A MATEMATIKA tanítása

MÓDSZERTANI FOLYÓIRAT

2013/3

MOZAIK

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

módszertani folyóirat

Szerkesztőség:

Főszerkesztő:
Dr. Kosztolányi József

Szerkesztőség címe:
6723 Szeged, Debreceni u. 3/B
Tel.: (62) 470-101,
FAX: (62) 554-666

Kiadó:
MOZAIK Kiadó Kft.
Felelős kiadó:
Török Zoltán
Tördelőszerkesztő:
Kovács Attila
Borítóterv:
Szőke András

Megjelenik évente 4 alkalommal.

TARTALOM

Közlési feltételek:

A közlésre szánt kéziratokat e-mailen a kattila@mozaik.info.hu címre küldjék meg. A kéziratok lehetőleg ne haladják meg a 6-8 oldalt (oldalanként 30 sorban 66 leütés).

Kérjük, a kézirathoz csatoljanak egy rövid magyar nyelvű kivonatot és egy angol nyelvű Abstract-ot!

A rajzokat, ábrákat, táblázatokat és fényképeket külön fájlokban is kérjük mellékelni. (A szövegrészben pedig zárójelben utaljanak rá.)

Kérjük, hogy a szövegbeli idézések név- és évszámjelöléssel történjenek, míg a tanulmányok végén a felsorolt irodalmak alfabetikus sorrendben készüljenek.

Kérjük szerzőtársainkat, hogy a kéziratok beküldésével egyidejűleg szíveskedjenek közölni pontos címüket, munkahelyüket és beosztásukat.

Dr. Darvasi Gyula

Hogyan bontsunk összegre egy pozitív egész számot?

Egy pozitív egész szám összegre bontására több mód ismeretes ([2] 189. oldal), melyek közül az alábbiakban kettővel kívánunk részletesebben foglalkozni. Ez a probléma mindenki számára érdekes, jóllehet a felbontandó pozitív egész számok növekedésével egyre nagyobb kihívást jelent, hacsak nem áll rendelkezésünkre egy hatékony algoritmus.

Állapodjunk meg abban, hogy a továbbiakban a felbontással kapott összeg legalább kéttagú legyen, az összeg tagjainak számát ezen felbontás hosszának nevezzük, s két felbontást azonosnak tekintünk, ha azok csak az összeadandók sorrendjében térnek el egymástól. A felbontandó adott pozitív egész számot mindig n-nel, az n legnagyobb páratlan osztóját n^*-gal, az n pozitív osztóinak számát $d(n)$-nel, az n összes különböző felbontásainak számát az első és második módnál rendre $f(n)$-nel, illetve $g(n)$-nel, s az i-edik felbontás hosszát h_i-vel jelöljük, ahol az első módnál $1 \le i \le f(n)$, illetve a másodiknál $1 \le i \le g(n)$ áll fenn.

Az **első felbontási mód**nál az adott n pozitív egész számot egymást követő pozitív egész számok összegeként kívánjuk felírni. Ezt egy heurisztikus eljárás bemutatásával kezdjük, ahol a keresett legalább kéttagú összeg első tagjaként rendre az 1-et, a 2-t, s végül páros n-re az $\left(\frac{n}{2}-1\right)$-et, illetve páratlan n-re az $\frac{n-1}{2}$-t választva felírunk egymást követő pozitív egész számokból álló összegeket, majd közülük összegyűjtjük azokat, amelyek eredménye pontosan az adott n-nel egyenlő, s a többi összeget mind elvetjük. Ezen haditerv alapján vágjunk bele az első ötven pozitív egész szám felbontásainak megkeresésébe.

1 —

2 —

$3 = 1 + 2$

4 —

$5 = 2 + 3$

$6 = 1 + 2 + 3$

$7 = 3 + 4$

8 —

$$9 = \begin{cases} 2+3+4 \\ 4+5 \end{cases}$$

$10 = 1 + 2 + 3 + 4$

$11 = 5 + 6$

$12 = 3 + 4 + 5$

$13 = 6 + 7$

$14 = 2 + 3 + 4 + 5$

$$15 = \begin{cases} 1+2+3+4+5 \\ 4+5+6 \\ 7+8 \end{cases}$$

16 —

$17 = 8 + 9$

$$18 = \begin{cases} 3+4+5+6 \\ 5+6+7 \end{cases}$$

$19 = 9 + 10$

$20 = 2 + 3 + 4 + 5 + 6$

$$21 = \begin{cases} 1+2+3+4+5+6 \\ 6+7+8 \\ 10+11 \end{cases}$$

$22 = 4 + 5 + 6 + 7$

$23 = 11 + 12$

$24 = 7 + 8 + 9$

$$25 = \begin{cases} 3+4+5+6+7 \\ 12+13 \end{cases}$$

$26 = 5 + 6 + 7 + 8$

$27 = \begin{cases} 2+3+4+5+6+7 \\ 8+9+10 \\ 13+14 \end{cases}$

$28 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7$

$29 = 14 + 15$

$30 = \begin{cases} 4+5+6+7+8 \\ 6+7+8+9 \\ 9+10+11 \end{cases}$

$31 = 15 + 16$

32 —

$33 = \begin{cases} 3+4+5+6+7+8 \\ 10+11+12 \end{cases}$

$34 = 7 + 8 + 9 + 10$

$35 = \begin{cases} 2+3+4+5+6+7+8 \\ 5+6+7+8+9 \\ 17+18 \end{cases}$

$36 = \begin{cases} 1+2+3+4+5+6+7+8 \\ 11+12+13 \end{cases}$

$37 = 18 + 19$

$38 = 8 + 9 + 10 + 11$

$39 = \begin{cases} 4+5+6+7+8+9 \\ 12+13+14 \end{cases}$

$40 = 6 + 7 + 8 + 9 + 10$

$41 = 20 + 21$

$42 = 9 + 10 + 11 + 12$

$43 = 21 + 22$

$44 = 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9$

$45 = \begin{cases} 1+2+3+4+5+6+7+8+9 \\ 5+6+7+8+9+10 \\ 7+8+9+10+11 \\ 14+15+16 \\ 22+23 \end{cases}$

$46 = 10 + 11 + 12 + 13$

$47 = 23 + 24$

$48 = 15 + 16 + 17$

$49 = \begin{cases} 4+5+6+7+8+9+10 \\ 24+25 \end{cases}$

$50 = \begin{cases} 8+9+10+11+12 \\ 11+12+13+14 \end{cases}$

A felbontások elvégzése közben egyrészt megtapasztalhattuk, hogy ez az eljárás nem elég hatékony, másrészt az 1 nyilvánvalóan nem jöhet szóba, de kialakulhat az a sejtésünk is, miszerint a 2 pozitív egész kitevős hatványai sem írhatók fel legalább két egymást követő pozitív egész szám összegeként. Ennek a sejtésnek az igazolásához legyenek m és k pozitív egész számok úgy, hogy $n = 2^t$ $(0 < t \in \mathbb{Z})$ esetén $2^t = m + (m + 1) + \ldots + (m + k)$ teljesüljön, ahonnan $2^{t+1} = (2m + k)(k + 1)$ adódik, s így $t > 0$ miatt a jobb oldali szorzat mindkét tényezője páros lenne. Ez viszont soha nem teljesülhet, minthogy páros k-ra a $k + 1$, míg páratlan k-ra a $2m + k$ tényező páratlan. Tehát $n = 2^t$ $(0 \le t \in \mathbb{Z})$ esetén az n sosem írható fel legalább két egymást követő pozitív egész szám összegeként. Ez az állítás logikailag egyenértékű azzal, hogy ha egy pozitív egész számnak van ilyen felbontása, akkor ez a szám nem lehet 2-nek a hatványa ([4] 19. oldal, [1] 99. oldal).

