABD$ úton jut el a $BC$ oldal $D$ felezőpontjába?

*d)* Mekkora munkát végzünk, ha a 100 $\mu$C nagyságú negatív töltést $A$-ból a háromszög oldalai mentén visszajuttatjuk $A$-ba?

**10.** $U$ = 12 V-os telepből, a $K$ kapcsolóból és négy ellenállásból az ábrán látható áramkört állítjuk össze.




*a)* Mekkora feszültség esik az $R_1$ = 1 kΩ-os ellenálláson a $K$ kapcsoló nyitott, illetve zárt állásában?

*b)* Hogyan változik a telepen átfolyó áram erőssége a $K$ kapcsoló zárása után?

*c)* Mekkora munkát végez a telepen átfolyó áram 2 perc alatt a $K$ kapcsoló zárt állásában?

**11.** A függőleges helyzetű, $D$ rugóállandójú rugóra 10 dkg tömegű testet akasztunk. A test 12 másodperc alatt 36 teljes rezgést végez.

*a)* Mekkora a rugó rugóállandója?

*b)* Mekkora $\Delta m$ tömegű testet akasszunk még a rugóra, hogy a testek 75 teljes rezgést fél perc alatt tegyenek meg?

*c)* Mennyi a periódusidők aránya a két esetben?

*d)* Mekkora a rugó maximális megnyúlása a második esetben? $\left(g = 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)$

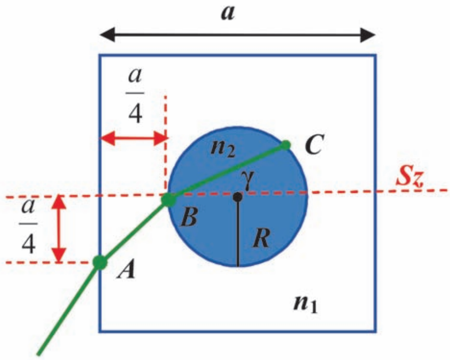
**12.** Egy tekercsben 40 V egyenfeszültség mellett 12,5 A erősségű áram folyik. Ha a tekercsre 50 Hz frekvenciájú, 40 V effektív értékű szinuszos váltakozó feszültséget kapcsolunk, a tekercsben folyó áram erőssége 1 A.

*a)* Mekkora a tekercs (ohmikus) ellenállása és önindukciós együtthatója?

*b)* Mekkora a fáziseltolódás szöge?

*c)* Mekkora teljesítményt vesz fel a tekercs a váltakozó feszültségű hálózatból?

**13.** Egy levegőben elhelyezett $a$ = 4 cm oldalú, $n_1$ = 1,4 (abszolút) törésmutatójú anyagból készült négyzetes hasábba fúrt lyukba – az ábrának megfelelően – $R = \frac{a}{4}$ sugarú, $n_2$ (abszolút) törésmutatójú anyagból készített hengert helyeztünk. A hasáb $A$ pontjára a rajz síkjában fénysugár érkezik, amelynek haladási irányát a hasábban és a hengerben a rajzon feltüntettük. A hengerben haladó fénysugár $\gamma = 24{,}36°$-os szöget zár be a berajzolt $Sz$ szimmetriatengellyel.



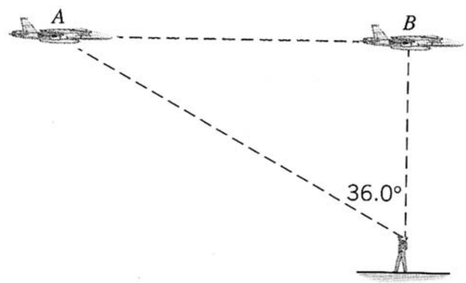

*a)* Mekkora beesési szöggel érkezik a hasábra a fény?

*b)* Mekkora a henger anyagának $n_2$ törésmutatója?

*c)* Mennyi idő alatt teszi meg a fény az $ABC$ utat?

*d)* Kilép-e a fény a hengerből a $C$ pontnál? (A fény terjedési sebessége vákunban $3 \cdot 10^5\,\frac{\text{km}}{\text{s}}$).

**14.** Repülőgép nagy magasságban vízszintesen repül. Amikor a repülő éppen a megfigyelő feje fölött van, úgy hallja, mintha a repülőgép hangja az $A$ pontból jönne.




*a)* Ha az $A$ pontban a repülő sebessége $164\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$, mekkora a sebessége a $B$ pontban, ha a repülő gyorsulása állandó? A hang terjedési sebessége $340\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

*b)* Gyorsul vagy lassul a repülő?

*c)* Ugyanilyen megfigyelési szöggel mennyi lenne egy állandó sebességgel haladó repülő sebessége?

### Megoldások és pontozási útmutató

**1.** Adatok:

$v_1 = 72\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$,

$s$ = 54 km,

$\Delta s$ = 4 km,

$v_2 = \frac{6\text{ km}}{0{,}1\text{ h}} = 60\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

*a)* Az első autó **egyenes vonalú egyenletes mozgást** végez $v_1 = 72\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ nagyságú sebességgel (a grafikonról látható, hogy a sebesség állandó). A második autó **is egyenes vonalú egyenletes mozgást végez,** hiszen út – idő grafikonja egyenes.