A második felbontási eljáráshoz az $n = m + (m + 1) + \ldots + (m + k)$ egyenletet fogjuk adott $n \ge 3$ és rögzített $k > 0$ egész számok esetén m-re megoldani. Például $n = 45$ esetén az alábbi keresés vezet célba.

$k = 1 \Rightarrow m = (45 - 1) : 2 = 22 \Rightarrow$
$\Rightarrow 45 = 22 + 23$

$k = 2 \Rightarrow m = [45 - (1 + 2)] : 3 = 14 \Rightarrow$
$\Rightarrow 45 = 14 + 15 + 16$

$k = 3 \Rightarrow m = [45 - (1 + 2 + 3)] : 4 = 39/4 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ nem lehet

$k = 4 \Rightarrow m = [45 - (1 + 2 + 3 + 4)] : 5 = 7 \Rightarrow$
$\Rightarrow 45 = 7 + 8 + 9 + 10 + 11$

$k = 5 \Rightarrow$
$\Rightarrow m = [45 - (1 + 2 + 3 + 4 + 5)] : 6 = 5 \Rightarrow$
$\Rightarrow 45 = 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$

$k = 6 \Rightarrow$
$\Rightarrow m = [45 - (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6)] : 7 =$
$= 24/7 \Rightarrow$ nem lehet

$k = 7 \Rightarrow$
$\Rightarrow m = [45 - (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7)] : 8 =$
$= 17/8 \Rightarrow$ nem lehet

$k = 8 \Rightarrow$
$\Rightarrow m = [45 - (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8)] : 9 =$
$= 1 \Rightarrow 45 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9$

S minthogy $k \geq 9$ esetén már $m \leq 0$ adódik, ezért ez az eljárás véges lépésből áll, jóllehet több olyan lépést is tartalmaz, ami nem vezet megoldásra. Az n növekedésével az ilyen felesleges lépések száma egyre több lesz, tehát ez az eljárás sem elég hatékony.

A harmadik eljáráshoz tekintsük az $n = m + (m + 1) + ... + (m + k)$ előállításból adódó $(2m + k)(k + 1) = 2n$ diofantikus egyenletet, amit adott $n \geq 3$ egész szám esetén k-ra és m-re kívánunk megoldani. Példaként ismét $n = 45$-öt választva a keresés az alábbi esetekből áll.

1. eset: $\left.\begin{matrix} k+1=2 & \text{és} & 2m+k=45 \\ k=1 & & m=22 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$
$\Rightarrow 45 = 22 + 23$

2. eset: $\left.\begin{matrix} k+1=3 & \text{és} & 2m+k=30 \\ k=2 & & m=14 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$
$\Rightarrow 45 = 14 + 15 + 16$

3. eset: $\left.\begin{matrix} k+1=5 & \text{és} & 2m+k=18 \\ k=4 & & m=7 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$
$\Rightarrow 45 = 7 + 8 + 9 + 10 + 11$

4. eset: $\left.\begin{matrix} k+1=6 & \text{és} & 2m+k=15 \\ k=5 & & m=5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$
$\Rightarrow 45 = 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$

5. eset: $\left.\begin{matrix} k+1=9 & \text{és} & 2m+k=10 \\ k=8 & & m=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$
$\Rightarrow 45 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 +$
$+ 7 + 8 + 9$

Ezután $k + 1 \in \{10, 15, 18, 30\}$ esetén már $m \leq 0$ adódik, ezért ez az eljárás is véges, s jóllehet nem tartalmaz megoldást nem adó lépéseket, de nagyobb n-re egyre hosszadalmasabbá válik.

Mindezek után rátérünk egy sokkal hatékonyabb felbontási eljárás bemutatására, amihez az eddigiek alapján nem kell foglalkoznunk a 2 hatványaival. Ekkor mindig léteznek r és s pozitív egész számok úgy, hogy n felírható $r(2s + 1)$ alakban, ahol $2s + 1$ az n egyik 3-nál nem kisebb páratlan osztója. Vizsgáljuk meg külön-külön az $r > s$ és az $r \leq s$ eseteket.

Ha $r > s$, akkor az $n = r(2s + 1)$ alakból $n = \underbrace{(r + ... + r)}_{s} + r + \underbrace{(r + ... + r)}_{s}$, ahol a középső tagot változatlanul hagyva és a rá szimmetrikusakból ugyanannyit levonva, illetve hozzáadva $n = (r - s) + ... + (r - 1) + r + (r + 1) + ... + (r + s)$ adódik, ami az n-nek egy $2s + 1$ hosszúságú felbontása egymást követő pozitív egész számokra. Ha viszont $r \leq s$, akkor az $n = r(2s + 1) = r[s + (s + 1)]$ alakból $n = \underbrace{s + ... + s}_{r} + \underbrace{(s + 1) + ... + (s + 1)}_{r}$, ahol a középső két tagot változatlanul hagyva és a rájuk szimmetrikusakból ugyanannyit levonva, illetve hozzáadva $n = [s - (r - 1)] + ... + (s - 1) +$ $+ s + (s + 1) + (s + 2) + ... + (s + r)$ kapható, ami az n-nek egy $2r$ hosszúságú felbontása egymást követő pozitív egész számokra ([4] 20. oldal, [1] 100. oldal).

Ha tehát n nem 2 hatványa, akkor az előbbiek szerint egy minden esetben gyorsan célra vezető algoritmus birtokába jutottunk. Ehhez az n-et $r(2s + 1)$ alakba írjuk, ahol a második tényező n-nek egy 3-nál nem kisebb páratlan osztója. Ezután az $r > s$ vagy az $r \leq s$ esetek valamelyike alapján előállíthatjuk az n egyik felbontását. S ha ez a második tényező befutja az n-nek a 3-nál nem kisebb páratlan osztóit, akkor minden esetben egy-egy újabb felbontást kapunk. Ezáltal az n összes különböző felbontásainak száma egyenlő az n 3-nál nem kisebb páratlan osztóinak, vagyis az n legnagyobb páratlan osztója 1-től különböző osztóinak számával: $f(n) = d(n^*) - 1$. Tehát ez az algoritmus egy adott n pozitív egész szám esetén a következő: n-nek előállítjuk a prímtényezős felbontását, amiből meghatározzuk az n^*-gal jelölt legnagyobb páratlan osztóját, ezáltal az n különböző felbontásainak számát, majd az $n = r(2s + 1)$ alakhoz n^*-nak 1-nél nagyobb osztóit a $2s + 1$ tényezővel befuttatjuk, s végül az r és s közötti nagysági viszonynak megfelelően felírjuk az n felbontását egymást követő pozitív egész számokra ([1] 100–101. oldal, [4] 20. oldal). Mindezt az alábbi két példán mutatjuk be.

1. példa: $n = 2080 = 2^5 \cdot 5 \cdot 13$

$n^* = 5 \cdot 13 = 65$

$f(2080) = d(65) - 1 = 4 - 1 = 3$

$$2080 = \begin{cases} 32 \cdot 65 = 32 \cdot (2 \cdot 32 + 19) = 1 + 2 + \ldots + 64 & h_1 = 64 \\ 160 \cdot 13 = 160 \cdot (2 \cdot 6 + 1) = 154 + 155 + \ldots + 166 & h_2 = 13 \\ 416 \cdot 5 = 416 \cdot (2 \cdot 2 + 1) = 414 + 415 + \ldots + 418 & h_3 = 5 \end{cases}$$

2. példa: $n = 16704 = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 29$

$n^* = 3^2 \cdot 29 = 261$

$f(16704) = d(261) - 1 = 6 - 1 = 5$

$$16704 = \begin{cases} 64 \cdot 261 = 64 \cdot (2 \cdot 130 + 1) = 67 + \ldots + 194 & h_1 = 128 \\ 192 \cdot 87 = 192 \cdot (2 \cdot 43 + 1) = 149 + \ldots + 235 & h_2 = 87 \\ 576 \cdot 29 = 576 \cdot (2 \cdot 14 + 1) = 562 + \ldots + 590 & h_3 = 29 \\ 1856 \cdot 9 = 1856 \cdot (2 \cdot 4 + 1) = 1852 + \ldots + 1860 & h_4 = 9 \\ 5568 \cdot 3 = 5568 \cdot (2 \cdot 1 + 1) = 5567 + \ldots + 5569 & h_5 = 3 \end{cases}$$

További sejtések megfogalmazása végett tekintsük át még egyszer az első ötven pozitív egész szám felbontásait.