*2+2 =4 pont*

Ennek az autónak a sebessége

$$v_2 = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{10\ \text{km} - 4\ \text{km}}{6\ \text{min}} = \frac{6\ \text{km}}{0{,}1\ \text{h}} = 60\ \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

*b)* Az autók találkozásáig, az utolérésig mindkét autó azonos $t$ ideig mozgott. A megtett utak:

$$s_1 = v_1 \cdot t = 72\ \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot t,$$

$$s_2 = v_2 \cdot t = 60\ \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot t.$$

Az első autónak $\Delta s$ = 4 km-rel több utat kellett megtennie, azaz $s_1 = s_2 + 4$ km . Így

$$72\ \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot t = 60\ \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot t + 4\ \text{km}.$$

Innen

$$t = \frac{4\ \text{km}}{72\ \frac{\text{km}}{\text{h}} - 60\ \frac{\text{km}}{\text{h}}} = \frac{4\ \text{km}}{12\ \frac{\text{km}}{\text{h}}} = \frac{1}{3}\ \text{h} = 20\ \text{min}.$$

Tehát **10 óra 20 perckor éri utol** az *A* városból induló autó a második autót. A találkozás helye az *A* várostól

$$d = v_1 \cdot t = 72\ \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{1}{3}\ \text{h} = 24\ \text{km-re}$$

található (a *C* ponttól 20 km-re).

*3+3=6 pont*

*c)* Az első autó az indulástól számított

$$t_1 = \frac{s}{v_1} = \frac{54\ \text{km}}{72\ \frac{\text{km}}{\text{h}}} = 0{,}75\ \text{h} = 45\ \text{min elteltével},$$

azaz **10 óra 45 perckor** ér a *B* városba. A második autó az indulástól számított

$$t_2 = \frac{54\ \text{km} - 4\ \text{km}}{60\ \frac{\text{km}}{\text{h}}} = 0{,}8333\ \text{h} = 50\ \text{min}$$

elteltével, azaz 10 óra 50 perckor ér a *B* városba.

*5 pont*

**2.** Adatok:

$H$ = 20 m,

$$g = 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2},$$

$$x = \frac{t_1}{t_2} = 2 \cdot \sqrt{3} + 3$$

*a)* $h_1$ = ?, *b)* $v_1$ = ?

*a)* A teljes esési idő a négyzetes úttörvényt felhasználva:

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot H}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 20\ \text{m}}{10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = 2\ \text{s}.$$

*2 pont*

Másrészt

$$t = t_1 + t_2 = t_1 + \frac{t_1}{2 \cdot \sqrt{3} + 3} =$$

$$= t_1 \cdot \left(1 + \frac{1}{2 \cdot \sqrt{3} + 3}\right) = t_1 \cdot \frac{2 \cdot \sqrt{3} + 3 + 1}{2 \cdot \sqrt{3} + 3} =$$

$$= \frac{2 \cdot (\sqrt{3} + 2)}{2 \cdot \sqrt{3} + 3} \cdot t_1 = \frac{2 \cdot (\sqrt{3} + 2)}{2 \cdot \sqrt{3} + 3} \cdot \frac{2 \cdot \sqrt{3} - 3}{2 \cdot \sqrt{3} - 3} \cdot t_1 =$$

$$= \frac{4 \cdot 3 - 6 \cdot \sqrt{3} + 8 \cdot \sqrt{3} - 12}{4 \cdot 3 - 9} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3} \cdot t_1.$$

Így az első szakasz megtételéhez szükséges idő:

$$t_1 = \frac{t}{\frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3}} = \frac{2\ \text{s}}{\frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3}} = \frac{3\ \text{s}}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}\ \text{s}.$$

*5 pont*

Az esés első szakaszának hossza:

$$h_1 = \frac{g}{2} \cdot (t_1)^2 = \frac{10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{2} \cdot \left(\sqrt{3}\ \text{s}\right)^2 = 15\ \text{m}.$$

*3 pont*

*b)* A test sebességének nagysága az első szakasz végén:

$$v_1 = g \cdot t_1 = 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \sqrt{3}\ \text{s} = 17{,}32\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

*5 pont*

*Megjegyzés:* Természetesen az idők arányának $x = 2 \cdot \sqrt{3} + 3 = 6{,}464$ értéke is felhasználható. Ekkor a teljes időre fennáll, hogy

$$t = t_1 + t_2 = t_1 + \frac{t_1}{6,464} =$$

$$= t_1 \cdot \left(1 + \frac{1}{6,464}\right) = t_1 \cdot 1,1547.$$

Így az első szakasz megtételéhez szükséges idő:

$$t_1 = \frac{t}{1,1547} = \frac{2\text{ s}}{1,1547} = 1,732\text{ s}.$$

**3.** Adatok:
$l$ = 1 m,
$m_{\text{Al}}$ = 27 kg,

$$\rho_{\text{Al}} = 2,7\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3},$$

$$\rho_{\text{víz}} = 1\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3},$$

$$g = 10\frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

$F$ = 66 N.

*a)* $K$ = ? , *b)* $m_{\text{rúd}}$ = ?, *c)* $F_{\text{alá}}$ = ?