Észrevehető, hogy a 2-vel szorzás nem változtatja meg a felbontások számát. Ez az állítás valóban általánosan igaz, mivel n-nek és $2n$-nek ugyanaz a legnagyobb páratlan osztója: $f(2n) = d(n^*) - 1 = f(n)$.

Bármely páratlan prímszámnak pontosan egy felbontása van: ha ugyanis $n > 2$ prím, akkor $n^* = n$ miatt $f(n) = d(n) - 1 = 2 - 1 = 1$. Ez az egyetlen felbontás $n = 2m + 1$ $(0 < m \in \mathbb{Z})$ esetén $m + (m + 1)$ alakú. S minthogy 2-vel szorzáskor a felbontások száma nem változik, ezért a $2n = 4m + 2$ és $4n = 8m + 4$ egész számok egyetlen felbontása rendre az $(m - 1) + m + (m + 1) + (m + 2)$ illetve az $(m - 3) + (m - 2) + (m - 1) + m + (m + 1) + (m + 2) + (m + 3) + (m + 4)$ összeg, ahol $m > 1$, illetve $m > 3$ értendő. Ha viszont az $n = 2m + 1$ prímszámnak a 3-szorosát vagy az 5-szörösét tekintjük, akkor már három különböző felbontás adódik:

$$3n = 6m + 3 = \begin{cases} (3m+1) + (3m+2) \\ 2m + (2m+1) + (2m+2) \\ (m-2) + (m-1) + m + (m+1) + \\ + (m+2) + (m+3) \end{cases},$$

ahol $m > 2$, valamint $m > 4$ esetén

$$5n = 10m + 5 = \begin{cases} (5m+2) + (5m+3) \\ (2m-1) + 2m + (2m+1) + \\ + (2m+2) + (2m+3) \\ (m-4) + \ldots + m + \ldots + \\ + (m+4) + (m+5) \end{cases}.$$

Az $n = 2m + 1 \geq 3$ prímszámot más pozitív egész számokkal megszorozva hasonlóképpen rakhatók ki a felbontások, de ennek elvégzését már átengedjük az olvasónak. Itt jegyezzük meg, hogy ha $n = 2m + 1$ $(0 < m \in \mathbb{Z})$ összetett szám, akkor az $m + (m + 1)$ alakú felbontáson túl még továbbiak is léteznek: az első ötven pozitív egész számra adott felbontásainkból erre példaként $n \in \{9, 15, 21, 25, 27, 33, 35, 39, 45, 49\}$ lehet.

Példáink alapján a felbontások száma 1 és 5 között van, de bármely $c \geq 2$ egész szám esetén létezik olyan n pozitív egész szám, amelyre $f(n) = c$ teljesül. Ennek igazolásához legyen $n = p^c$, ahol p páratlan prím, s így $n^* = n$ miatt $f(n) = d(p^c) - 1 = (c + 1) - 1 = c$ adódik ([4] 21. oldal).

Egy pozitív egész szám legalább kéttagú összegre bontásának **második mód**jában az összeadandók egymást követő páratlan számok ([3] 107–114. oldal). Erre példaként tekintsük ismét az első ötven pozitív egész szám alábbi felbontásait.

1 —

2 —

3 —

$4 = 1 + 3$

5 —

6 —

7 —

$8 = 3 + 5$

$9 = 1 + 3 + 5$

10 —

11 —

$12 = 5 + 7$

13 —

14 —

$15 = 3 + 5 + 7$

$$16 = \begin{cases} 1 + 3 + 5 + 7 \\ 7 + 9 \end{cases}$$

17 —

18 —

19 —

$20 = 9 + 11$

$21 = 5 + 7 + 9$

22 —

23 —

$$24 = \begin{cases} 3 + 5 + 7 + 9 \\ 11 + 13 \end{cases}$$

$25 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9$

26 —

$27 = 7 + 9 + 11$

$28 = 13 + 15$

29 —

30 —

31 —

$$32 = \begin{cases} 5 + 7 + 9 + 11 \\ 15 + 17 \end{cases}$$

$33 = 9 + 11 + 13$

34 —

$35 = 3 + 5 + 7 + 9 + 11$

$$36 = \begin{cases} 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 \\ 17 + 19 \end{cases}$$

37 —

38 —

$39 = 11 + 13 + 15$

$$40 = \begin{cases} 7 + 9 + 11 + 13 \\ 19 + 21 \end{cases}$$

41 —

42 —

43 —

$44 = 21 + 23$

$$45 = \begin{cases} 5 + 7 + 9 + 11 + 13 \\ 13 + 15 + 17 \end{cases}$$

46 —

47 —

$$48 = \begin{cases} 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 \\ 9 + 11 + 13 + 15 \\ 23 + 25 \end{cases}$$

$49 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13$

50 —

Példáinkból észrevehető, hogy ha n páratlan prím, akkor n és $2n$ közül egyik sem jöhet szóba, viszont $4n = 2(2n)$-re már adódik egy $(2n - 1) + (2n + 1)$ alakú felbontás. S ha az n páratlan számnak legalább két nem feltétlenül különböző osztója van, akkor n-nek létezik, de $2n$-nek nincs ilyen felbontása.

Az első módnál leírt heurisztikus és diofantikus elgondolásokat átugorva most azonnal az általános algoritmus következik. Az adott n pozitív egész számnak egymást követő páratlan számokra történő, legalább kéttagú felbontása pontosan akkor lehetséges, ha $n = ab$ alakba írható, ahol a és b azonos paritású egész számok és $1 < a \le b$ teljesül ([3] 109. oldal). Ekkor ugyanis $1 + 3 + \ldots + (2a - 1) = a^2$ miatt

$n = ab = (ab - a^2) + a^2 = a(b - a) + [1 + 3 + ... + (2a - 1)] = (b - a + 1) + (b - a + 3) + ... + [\underbrace{(b-a)+(2a-1)}_{=a+b-1}]$, ami az n-nek egy $a > 1$ hosszúságú felbontása egymást követő páratlan számok összegére.

A különböző felbontások számának általános meghatározásához tekintsük az $n = p_1^{t_1} p_2^{t_2} ... p_k^{t_k}$ prímtényezős felbontást, ahol $p_1 < p_2 < ... < p_k$ prímszámok, $0 < k \in \mathbb{Z}$ és bármely $i \in \{1, 2, ..., k\}$-ra $0 < t_i \in \mathbb{Z}$, páratlan n-re minden p_i páratlan, míg páros n-re $p_1 = 2$ teljesül, továbbá négyzetszámra minden t_i páros és nem négyzetszámra legalább egy t_i páratlan. Ekkor az n osztóinak száma $d(n) = (t_1 + 1)(t_2 + 1)...(t_k + 1)$, ami páratlan, illetve páros aszerint, hogy az n négyzetszám, vagy nem négyzetszám. Mindebből már adódik, hogy a felbontások számának vizsgálata négy esetre bomlik ([3] 109–111. oldal).

Ha n páratlan szám, akkor egyrészt $n^* = n$, másrészt csak az 1 és n számokból álló osztópár nem megengedett; ennélfogva nem négyzetszámra $g(n) = \frac{d(n)-2}{2}$, míg négyzetszám esetén a $\sqrt{n} \cdot \sqrt{n}$ szorzat miatt $g(n) = \frac{[d(n)-2]+1}{2} = \frac{d(n)-1}{2}$ adódik.