*a)* A hasábra a

$$G_{\text{Al}} = m_{\text{Al}} \cdot g = 27\text{ kg} \cdot 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 270\text{ N}$$

gravitációs erő, a víz által rá kifejtett

$$F_{\text{fel}} = \rho_{\text{víz}} \cdot V \cdot g = \rho_{\text{víz}} \cdot \frac{m_{\text{Al}}}{\rho_{\text{Al}}} \cdot g =$$

$$= 1\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \cdot \frac{27\text{ kg}}{2,7\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}} \cdot 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 100\text{ N}$$

nagyságú felhajtóerő és a fonalat feszítő $K$ erő hat. Mivel a hasáb egyensúlyban van, így a rá ható erők eredője zérus. Tehát a $K$ fonálerő nagysága: $K = G_{\text{Al}} - F_{\text{fel}}$ = 270 N – 100 N = 170 N.

*6 pont*

*b)* A rúdra négy erő hat. A rúd középpontjában támadó $G_{\text{rúd}} = m_{\text{rúd}} \cdot g$ nagyságú gravitációs erő, a fonál által kifejtett $K$ = 170 N nagyságú fonálerő, az $F$ = 66 N nagyságú erő és az alátámasztásnál támadó $F_{\text{alá}}$ erő. Az alátámasztáson átmenő, vízszintes tengelyre felírt forgatónyomatékokra fennáll, hogy $K \cdot 0,3\text{ m} + G_{\text{rúd}} \cdot 0,5\text{ m} = 66\text{ N} \cdot 1\text{ m}$. Tehát a rúdra ható gravitációs erő nagysága:

$$G_{rúd} = \frac{66\text{ N} \cdot 1\text{ m} - 170\text{ N} \cdot 0,3\text{ m}}{0,5\text{ m}} = 30\text{ N}.$$

A rúd tömege így

$$m_{\text{rúd}} = \frac{G_{\text{rúd}}}{g} = \frac{30\text{ N}}{10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = \underline{3\text{ kg.}}$$

*6 pont*

*c)* Az alátámasztásra ható erő függőlegesen lefelé mutat és a nagysága: $F_{\text{alá}} = G_{\text{rúd}} + K - F$ = = 30 N + 170 N – 66 N = 134 N.

*3 pont*

**4.** Adatok:
$M$ = 100 kg,
$m$ = 50 kg,
$2s$ = 200 m,

$$u = 1\frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$F$ = állandó,
$\mu$ = 0,008.

A mozgás második szakasza egyenletesen lassuló mozgás. Ha a felugrás után a kocsi és a gyerek közös sebessége $V$, akkor a munkatétel szerint:

$$\frac{1}{2}(M+m)V^2 = (M+m)\mu g s,$$

amiből a $V$ sebesség meghatározható:

$$V^2 = 2\mu g s = 2 \cdot 0,008 \cdot 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 100\text{ m} = 16\ \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2},$$

$$V = 4\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

*3 pont*

*Megjegyzés:* A kocsi és a gyerek közös $V$ sebességét a munkatétel nélkül is megadhatjuk.
A kocsit a súrlódási erő lassítja, a lassulás nagysága: $a_l = \mu \cdot g$. A megtett $s_2$ = 100 m-es útra nézve fennáll, hogy

$$s_2 = \frac{a_1}{2} \cdot t_2^2 = \frac{a_1}{2} \cdot \left(\frac{V}{a_1}\right)^2 = \frac{V^2}{2 \cdot a_1} = \frac{V^2}{2 \cdot \mu \cdot g}.$$

Innen a keresett sebesség:

$$V = \sqrt{s_2 \cdot 2 \cdot \mu \cdot g} =$$

$$= \sqrt{100\text{ m} \cdot 2 \cdot 0,008 \cdot 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 4\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

A gyerek fölugrása a kocsira rugalmatlan ütközés, amelyre érvényes a lendületmegmaradás törvénye. Ha a kocsi felugrás előtti sebessége $v$, akkor a lendületmegmaradás szerint
$Mv + m(u + v) = (M + m)V$.
Ebből a kocsi sebessége a gyorsítás után (a felugrás előtti pillanatban):

$$v = \frac{(M+m)V - mu}{M+m} =$$

$$= \frac{150\text{ kg}\cdot 4\,\frac{\text{m}}{\text{s}} - 50\text{ kg}\cdot 1\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{150\text{ kg}} = 3{,}66\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Ez a válasz a *b)* kérdésre.

*4 pont*

*a)* A gyorsítási szakaszra felírható, hogy

$$s = \frac{v^2}{2a},$$

amiből

$$a = \frac{v^2}{2s} = \frac{3{,}66^2}{2\cdot 100}\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 0{,}067\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

A kocsi mozgásegyenlete (az $F$ erőn kívül a súrlódási erő hat rá):
$Ma = F - \mu Mg$, ahonnan

$$F = M(a + \mu g) = 100\text{ kg} =$$

$$= 100\text{ kg}\,(0{,}067 + 0{,}08)\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \underline{14{,}7\text{ N}}.$$

*4 pont*

*c)* A gyorsítási szakaszhoz szükséges idő:

$$t_1 = \frac{v}{a} = \frac{3{,}66}{0{,}067}\text{ s} = 54{,}63\text{ s}.$$

A lassulási szakaszban eltelt idő:

$$t_2 = \frac{V}{\mu g} = \frac{4}{0{,}08}\text{ s} = 50\text{ s}.$$

$t_1 + t_2 = 54{,}63\text{ s} + 50\text{ s} = 104{,}6\text{ s}$ ideig tartott.