Ha n páros szám, akkor $n^* = p_2^{t_2} ... p_k^{t_k}$ és $d(n^*) = (t_2 + 1)...(t_k + 1)$, továbbá az osztópárok közül ki kell hagyni azokat, melyek egyik tagja az n^* valamelyik osztója, ez a tag ugyanis páratlan, míg a másik tag páros. Így nem négyzetszámra $g(n) = \frac{d(n)}{2} - d(n^*)$, illetve négyzetszámra ismét a $\sqrt{n} \cdot \sqrt{n}$ szorzat miatt $g(n) = \frac{d(n)+1}{2} - d(n^*)$ kapható.

Az előbbi képletek alapján speciális esetként könnyen igazolható, hogy egyrészt bármely p prímszámra $g(p) = 0$, másrészt ha n páratlan prím és $0 < t \in \mathbb{Z}$, akkor $g(2^t \cdot n) = t - 1$, továbbá páros t-re $g(2^t) = \frac{t}{2}$ és páratlan t-re $g(2^t) = \frac{t-1}{2}$.

Egy adott n pozitív egész számra ezen felbontás algoritmusa a következő: előállítjuk az n prímtényezős felbontását, meghatározzuk a felbontások $g(n)$ számát, megkeressük az n egyező paritású azon a és b rendezett osztópárjait, amelyekre $n = ab$ és $1 < a \le b$ teljesül, s végül felírjuk a $(b - a + 1) + (b - a + 3) + ... + (a + b - 1)$ alakú keresett felbontást. Erre az alábbiakban négy példát mutatunk be aszerint, hogy az adott pozitív egész szám páratlan és nem négyzetszám, páratlan és négyzetszám, valamint páros és nem négyzetszám, illetve páros és négyzetszám.

1. példa: n páratlan és nem négyzetszám

$n = 1197 = 3^2 \cdot 7 \cdot 19$

$d(1197) = 3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$

$$g(1197) = \frac{d(1197)-2}{2} = \frac{12-2}{2} = 5$$

$ab \in \{1 \cdot 1197, 3 \cdot 399, 7 \cdot 171, 9 \cdot 133, 19 \cdot 63, 21 \cdot 57\}$

$$1197 = \begin{cases} 3 \cdot 399 = 397 + 399 + 401 & h_1 = 13 \\ 7 \cdot 171 = 165 + 167 + ... + 177 & h_2 = 7 \\ 9 \cdot 133 = 125 + 127 + ... + 141 & h_3 = 9 \\ 19 \cdot 63 = 45 + 47 + ... + 81 & h_4 = 19 \\ 21 \cdot 57 = 37 + 39 + ... + 77 & h_5 = 21 \end{cases}$$

2. példa: n páratlan és négyzetszám

$n = 2025 = 3^4 \cdot 5^2 = 45^2$

$d(2025) = 5 \cdot 3 = 15$

$$g(2025) = \frac{d(2025)-1}{2} = \frac{15-1}{2} = 7$$

$ab \in \{1 \cdot 2025, 3 \cdot 675, 5 \cdot 405, 9 \cdot 225, 15 \cdot 135, 25 \cdot 81, 27 \cdot 75, 45 \cdot 45\}$

$$2025 = \begin{cases} 3 \cdot 675 = 673 + 675 + 677 & h_1 = 3 \\ 5 \cdot 405 = 401 + 403 + ... + 409 & h_2 = 5 \\ 9 \cdot 225 = 217 + 219 + ... + 233 & h_3 = 9 \\ 15 \cdot 135 = 121 + 123 + ... + 149 & h_4 = 15 \\ 25 \cdot 81 = 57 + 59 + ... + 105 & h_5 = 25 \\ 27 \cdot 75 = 49 + 51 + ... + 101 & h_6 = 27 \\ 45 \cdot 45 = 1 + 3 + ... + 89 & h_7 = 45 \end{cases}$$

3. példa: n páros és nem négyzetszám

$n = 6776 = 2^3 \cdot 7 \cdot 11^2 = 45^2$

$d(6776) = 4 \cdot 2 \cdot 3 = 24$

$n^* = 7 \cdot 11^2 = 847$

$d(847) = 2 \cdot 3 = 6$

$$g(6776) = \frac{d(6776)}{2} - d(847) = \frac{24}{2} - 6 = 6$$

$ab \in \{1 \cdot 6776,\ 2 \cdot 3388,\ 4 \cdot 1694,\ 7 \cdot 968,\ 8 \cdot 847,\ 11 \cdot 616,\ 14 \cdot 484,\ 22 \cdot 308,\ 28 \cdot 242,\ 44 \cdot 154,\ 56 \cdot 121,\ 77 \cdot 88\}$

$$6776 = \begin{cases} 2 \cdot 3388 = 3387 + 3389 & h_1 = 2 \\ 4 \cdot 1694 = 1691 + 1693 + \ldots + 1697 & h_2 = 4 \\ 14 \cdot 484 = 471 + 473 + \ldots + 497 & h_3 = 14 \\ 22 \cdot 308 = 287 + 289 + \ldots + 329 & h_4 = 22 \\ 28 \cdot 242 = 215 + 217 + \ldots + 269 & h_5 = 28 \\ 44 \cdot 154 = 111 + 113 + \ldots + 197 & h_6 = 44 \end{cases}$$

4. példa: n páros és négyzetszám

$n = 2704 = 2^4 \cdot 13^2 = 52^2$

$d(2704) = 5 \cdot 3 = 15$

$n^* = 13^2 = 169$

$d(169) = 3$

$$g(2704) = \frac{d(2704) - 1}{2} - d(169) = \frac{15 + 1}{2} - 3 = 5$$

$ab \in \{1 \cdot 2704,\ 2 \cdot 1352,\ 4 \cdot 676,\ 8 \cdot 338,\ 13 \cdot 208,\ 16 \cdot 169,\ 26 \cdot 104,\ 52 \cdot 52\}$

$$2704 = \begin{cases} 2 \cdot 1352 = 1351 + 1353 & h_1 = 2 \\ 4 \cdot 676 = 673 + 675 + 677 + 679 & h_2 = 4 \\ 8 \cdot 338 = 331 + 333 + \ldots + 345 & h_3 = 8 \\ 26 \cdot 104 = 79 + 81 + \ldots + 129 & h_4 = 26 \\ 52 \cdot 52 = 1 + 3 + \ldots + 103 & h_5 = 52 \end{cases}$$

Ennél a felbontási módnál is igaz, hogy bármely $c \geq 2$ egész szám esetén létezik olyan n pozitív egész szám, amelyre $g(n) = c$ teljesül. Ha ugyanis p tetszőleges prím, akkor nem négyzetszámot kívánva legyen $n = p^{2c+1}$, míg négyzetszámra $n = p^{2c}$. Ekkor $p > 2$ esetén n páratlan, $p = 2$ esetén n páros, s az állítás a $g(n)$-re adott képletekkel számolva ellenőrizhető.

Ezzel a bevezetőben említett két felbontási mód bemutatásának végére értünk, s most abban reménykedünk, hogy az olvasó kedvet kapott más felbontási módok megismeréséhez.

Irodalom

[1] Tom M. Apostol: Sums of consecutive positive integers. The Mathematical Gazette, March 2003, Vol. 87, No. 508

[2] Ivan Niven – Herbert S. Zuckerman: Bevezetés a számelméletbe. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1978

[3] Orosz Gyuláné: Partíciók páratlan számokkal. Acta Acad. Paed. Agriensis, Sectio Mathematicae 29 (2002)

[4] Robert W. Prielipp – Norbert J. Kuenzi: Sums of consecutive positive integers. Mathematics Teacher, January 1975, Vol. 68, No. 1

Összefoglaló

Egy pozitív egész számnak egymást követő pozitív egész, valamint egymást követő páratlan számok összegére bontására ismertetünk általános algoritmusokat. Egyúttal megadjuk a felbonthatóság feltételét, a felbontások számát és hosszát; mindezt példákkal is bemutatva.

It's how to give general algorithms for writing a positive integer as a sum of consecutive positive integers or consecutive odd integers. The conditions of this type of partitions, moreover their number and length are shown; demonstrated by some examples.

Fülöp Zsolt

A tanár előnye a matematikai indukció tanítása során

Kutatási tevékenységem szerves részét képezi azoknak a matematikai feladatoknak, problémáknak a vizsgálata, amelyek megoldását kettős látásmódban közelíthetjük meg: elemi matematikai ismeretekkel, amelyek a diák rendelkezésére állnak, illetve olyan felsőbb matematikai eszköztárral, amelylyel a diák még nem rendelkezik, a főiskolai vagy egyetemi képzés része, viszont ezen ismeretek a tanár rendelkezésére állnak. Ilyen értelemben egy problémát vagy feladatot megközelíthetünk „diák-eszköztárral", illetve „tanár-eszköztárral", ugyanakkor beszélhetünk „diák-megoldásról", illetve „tanár-megoldásról" is. Nagyon sok esetben egy matematikai problémára a „tanár-megoldás" gyors választ ad, viszont olyan matematikai eszköztárat feltételez, amely nem áll a diák rendelkezésére, ugyanakkor diákjaink számára nem is magyarázhatjuk el. Ebben az esetben a tanár kidolgozza a „diák-megoldást" is, amely az esetek többségében több kreativitást igényel és szebb a „tanár-megoldásnál". A „diák-megoldást" a diák is megtalálhatja vagy önállóan, vagy pedig a tanár irányításával. A matematika tanításában a tanár előnyét a többlettudása képezi, amelyet változatos formában képes kamatoztatni az oktatási folyamat során. A „tanár-megoldás" és „diák-megoldás" kettősségével, illetve a feladatok kettős látásmódban való megközelítésével találkozhatunk Szalay István egyik cikkében is [Szalay, 2011].

Tekintsünk például egy, a 12. osztályos tankönyvben szereplő feladatot [Kosztolányi et al, 2006]:

1. feladat: *Bizonyítsuk be, hogy*:

$$17 \mid 2^{5n+3} + 5^n \cdot 3^{n+2}$$

A „diák-megoldás": A feladat megoldását a diákok a teljes indukció módszerével végzik. $n = 1$ esetén az állítás igaz, mert $2^8 + 5 \cdot 3^3 = 23 \cdot 17$.

Tegyük fel, hogy egy n számra igaz az állítás. Állítjuk, hogy $(n + 1)$-re is igaz marad, vagyis $17 \mid 2^{5n+8} + 5^{n+1} \cdot 3^{n+3}$. Alakítsuk át az állításban szereplő kifejezést a következő módon:

$$2^{5n+8} + 5^{n+1} \cdot 3^{n+3} = 32 \cdot 2^{5n+3} + 15 \cdot 5^n \cdot 3^{n+2} = 15 \cdot (2^{5n+3} + 5^n \cdot 3^{n+2}) + 17 \cdot 2^{5n+3}.$$

Ennek az összegnek az első tagja az indukciós feltevés szerint osztható 17-tel, a második tagja pedig egy egész szám 17-szerese, ezért osztható 17-tel. Mivel az összeg mindkét tagja 17-tel osztható, így az állítás igaz.

Ugyanerre a feladatra egy lehetséges „tanár-megoldás" a következő:

$$2^5 \equiv 15 \pmod{17},$$

tehát

$$2^{5n} \equiv 15^n \pmod{17},$$

amelyből következik, hogy

$$2^{5n+3} + 5^n \cdot 3^{n+2} = 2^{5n} \cdot 2^3 + 15^n \cdot 3^2 \equiv 17 \cdot 15^n \equiv 0 \pmod{17}.$$

A „tanár-megoldás" feltételezi a maradékosztályok fogalmának ismeretét, amellyel a középiskolás diákok nem rendelkeznek (itt természetesen nem a speciális matematika osztályok diákjaira gondolok). Felvetődik a kérdés, hogy ebben az esetben milyen formában jelent előnyt a tanári többlettudás, ha azt a diákkal nem tudjuk közölni, ugyanakkor létezik egy olyan „diák-megoldás", amely könnyen tanítható. Nagyon sok matematikatanár szakot végzett hallgató vélekedik úgy, hogy az egyetemen szerzett többlettudásnak a tanári munkájában kevés hasznát látja, legfeljebb a matematikai gondolkodásmódjának kialakításában, illetve a saját látókörének szélesítésében játszik szerepet. A tanári többlettudás viszont nemcsak konkrét feladatok megoldásában nyújt segítséget, hanem a diák számára újnak tűnő feladatok megalkotásában is. A tanár általában tankönyvből vagy feladatgyűjteményből válogat feladatokat oktató munkájához, viszont a tanári munka része lehet az olyan feladatok vagy feladatcsaládok megalkotása, amelyek a feladatgyűjteményekben esetleg nem találhatók. Ebben az esetben a tanár önálló, kreatív munkában hasznosíthatja a saját többlettudását, és az újonnan alkotott feladatokat a tanórákon kitűzheti, ahol „diák-módszerrel" oldják meg.

A továbbiakban bemutatjuk, hogy milyen módon alkothat a tanár az 1. feladathoz hasonló feladatokat. A tanári többlettudás segítségével belátható, hogy:

$$5^2 \equiv 2 \equiv 2^4 \cdot 3 \pmod{23}, \tag{1}$$

tehát

$$5^{2n} \equiv 2^n \equiv 2^{4n} \cdot 3^n \pmod{23}. \tag{2}$$

Célunk keresni olyan a, b és c számokat, melyekre érvényes, hogy $a + b + c \equiv 0 \pmod{23}$, mivel ebben az esetben

$$a \cdot 5^{2n} + b \cdot 2^n + c \cdot 2^{4n} \cdot 3^n \equiv$$
$$\equiv (a + b + c) \cdot 2^n \equiv 0 \pmod{23}.$$

Minden ilyen számhármas megtalálása egy újabb feladat megfogalmazásával egyenértékű.

Példaként tekintsük a következőket:

$a = 5$, $b = 4$, $c = 12$

$$23 \mid 5^{2n+1} + 2^{n+2} + 2^{4n+2} \cdot 3^{n+1}$$

$a = 1$, $b = 1$, $c = 21$

$$23 \mid 5^{2n} + 2^n + 7 \cdot 2^{4n} \cdot 3^{n+1}$$

$a = 3$, $b = 16$, $c = 4$

$$23 \mid 3 \cdot 5^{2n} + 2^{n+4} + 2^{4n+2} \cdot 3^n$$

További feladatokhoz jutunk, ha a (2) kifejezésben a kitevőt változtatjuk, például:

$$5^{2(n-1)} \equiv 2^{n-1} \equiv 2^{4(n-1)} \cdot 3^{n-1} \pmod{23}.$$

Ebben az esetben paramétereknek az $a = 5$, $b = 4$, $c = 12$ értékeket adva adódik, hogy

$$23 \mid 5^{2n-1} + 2^{n+1} + 2^{4n-2} \cdot 3^n.$$

Tehát egy alapötletből kiindulva, melyet jelen esetben az (1) összefüggés jelent, a tanár képes megalkotni egy olyan feladatot, amelyben az a, b és c paraméterek szerepelnek. Ezeknek a paramétereknek konkrét értékeket adva egy feladatcsalád keletkezik. Láthattuk, hogy a feladatcsaládot tovább szélesíthetjük azáltal, hogy a (2) kifejezésben a hatványkitevőt változtatjuk.