*4 pont*

**5.** Adatok:
$m_{\text{hinta}} = 35$ kg,
$L = 4$ m,
$d = 45$ cm $= 0{,}45$ m,
$m_{\text{fiú}} = 40$ kg,
$m_{\text{apa}} = 72$ kg,

$$g = 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

*a)* Lehet-e egyensúly?, *b)* $x_{\text{jobb}}$ = ?, *c)* $F_{\text{alá}}$ = ?

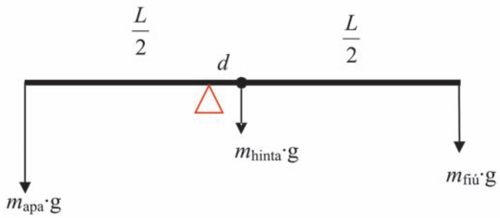
*a)* Ahhoz, hogy a hinta egyensúlyban lehessen, az apának a hinta bal oldalára kell ülnie. A hintára ható erők forgatónyomatékai a forgástengelyre vonatkozóan:

$$M_1 = m_{\text{fiú}}\cdot g\cdot\left(\frac{L}{2} + d\right) + m_{\text{hinta}}\cdot g\cdot d =$$

$$= 40\text{ kg}\cdot 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot\left(\frac{4\text{ m}}{2} + 0{,}45\text{ m}\right) + 35\text{ kg}\cdot$$

$$\cdot 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot 0{,}45\text{ m} = 980\text{ Nm} + 157{,}5\text{ Nm} =$$

$$= 1137{,}5\text{ Nm}.$$




Ha az apa **teljesen** kiül a hinta bal oldali végére, akkor az általa létrehozott forgatónyomaték nagysága

$$M_2 = m_{\text{apa}}\cdot g\cdot\left(\frac{L}{2} - d\right) =$$

$$= 72\text{ kg}\cdot 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot\left(\frac{4\text{ m}}{2} - 0{,}45\text{ m}\right) = 1116\text{ Nm}.$$

Mivel ez a forgatónyomaték kisebb, mint $M_1$, így **a hinta nem kerülhet egyensúlyba.**

*6 pont*

*b)* A kisfiúnak közelebb kell ülnie a forgástengelyhez. Ekkor $M_1' = m_{\text{fiú}}\cdot g\cdot x_{\text{jobb}} + m_{\text{hinta}}\cdot g\cdot d =$

$$= 40\text{ kg}\cdot 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot x_{\text{jobb}} + 35\text{ kg}\cdot 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot 0{,}45\text{ m} =$$

$$= 400\text{ N}\cdot x_{\text{jobb}} + 157{,}5\text{ Nm}.$$

Az egyensúly létrejöttének feltétele: $M_1' = M_2$,
$400\text{ N}\cdot x_{\text{jobb}} + 157{,}5\text{ Nm} = 1116\text{ Nm}$, ahonnan a fiú távolsága a forgástengelytől

$$x_{\text{jobb}} = \frac{1116\text{ Nm} - 175\text{ Nm}}{400\text{ N}} = 2{,}3525\text{ m},$$

tehát

$$\Delta x = \frac{L}{2} + d - x_{\text{jobb}} = 2{,}45\text{ m} - 2{,}3525\text{ m} =$$

$= 0{,}0975$ m $= 9{,}75$ cm-rel beljebb kell ülnie

a jobb oldali hintavégtől.

*6 pont*

*c)* Az alátámasztásra, a forgástengelyre ható erő nagysága

$$F_{\text{alá}} = m_{\text{apa}} \cdot g + m_{\text{fiú}} \cdot g + m_{\text{hinta}} \cdot g =$$

$$= (72\text{ kg} + 40\text{ kg} + 35\text{ kg}) \cdot 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 1470\text{ N}.$$

*3 pont*

**6.** Adatok:

$L_é = 21\,\frac{\text{MJ}}{\text{m}^3}$,

$\eta = 30$ %,

$m_{\text{víz}} = 6$ kg,

$t_1 = 20$ °C,

$t_2 = 90$ °C,

$c_{\text{víz}} = 4{,}2\,\frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$.

A víz melegítéséhez szükséges energia (hőmennyiség) 100%-os hatásfok esetén:

$$Q' = c_{\text{víz}} \cdot m_{\text{víz}} \cdot \Delta t =$$

$$= 4{,}2\,\frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \cdot 6\text{ kg} \cdot \left(90\,°\text{C} - 20°\text{C}\right) =$$

$$= 4{,}2\,\frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot °\text{C}} \cdot 6\text{ kg} \cdot 70\;°\text{C} = 1764\text{ kJ}.$$

*7 pont*

30%-os hatásfok esetén több energia kell:

$$Q = \frac{Q'}{\eta} = \frac{1764\text{ kJ}}{0{,}3} = 5880\text{ kJ}.$$

*4 pont*

Ekkora energia

$$V_{\text{földgáz}} = \frac{Q}{L_é} = \frac{5880\text{ kJ}}{21\,\frac{\text{MJ}}{\text{m}^3}} = \frac{5880\text{ kJ}}{21000\,\frac{\text{kJ}}{\text{m}^3}} = 0{,}28\text{ m}^3$$

elégetése során nyerhető.

*4 pont*

**7.** Adatok:

$\Delta l_1 = 5$ cm,

$\Delta l = 2{,}5$ cm,

$\Delta l_2 = \Delta l_1 + 2{,}5\text{ cm} = 7{,}5$ cm,

W = 0,25 J.

*a)* $D = ?$, *b)* $m = ?$

*b)* A rugó eredeti megnyúlására nézve fennáll, hogy $m \cdot g = D \cdot \Delta l_1$.

A rúgóban tárolt energia ekkor:

$$\left(E_{\text{rugalmas}}\right)_1 = \frac{1}{2} \cdot D \cdot \left(\Delta l_1\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{m \cdot g}{\Delta l_1} \cdot \left(\Delta l_1\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot g \cdot \Delta l_1.$$

A rúgóban tárolt energia $\Delta l_2$ megnyúlás esetén:

$$\left(E_{\text{rugalmas}}\right)_2 = \frac{1}{2} \cdot D \cdot \left(\Delta l_2\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{m \cdot g}{\Delta l_1} \cdot \left(\Delta l_2\right)^2.$$

A nagyobb megnyúlás során a gravitációs erő munkát végez, amelynek nagysága:

$W_g = m \cdot g \cdot \Delta l$

Így az általunk végzett munka nagysága:

$$W = (E_{\text{rugalmas}})_2 - \left[(E_{\text{rugalmas}})_1 + W_g\right],\text{ azaz}$$

$$W = \frac{1}{2} \cdot \frac{m \cdot g}{\Delta l_1} \cdot \left(\Delta l_2\right) - \left(\frac{1}{2} \cdot m \cdot g \cdot \Delta l + W_g\right),\text{ illetve}$$

$$0{,}25\text{ J} = \frac{1}{2} \cdot \frac{m \cdot g}{0{,}05\text{ m}} \cdot \left(0{,}075\text{ m}\right)^2 -$$

$$-\left(\frac{1}{2} \cdot m \cdot g \cdot 0{,}05\text{ m} + \text{m} \cdot g \cdot 0{,}025\text{ m}\right),$$

$$0{,}25\text{ J} = (0{,}05625 \cdot m \cdot g)\text{m} - (m \cdot g \cdot 0{,}05)\text{ m},$$

ahonnan

$$m \cdot g = \frac{0{,}25\text{ J}}{0{,}05625\text{m} - 0{,}05\text{ m}} = 40\text{ N}.$$

A test tömege így $m =$ <u>4 kg.</u>

*12 pont*

*a)* Az $m \cdot g = D \cdot \Delta l_1$ összefüggésből a rugó rugóállandója:

$$D = \frac{m \cdot g}{\Delta l_1} = \frac{4\text{ kg} \cdot 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{0{,}05\text{ m}} = 800\,\frac{\text{N}}{\text{m}}.$$

*3 pont*

**8.** Adatok:
$m = 5$ kg,
$A = 20$ cm$^2$,
$T_0 = 300$ K,
$V = 1$ liter,
$p_k = 100$ kPa,
$T = 30$ °C,
$T_1 = 330$ K

*a)* Az edényben a melegítés előtt a nyomás nagyságára fennáll, hogy $p_0 = p_k + \dfrac{mg}{A}$,

$$p_0 = 100\ \text{kPa} + \frac{5\ \text{kg} \cdot 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{20 \cdot 10^4\ \text{m}^2} = 125\ \text{kPa}.$$

*3 pont*

A melegítés állandó térfogaton megy végbe:

$\dfrac{p_0}{T_0} = \dfrac{p_1}{T_1}$, ahonnan

$$p_1 = \frac{T_1}{T_0} p_0 = \frac{330}{300} \cdot 125\ \text{kPa} = 137{,}5\ \text{kPa}$$

*3 pont*

A $\Delta p = p_1 - p_0 = 12{,}5$ kPa nyomáskülönbséget a plusz tömeg ellensúlyozza:

$$\Delta p = \frac{\Delta mg}{A}, \text{ azaz } \Delta m = \frac{\Delta p \cdot A}{g} =$$

$$= \frac{12{,}5 \cdot 10^3 \text{Pa} \cdot 20 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^2}{10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = \underline{2{,}5\ \text{kg.}}$$

*3 pont*

*b)* A plusz tömeg nélkül a gáz állandó nyomáson tágul: $\dfrac{V}{T_0} = \dfrac{V_1}{T_1}$, ahonnan

$$V_1 = \frac{T_1}{T_0} V = \frac{330}{300} \cdot 1\ \text{liter} = 1{,}1\ \text{liter.}$$

*3 pont*

A dugattyú elmozdulása

$$\Delta x = \frac{V_1 - V}{A} = \frac{0{,}1 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^3}{20 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^2} = 0{,}05\ \text{m} = \underline{5\ \text{cm.}}$$

*3 pont*

**9.** Adatok:
$W'_{FA} = 0{,}045$ J,
$a = 6$ cm $= 0{,}06$ m,
$E = 2 \cdot 10^4\ \dfrac{\text{N}}{\text{C}}$.
$Q' = -100\ \mu$C.