Minden, az (1) összefüggéshez hasonló, maradékosztályokkal kapcsolatos összefüggés egy újabb feladatcsaládot jelent. Az olvasóra bízzuk olyan feladatcsaládok megalkotását, amelyek alapját a következő összefüggések képezik:

1) $2^3 \equiv 3^3 \pmod{19}$
2) $11 \equiv 12^2 \pmod{133}$
3) $2^7 \equiv 3^2 \cdot 5^4 \pmod{23}$

A következőkben tekintsünk egy romániai középiskolás feladatgyűjteményben szereplő feladatot [Nicolescu, 1990].

2. feladat: *Bizonyítsuk be, hogy bármely $n \geq 1$ esetén:*

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \binom{n}{6} + \ldots = 2^{\frac{n}{2}} \cdot \cos\frac{n \cdot \pi}{4},$$

$$\binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \binom{n}{7} + \ldots = 2^{\frac{n}{2}} \cdot \sin\frac{n \cdot \pi}{4}$$

A „tanár-megoldás": a tanár viszonylag könnyen bizonyíthatja az összefüggéseket deduktív úton. Az $(1 + i)^n$ kifejezést trigonometrikus alakba írva, majd alkalmazva a Moivre-képletet kapjuk, hogy

$$(1+i)^n = \left[\sqrt{2} \cdot \left(\cos\frac{\pi}{4} + i \cdot \sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^n =$$

$$= 2^{\frac{n}{2}} \cdot \left(\cos\frac{n \cdot \pi}{4} + i \cdot \sin\frac{n \cdot \pi}{4}\right). \tag{3}$$

Ugyanakkor a binomiális tétel alkalmazásával és a tagok megfelelő csoportosításával adódik:

$$(1+i)^n = 1 - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \binom{n}{6} + \ldots +$$
$$+i\cdot\left[\binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \binom{n}{7} + \ldots\right]. \qquad (4)$$

A (3) és (4) összefüggések bármely $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ esetén érvényesek. A valós és az imaginárius részeket egyenlővé téve adódik, hogy

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \binom{n}{6} + \ldots = 2^{\frac{n}{2}} \cdot \cos\frac{n\cdot\pi}{4}, \qquad (5)$$

$$\binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \binom{n}{7} + \ldots = 2^{\frac{n}{2}} \cdot \sin\frac{n\cdot\pi}{4}. \qquad (6)$$

A „diák-megoldás”: a diák a teljes indukció módszerével igazolhatja a fenti összefüggéseket. A viszonylag bonyolult számítások során alkalmazza, „működteti” kombinatorikai és trigonometriai összefüggésekkel kapcsolatos ismereteit.

$n = 1$ esetén mindkét összefüggés igaz, mivel

$$\binom{1}{0} = 2^{\frac{1}{2}} \cdot \cos\frac{\pi}{4} \quad \text{és} \quad \binom{1}{1} = 2^{\frac{1}{2}} \cdot \sin\frac{\pi}{4}.$$

Tegyük fel, hogy egy n számra igazak az (5) és (6) állítások. Állítjuk, hogy $(n+1)$-re is igaz marad mindkét összefüggés. Tekintsük bizonyítandó állításként az (5) összefüggést $(n+1)$-re:

$$\binom{n+1}{0} - \binom{n+1}{2} + \binom{n+1}{4} - \binom{n+1}{6} + \ldots =$$
$$= 2^{\frac{n+1}{2}} \cdot \cos\frac{(n+1)\cdot\pi}{4}.$$

Alakítsuk a bal oldalt:

$$\binom{n+1}{0} - \binom{n+1}{2} + \binom{n+1}{4} - \binom{n+1}{6} + \ldots =$$
$$= \binom{n}{0} - \binom{n}{1} - \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \binom{n}{4} - \ldots =$$
$$= \left[\binom{n}{0} - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \ldots\right] - \left[\binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \ldots\right] =$$
$$= 2^{\frac{n}{2}} \cdot \cos\frac{n\cdot\pi}{4} - 2^{\frac{n}{2}} \cdot \sin\frac{n\cdot\pi}{4} =$$
$$= 2^{\frac{n}{2}} \cdot \left[\cos\frac{n\cdot\pi}{4} - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{n\cdot\pi}{4}\right)\right] =$$
$$= 2^{\frac{n+1}{2}} \cdot \cos\frac{(n+1)\cdot\pi}{4}.$$

A fenti levezetésben felhasználtuk az indukciós feltevést, vagyis azt, hogy egy n számra igazak az (5) és (6) állítások.

A (6) összefüggés „diák-módszerrel” történő igazolása a fentiekhez hasonlóan oldható meg.

A „tanár-megoldás” úgy is tekinthető, mint egy feladatot alkotó módszer, vagyis a tanár kiindulva az $(1+i)^n$ kifejezés kétféle felírásából, levezeti a 2. feladatban bizonyítandó összefüggéseket, majd a diákok számára kitűzi egy olyan bizonyítási feladatként, amelyet a teljes indukció módszerével lehet megoldani. Ugyanakkor a „tanár-megoldás” gondolatmenetét továbbfejlesztve újabb feladatokhoz juthatunk, ezáltal létrehozva egy másik feladatcsaládot. Tekintsük például a következő összefüggéseket:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \binom{n}{6} + \ldots = 2^{n-1} \qquad (7)$$

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \binom{n}{7} + \ldots = 2^{n-1}. \qquad (8)$$

A (7) és (5) összefüggéseket összeadva, illetve kivonva, valamint a (8) és (6) összefüggéseket összeadva, illetve kivonva újabb feladatokhoz juthatunk.

3. feladat: *Bizonyítsuk be, hogy bármely $n \geq 1$ esetén*:

a) $$\binom{n}{0} + \binom{n}{4} + \binom{n}{8} + \ldots = \frac{1}{2}\cdot\left(2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\cdot\pi}{4} + 2^{n-1}\right)$$

b) $$\binom{n}{2} + \binom{n}{6} + \binom{n}{10} + \ldots = \frac{1}{2}\cdot\left(-2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\cdot\pi}{4} + 2^{n-1}\right)$$

c) $$\binom{n}{1} + \binom{n}{5} + \binom{n}{9} + \ldots = \frac{1}{2}\cdot\left(2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{n\cdot\pi}{4} + 2^{n-1}\right)$$

d) $$\binom{n}{3} + \binom{n}{7} + \binom{n}{10} + \ldots = \frac{1}{2}\cdot\left(-2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{n\cdot\pi}{4} + 2^{n-1}\right)$$

A binomiális tételt alkalmazva az $(1+\varepsilon_i)^n$ felbontására ($i = 1, 2, 3$), ahol ε_1, ε_2, illetve ε_3 a harmadik egységgyököket jelentik, majd felhasználva az egységgyökök közötti összefüggéseket (a számítások részletes elvégzését az olvasóra bízzuk) a tanár a következő feladatokat alkothatja meg.

4. feladat: *Bizonyítsuk be, hogy bármely $n \geq 1$ esetén:*

a) $$\binom{n}{0}+\binom{n}{3}+\binom{n}{6}+\ldots=\frac{1}{3}\cdot\left(2^n+2\cdot\cos\frac{n\cdot\pi}{3}\right)$$

b) $$\binom{n}{1}+\binom{n}{4}+\binom{n}{7}+\ldots=\frac{1}{3}\cdot\left(2^n+2\cdot\cos\frac{(n-2)\cdot\pi}{3}\right)$$

c) $$\binom{n}{2}+\binom{n}{5}+\binom{n}{8}+\ldots=\frac{1}{3}\cdot\left(2^n+2\cdot\cos\frac{(n-4)\cdot\pi}{3}\right)$$

A következő feladat megtalálható tankönyvben [Kosztolányi et al., 2006], illetve feladatgyűjteményben [Gerőcs et al., 2005].

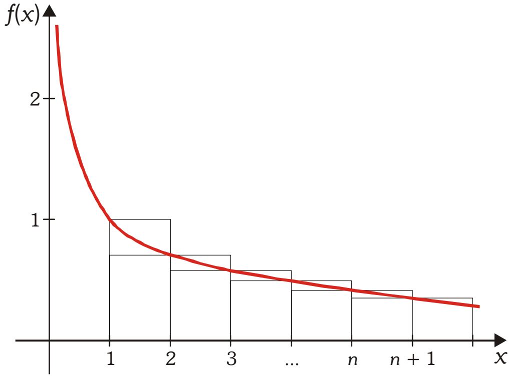
5. feladat: *Bizonyítsuk be a következő egyenlőtlenséget bármely n pozitív egész számra:*

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}\geq\sqrt{n}.$$

A feladatban szereplő egyenlőtlenséget lehet teljes indukcióval igazolni, de sokkal egyszerűbb módszer is létezik. Az egyenlőtlenség bal oldalának minden tagját, azaz n darabot helyettesítsük a legkisebbel, vagyis az utolsóval, így a következő összefüggéshez jutunk:

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}\geq\frac{n}{\sqrt{n}}=\sqrt{n}.$$

Próbáljunk meg egy olyan nehezebb feladatot alkotni, amely esetében nem létezik ennyire egyszerű módszer a teljes indukció módszerének az elkerülésére. Tekintsük a következő ábrát, amely az $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ függvény grafikonjának egy részletét tartalmazza.



1. ábra

Az $\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ összeg a függvény grafikonja alatti, az $x = 1$ és $x = n$ abszcisszájú pontok között lévő téglalapok területeinek összegét jelenti, ezért érvényes a következő összefüggés:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}<\int_1^n\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx=2\cdot\sqrt{n}-2,$$

amelyet átrendezve kapjuk, hogy:

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\cdot\sqrt{n}-1$$

minden $n \geq 2$ esetén.

A következőkben tekintsük azokat az $x = 1$ és $x = n + 1$ abszcisszájú pontok között lévő téglalapokat, amelyek a függvény grafikonját a belsejükben tartalmazzák. Ezeknek a téglalapoknak a területösszege $1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}$, tehát érvényes a következő összefüggés:

$$\int_1^{n+1}\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx=2\cdot\sqrt{n+1}-2<1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Az eddigieket összefoglalva a tanár a következő feladatot tűzheti ki a diákok számára:

6. feladat: *Bizonyítsuk be a következő egyenlőtlenségeket bármely $n \geq 2$ természetes számra:*

$$2\cdot\left(\sqrt{n+1}-1\right)<1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\cdot\sqrt{n}.$$

A 6. feladat „diák-megoldása” a teljes indukció alkalmazásával történhet. „Tanár-megoldásnak” tekinthető az előzőekben ismertetett levezetés, amelynek segítségével eljutottunk az egyenlőtlenséghez. Ebben az esetben is érvényes, hogy a „tanár-megoldás” valójában egy új feladatcsalád megalkotását jelenti, ugyanis az $f(x)$ függvényt változtatva és az előző gondolatmenetet alkalmazva olyan egyenlőtlenségekhez juthatunk, amelyeket a tanár a tanórán kitűzhet, a diák pedig a teljes indukció alkalmazásával megoldja. Tekintsünk néhány feladatot ebből a feladatcsaládból.

1) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ választással adódik:

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<\frac{2\cdot n-1}{n}$$

bármely $n \geq 2$ esetén.

2) $f(x)=\dfrac{1}{x^3}$ választással adódik:

$$1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\ldots+\frac{1}{n^3}<\frac{3\cdot n^2-1}{2\cdot n^2}$$

bármely $n \geq 2$ esetén.

3) $f(x) = x^3$ választással adódik:

$$\frac{n^4-1}{4}<1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3<\frac{(n+1)^4-1}{4}$$

bármely $n \geq 2$ esetén.

A fenti egyenlőtlenségek levezetését, illetve hasonló feladatok megalkotását az olvasóra bízzuk.

Tekintsük a következő romániai feladatgyűjteményben található feladatot [Cosnita et al, 1989]:

7. feladat: *Bizonyítsuk be, hogy bármely $0 < a < b$ és $n \geq 2$, egész esetén érvényes, hogy*

$$n\cdot(b-a)\cdot a^{n-1}<b^n-a^n<n\cdot(b-a)\cdot b^{n-1}.$$

A „diák-megoldás”: a teljes indukció módszerét alkalmazzuk.

$n = 2$ esetén az állítás igaz, mert $2 \cdot (b - a) \cdot a < b^2 - a^2 < 2 \cdot (b - a) \cdot b$ a $0 < a < b$ feltétel értelmében.

Tegyük fel, hogy egy n számra igaz az állítás. Állítjuk, hogy $(n + 1)$-re is igaz marad, vagyis

$$(n+1)\cdot(b-a)\cdot a^n<b^{n+1}-a^{n+1}<$$
$$<(n+1)\cdot(b-a)\cdot b^n.$$

A bal oldali egyenlőtlenséget igazoljuk, a jobb oldali egyenlőtlenség igazolása hasonlóan történik.

$$(n+1)\cdot(b-a)\cdot a^n=$$
$$=n\cdot(b-a)\cdot a^{n-1}\cdot a+(b-a)\cdot a^n<$$
$$<(b^n-a^n)\cdot a+(b-a)\cdot a^n<$$
$$<b\cdot(b^n-a^n)+(b-a)\cdot a^n=b^{n+1}-a^{n+1}$$

A „tanár-megoldás”: tekintsük az $f(x) = x^n$ függvényt, és az $[a; b] \subset \mathbb{R}$ intervallumot. Mivel az $f(x)$ függvény folytonos a véges és zárt $[a; b]$ intervallumon és differenciálható az $]a; b[$ intervallumon, ezért a Lagrange-tétel értelmében létezik $c \in]a; b[$ úgy, hogy $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$, amelyből következik az $n\cdot c^{n-1}=\dfrac{b^n-a^n}{b-a}$ összefüggés. Ugyanakkor $a < c < b$ miatt $a^{n-1} < c^{n-1} < b^{n-1}$, így adódnak a következő egyenlőtlenségek:

$$a^{n-1}<\frac{1}{n}\cdot\frac{b^n-a^n}{b-a}<b^{n-1}.$$

A kettős egyenlőtlenség minden tagját a pozitív $n \cdot (b - a)$-val szorozva adódik a 7. feladat állítása.

A feladat „tanár-megoldásánál” felhasznált gondolatmenetet követve, valamint az $f(x)$ függvényt változtatva a tanár képes hasonló feladatok megalkotására. Például az $f(x) = \sin(n \cdot x)$ folytonos egy tetszőleges $[a; b]$ intervallumon és differenciálható az $]a; b[$ intervallumon, ezért a Lagrange-tétel értelmében létezik $c \in]a; b[$ úgy, hogy:

$$n\cdot\cos(n\cdot c)=\frac{\sin(n\cdot b)-\sin(n\cdot a)}{\sin b-\sin a}.$$

Az $a = 0$ és $0 < b$ választással kapjuk, hogy:

$$|\sin(n \cdot b)| = |n \cdot \cos(n \cdot c) \cdot \sin b| =$$
$$= n \cdot |\cos(n \cdot c)| \cdot |\sin b| \leq n \cdot |\sin b|$$

Tehát a tanár kijelölheti a következő feladatot:

8. feladat: *Bizonyítsuk be, hogy bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén érvényes, hogy:*

$$|\sin(n \cdot x)| \leq n \cdot |\sin x|.$$

A feladat megalkotásának gondolatmenete egyben a feladat „tanár-megoldásával” egyenértékű, a „diák-megoldás” a teljes indukció módszerével történik.