*a)* $Q = ?$ ($\mu$C), *b)* $U_C = ?$, *c)* $W_{ABD} = ?$, *d)* $W_{ABCA} = ?$

*a)* Az elektrosztatikus mezőben a töltésnek az *FA* úton történő elmozdulásához szükséges munkavégzésünk $W_{\text{FA}} = F \cdot s = E \cdot Q \cdot s = E \cdot Q \cdot \overline{FA}$, mivel az elmozdulás az erővonalakkal párhuzamosan történik és a töltés mozgatásához szükséges erő iránya megegyezik az elmozdulás irányával.

Az $\overline{FA}$ szakasz hossza:

$$s = \overline{FA} = \overline{AC} - \overline{FC} = \overline{AC} - \frac{\overline{DC}}{2} =$$

$$= 6\ \text{cm} - \frac{3\ \text{cm}}{2} = 4{,}5\ \text{cm} = 0{,}045\ \text{m.}$$

Így a töltés nagysága

$$Q = \frac{W'_{FA}}{E \cdot s} = \frac{0{,}045\ \text{J}}{2 \cdot 10^4\ \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot 0{,}045\ \text{m}} =$$

$$= 5 \cdot 10^{-5}\ \text{C} = 50\ \mu\text{C.}$$

*3 pont*

*b)* A *C* pont potenciáljának értéke

$$U_C = E \cdot a = 2 \cdot 10^4\ \frac{\text{N}}{\text{C}} \cdot 0{,}06\ \text{m} = 1200\ \text{V.}$$

*3 pont*

*c)* Mivel az elektrosztatikus mező konzervatív, a végzett munka nem függ az úttól, csak a kezdő- és a végpont helyzetétől, így az *ABD* úton végzett munka megegyezik az *AF* úton végzett munkával. A végzett munka: $W_{ABD} = W_{AF} = 0{,}045$ J (hiszen $W'_{FA} = W_{AF}$).

*5 pont*

*d)* A konzervativitás miatt az *ABCA* úton (zárt görbe!) végzett munka (a töltés nagyságától és előjelétől függetlenül) zérus: $W_{ABCA} = 0$.

*4 pont*

Megjegyzés: A mező által végzett munka a töltés nagyságának ismeretében közvetlenül is kiszámítható:

$$W_{ABD} = W_{AB} + W_{BD} =$$
$$= E \cdot Q \cdot a \cdot \cos 60^\circ + E \cdot Q \cdot \frac{a}{2} \cdot \cos 60^{\circ\circ} =$$
$$= E \cdot Q \cdot a \cdot \cos 60^\circ \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) =$$
$$= 2 \cdot 10^4\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}} \cdot 50 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{C} \cdot 0{,}06\ \mathrm{m} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} =$$
$$= 0{,}045\ \mathrm{J}.$$

**10.** Adatok:
$U = 12$ V,
$R_1 = 1$ kΩ,
$R_2 = 200$ Ω,
$R_3 = 100$ Ω,
$R_4 = 400$ Ω,
$t = 2$ min $= 120$ s.

*a)* $U_{\text{nyitott}} = ?$, $U_{\text{zárt}} = ?$, *b)* $\Delta I = ?$, *c)* $W = ?$

*a)* A kapcsolási rajzon látható, hogy a 100 Ω-os és a 400 Ω-os ellenállás rövidzárban vannak, rajtuk áram nem folyik ($K$ állásától függetlenül). Az áramkörben $K$ nyitott állása mellett az $R_1 = 1$ kΩ-os és az $R_2 = 200$ Ω-os ellenállás sorosan vannak kapcsolva. Eredő ellenállásuk: $R = 1$ kW + 200 Ω = 1000 Ω + 200 Ω = = 1200 Ω. A telepen átfolyó áram erőssége így

$$I = \frac{U}{R} = \frac{12\ \mathrm{V}}{1200\,\Omega} = 0{,}01\ \mathrm{A} = 10\ \mathrm{mA}.$$

Az 1000 Ω-os ellenálláson eső feszültség értéke
$$U_{\text{nyitott}} = I \cdot R_1 = 0{,}01\ \mathrm{A} \cdot 1000\,\Omega = 10\ \mathrm{V}.$$

*6 pont*

A $K$ kapcsoló zárt állásában továbbra is rövidzárban van a 100 Ω-os és a 400 Ω-os ellenállás, azaz az áramviszonyok nem változnak meg, az 1 kΩ-os ellenálláson továbbra is $U_{\text{zárt}} = U_{\text{nyitott}} =$ = 10 V-os feszültség esik.

*3 pont*

*b)* A fentiek alapján a telepen átfolyó áram erőssége nem változik meg a K kapcsoló zárása után. Így az áramerősség megváltozása $\Delta I = 0$.

*3 pont*

*c)* A telepen átfolyó áram munkája

$W = U \cdot I_{\text{zárt}} \cdot t = 12\ \mathrm{V} \cdot 0{,}01\ \mathrm{A} \cdot 120\ \mathrm{s} = 14{,}4\ \mathrm{J}.$

*3 pont*

**11.** Adatok:
$m_1 = 10$ dkg $= 0{,}1$ kg,
$\Delta t_1 = 12$ s,
$Z_1 = 36$,
$\Delta t_2 = 0{,}5$ min $= 30$ s,
$Z_2 = 75$.

*a)* $D = ?$, *b)* $\Delta m = ?$, *c)* $\frac{T_1}{T_2} = ?$, *d)* $(\Delta l_2)_{\max} = ?$

*a)* A körfrekvencia értéke az első esetben:
$$\omega_1 = 2 \cdot \pi \cdot f_1 = 2 \cdot \pi \cdot \frac{Z_1}{\Delta t_1} = 2 \cdot \pi \cdot \frac{36}{12\,\mathrm{s}} = 6 \cdot \pi\,\frac{1}{\mathrm{s}},$$
a rugóállandó értéke így:
$$D = m_1 \cdot \omega_1^2 = 0{,}1\ \mathrm{kg} \cdot \left(6 \cdot \pi\ \frac{1}{\mathrm{s}}\right)^2 =$$
$$= 35{,}53\ \mathrm{kg} \cdot \frac{1}{\mathrm{s}^2} = 35{,}53\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}.$$

*4 pont*

*b)* A körfrekvencia értéke a második esetben:
$$\omega_2 = 2 \cdot \pi \cdot f_2 = 2 \cdot \pi \cdot \frac{Z_2}{\Delta t_2} = 2 \cdot \pi \cdot \frac{75}{30\,\mathrm{s}} = 5 \cdot \pi\,\frac{1}{\mathrm{s}}.$$
A változatlan rugóállandó miatt fennáll, hogy $D = m_1 \cdot \omega_1^2 = m_2 \cdot \omega_2^2$, ahonnan
$$m_2 = m_1 \cdot \left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2 =$$
$$= 0{,}1\ \mathrm{kg} \cdot \left(\frac{6 \cdot \pi\ \frac{1}{\mathrm{s}}}{5 \cdot \pi\ \frac{1}{\mathrm{s}}}\right)^2 = 0{,}144\ \mathrm{kg}.$$
A rugóra így még $\Delta m = m_2 - m_1 = 0{,}144$ kg – – 0,1 kg = 0,044 kg tömegű testet kell akasztani.

*4 pont*

*c)* A periódusidők aránya megegyezik a körfrekvenciák arányának a reciprokával:
$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\frac{2 \cdot \pi}{\omega_1}}{\frac{2 \cdot \pi}{\omega_2}} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{5 \cdot \pi\ \frac{1}{s}}{6 \cdot \pi\ \frac{1}{s}} = \frac{5}{6}.$$

*3 pont*

*d)* Az $m_2 = m_1 + \Delta m$ tömegű testre ható gravitációs erő megnyújtja a rugót, a maximális megnyúlásra pedig fennáll, hogy $m_2 \cdot g = D \cdot (\Delta l_2)_{\max}$, azaz

$$(\Delta l_2)_{max} = \frac{m_2 \cdot g}{D} = \frac{0{,}144\ \text{kg} \cdot 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{35{,}53\ \frac{\text{N}}{\text{m}}} =$$

$= 0{,}04\ \text{m} = 4\ \text{cm}.$

*4 pont*

**12.** Adatok:
$U_= = 40$ V,
$I_= = 12{,}5$ A,
$f = 50$ Hz,
$U_{eff} = 40$ V,
$I_{eff} = 1$ A.

*a)* $R = ?$, $L = ?$, *b)* $\varphi = ?$, *c)* $P = ?$

*a)* Ohm törvénye alapján:

$$R = \frac{U_=}{I_=} = \frac{40\ \text{V}}{12{,}5\ \text{A}} = 3{,}2\ \Omega.$$

*3 pont*

Váltakozó áram esetén a tekercs impedanciájának nagysága:

$$Z = \frac{U_{eff}}{I_{eff}} = \frac{40\ \text{V}}{1\ \text{A}} = 40\ \Omega.$$

Másrészt $Z = \sqrt{R^2 + X_L^2} = \sqrt{R^2 + (L \cdot \omega)^2} =$

$= \sqrt{R^2 + (L \cdot 2 \cdot \pi \cdot f)^2}$, innen

$$L = \frac{\sqrt{Z^2 - R^2}}{2 \cdot \pi \cdot f} = \frac{\sqrt{(40\ \Omega)^2 - (3{,}2\ \Omega)^2}}{2 \cdot \pi \cdot 50\ \text{Hz}} =$$

$= 0{,}127\ \text{H} = 127\ \text{mH}.$

*4 pont*

*b)* A fáziseltolódás szögére nézve fennáll, hogy:

$$\cos\varphi = \frac{R}{Z} = \frac{3{,}2\ \Omega}{40\ \Omega} = 0{,}08,$$

ahonnan $\underline{\varphi = 85{,}41^\circ}$ (az ára késik a feszültséghez képest).

*4 pont*

*c)* A hálózatból felvett teljesítmény nagysága:
$P = U_{eff} \cdot I_{eff} \cdot \cos\varphi = 40\ \text{V} \cdot 1\ \text{A} \cdot 0{,}08 = \underline{3{,}2\ \text{W.}}$

*4 pont*

**13.** Adatok:
$a = 4$ cm,
$n_1 = 1{,}4$,
$R = \frac{a}{4} = 1$ cm,
$\gamma = 24{,}36^\circ$.

*a)* $\alpha = ?$, *b)* $n_2 = ?$, *c)* $t_{ABC} = ?$, *d)* $C$-nél kilép-e a fény?

*a)* Az $A$-nál lévő $\beta$ törési szög geometriai viszonyok miatt 45°-os. A Snellius-Descartes-törvény alapján

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n_1.$$ Így

$$\sin\alpha = n_1 \cdot \sin 45^\circ = 1{,}4 \cdot \sin 45^\circ = 0{,}9899,$$

ahonnan az $\alpha$ beesési szög nagysága $\alpha = 81{,}85^\circ$.

*3 pont*

*b)* A $B$-nél lévő $\beta$ beesési szög a geometriai viszonyok miatt 45°-os. A Snellius-Descartes-törvény alapján

$$\frac{\sin\beta}{\sin\gamma} = n_{2,1} = \frac{n_2}{n_1}.$$ Ebből

$$n_2 = n_1 \cdot \frac{\sin\beta}{\sin\gamma} = 1{,}4 \cdot \frac{\sin 45^\circ}{\sin 24{,}36^\circ} = 2{,}4.$$

*3 pont*

*c)* A fény terjedési sebessége a hasábban

$$c_1 = \frac{c_{vákuum}}{n_1} = \frac{3 \cdot 10^8\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}{1{,}4} = 2{,}143 \cdot 10^8\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

A fény a hasábban

$$s_1 = \frac{a}{4} \cdot \sqrt{2} = \frac{0{,}04\ \text{m}}{4} \cdot \sqrt{2} = 1{,}41 \cdot 10^{-2}\ \text{m}$$

nagyságú utat tesz meg. Ennek az útnak a megtételéhez

$$t_1 = \frac{s_1}{c_1} = \frac{1{,}41 \cdot 10^{-2}\ \text{m}}{2{,}143 \cdot 10^8\ \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 6{,}58 \cdot 10^{-11}\ \text{s}$$

nagyságú idő szükséges.

*3 pont*

A fény terjedési sebessége a hengerben

$$c_2 = \frac{c_{\text{vákuum}}}{n_2} = \frac{3 \cdot 10^8 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2,4} = 1,25 \cdot 10^8 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

A fény a hasábban $s_2 = 2 \cdot R \cdot \cos \gamma =$

$= 2 \cdot 0,01 \text{ m} \cdot \cos \ 24,36° = 1,82 \cdot 10^{-2} \text{ m}$

hosszúságú utat tesz meg

(itt felhasználtuk a Thalész-tételt).

Ennek az útnak a megtételéhez

$$t_2 = \frac{s_1}{c_1} = \frac{1,82 \cdot 10^{-2} \text{ m}}{1,25 \cdot 10^8 \cdot 10^8 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 1,456 \cdot 10^{-11} \text{ s}$$

nagyságú idő szükséges.

*3 pont*

A teljes idő:

$t = t_1 + t_{\ 2} = 6,58 \cdot 10^{-11} \text{ s} + 1,456 \cdot 10^{-10} \text{ s} =$

$= 2,114 \cdot 10^{-10} \text{ s}.$

*1 pont*

*d)* Szimmetria-okok miatt a *C*-nél levő beesési szög szintén $\gamma = 24,36°$, ami a határszögnél kisebb

(ugyanis $\sin \alpha_h = n_{1,2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{1,4}{2,4} = 0,5833,$

azaz $\alpha_h = 35,69°$), így a fénysugár kilép *C*-nél a hengerből.

*2 pont*

**14.** Adatok:

$v_1 = 164 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \ c = 340 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \ \alpha = 36°$

*a)* Az *A* és *B* pont közti s távolságot a repülő egyenletesen gyorsuló mozgással teszi meg:

$$s = v_1 t + \frac{1}{2} a t^2.$$

Ugyanezen *t* idő alatt a hang $c \cdot t$ utat tesz meg, és az *A* pontból a megfigyelő fülébe jut.

Az ábra alapján

$$\sin \alpha = \frac{s}{ct} = \frac{v_1 t + \frac{a}{2} t^2}{ct} = \frac{v_1 + \frac{a}{2} t}{c}.$$

Ebből $at = 2(c \cdot \sin \alpha - v_1) =$

$$= 2 \left( 340 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \sin 36° - 164 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right) = 71,69 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

A repülő sebessége a *B* pontban

$$v_2 = v_1 + at = 164 \frac{\text{m}}{\text{s}} + 71,69 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 235,69 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

*9 pont*

*b)* Mivel $at > 0$, a repülőgép gyorsul.

*2 pont*

Megjegyzés: Látszik az *a)* megoldásból, hogy ha

$$v_1 > 340 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \sin 36° = 200 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

akkor a repülő lassulna.

*c)* Ha a repülő sebessége állandó, akkor

$$v = c \sin 36° = 200 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

*4 pont*