$n = 1$ esetén az állítás igaz, mert

$$|\sin x| \leq 1 \cdot |\sin x|.$$

Tegyük fel, hogy egy n számra igaz az állítás. Állítjuk, hogy $(n + 1)$-re is igaz marad, vagyis

$$|\sin(n+1) \cdot x| \leq (n+1) \cdot |\sin x|.$$

A bizonyításhoz a középiskolában tanult trigonometrikus összefüggéseket és az indukciós feltevést alkalmazzuk.

$$|\sin(n+1) \cdot x| =$$
$$= |\sin(n \cdot x) \cdot \cos x + \cos(n \cdot x) \cdot \sin x| \leq$$
$$\leq |\sin(n \cdot x) \cdot \cos x| + |\cos(n \cdot x) \cdot \sin x| \leq$$
$$\leq |\sin(n \cdot x)| + |\sin x| \leq |n \cdot \sin x| + |\sin x| =$$
$$= (n+1) \cdot |\sin x|$$

A tanári megoldások és gondolatmenetek hasznosak új feladatok alkotása céljából, viszont bizonyos esetekben ezekkel óvatosan kell bánni. Kovács Béla egy cikkében [Kovács, 2011] rámutatott a matematikai indukció buktatóira, illetve kiemelte, hogy nem mindig a matematikai indukció a legkönnyebb út egy bizonyítási feladat megoldására. A továbbiakban fontosnak tartanánk azt is hangsúlyozni, hogy a tanár által alkotott és a tanórán kijelölt feladat mindig olyan legyen, hogy azt „diák-módszerrel” is meg lehessen oldani. Ugyanakkor, ha a tanár a matematikai indukció begyakorlására tűz ki feladatokat, az a legcélszerűbb, hogy a matematikai indukció legyen a legegyszerűbb (pontosabban a diák számára a legkézenfekvőbb) módszer a feladat megoldására, még akkor is, ha esetleg léteznek más módszerek. Mindenképpen kerülni kell az olyan csapdákat, hogy a tanár a saját eszköztárával megalkot egy feladatot, melyre esetleg nem létezik „diák-megoldás”, vagy ha létezik is, akkor nagyon bonyolult. Tekintsük például a következő „tanár-módszerrel” alkotott feladatot.

Legyenek az $x^n - 1 = 0$ egyenlet gyökei $x_k = \cos\frac{2 \cdot (k-1) \cdot \pi}{n} + i \cdot \sin\frac{2 \cdot (k-1) \cdot \pi}{n}$, ahol $k = 1; 2; \ldots; n$. A gyöktényezős felbontás alkalmazásával:

$$x^n - 1 = (x-1) \cdot \left(x - \cos\frac{2 \cdot \pi}{n} - i \cdot \sin\frac{2 \cdot \pi}{n}\right) \cdot \ldots \cdot$$
$$\cdot \left(x - \cos\frac{2 \cdot (n-1) \cdot \pi}{n} - i \cdot \sin\frac{2 \cdot (n-1) \cdot \pi}{n}\right)$$

$$\frac{x^n - 1}{x - 1} = \left(x - \cos\frac{2 \cdot \pi}{n} - i \cdot \sin\frac{2 \cdot \pi}{n}\right) \cdot \ldots \cdot$$
$$\cdot \left(x - \cos\frac{2 \cdot (n-1) \cdot \pi}{n} - i \cdot \sin\frac{2 \cdot (n-1) \cdot \pi}{n}\right).$$

Vegyük még figyelembe, hogy

$$\frac{x^n - 1}{x - 1} = x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1.$$

Az utóbbi két egyenlőség jobb oldalait egyenlővé téve és az $x = 1$ helyettesítést alkalmazva kapjuk, hogy

$$n = \left(1 - \cos\frac{2 \cdot \pi}{n} - i \cdot \sin\frac{2 \cdot \pi}{n}\right) \cdot \ldots \cdot$$
$$\cdot \left(1 - \cos\frac{2 \cdot (n-1) \cdot \pi}{n} - i \cdot \sin\frac{2 \cdot (n-1) \cdot \pi}{n}\right),$$

amelyből a Moivre-képlet és a megfelelő trigonometrikus azonosságok alkalmazása után adódik a

$$\sin\frac{\pi}{n} \cdot \sin\frac{2 \cdot \pi}{n} \cdot \sin\frac{3 \cdot \pi}{n} \cdot \ldots \cdot \sin\frac{(n-1) \cdot \pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$$

összefüggés.

Tehát a tanár a saját eszközeivel levezet egy összefüggést, melyet a diákoknak a következőképpen jelölhetne ki:

9. feladat: *Bizonyítsuk be a következő összefüggést:*

$$\sin\frac{\pi}{n}\cdot\sin\frac{2\cdot\pi}{n}\cdot\sin\frac{3\cdot\pi}{n}\cdot\ldots\cdot\sin\frac{(n-1)\cdot\pi}{n}=\frac{n}{2^{n-1}}$$

ahol $n\geq 2$.

A feladat kitűzésének a hibája, hogy a diák a matematikai indukció segítségével nem tudja bizonyítani, tehát értelmetlennek tűnik kitűzni a feladatot, még akkor is, ha a „tanár-eszköztár" alkalmas arra, hogy egy ilyen feladatot a tanár megalkosson. Ennek ellenére a feladat nem teljesen érdektelen. Pólya György a matematikai indukció technikájának ismertetése során számos példán keresztül mutatja be, hogy miként juthatunk el induktív úton egy sejtés megfogalmazásához, amelyet később teljes indukcióval bizonyítunk [Pólya, 1988]. Ugyanakkor a 9. feladat kitűzése helyett a tanár kijelölhet egy olyan feladatot, hogy próbáljunk sejtéseket megfogalmazni a $\sin\frac{\pi}{n}\cdot\sin\frac{2\cdot\pi}{n}\cdot\sin\frac{3\cdot\pi}{n}\cdot\ldots\cdot\sin\frac{(n-1)\cdot\pi}{n}$ szorzatra vonatkozóan, majd a diák az $n=2, 3, \ldots, 10$ esetek vizsgálatával (trigonometriai és geometriai ismeretekre támaszkodva) helyesen fogalmazhat meg sejtéseket induktív úton, tehát a diák gyakorolhatja az induktív sejtés megfogalmazásának technikáját, ez pedig hasznos még akkor is, ha a sejtés helyességét nem tudja igazolni. A jelen írásban bemutatott feladatok többségéből az is kitűnik, hogy a tanári eszköztár alkalmas arra, hogy a tanár deduktív úton összefüggéseket vezessen le, amelyeket a diák teljes indukcióval bizonyít, ebben az esetben a diák csak a demonstratív fázisban vesz részt.

Jelen írás célja rávilágítani azokra az előnyökre, amit a tanári többlettudás jelent a matematikai indukció tanítása során. Amint láthattuk, a tanári eszköztár bősége lehetővé teszi a tanár számára olyan megoldási módszerek alkalmazását, amelyek a diák számára nem elérhetők, ugyanakkor bizonyos esetekben segítséget jelenthetnek a „diák-megoldás" kidolgozásában. A tipikus „tanár-megoldások" igazi előnye viszont abban rejlik, hogy az ott fellelhető gondolatokat a tanár hatékonyan alkalmazhatja új feladatok megalkotására, amelyek a tanár önálló, kreatív munkájának gyümölcsei. Viszont a tanári eszköztárat óvatosan kell kezelni, nem szabad olyan feladatokat kitűzni a diákok számára, amelyek „tanár-megoldása" viszonylag egyszerűnek tűnik, ugyanakkor a „diák-megoldás" nehézkes vagy nagy mennyiségű számolást igényel. Emiatt tanítási szempontból mindenképpen szükséges, hogy a tanár a saját eszköztárával megalkotott feladatokat mindig megoldja a „diák-módszerek" segítségével is, mielőtt tanórán kitűzné azokat.

Irodalomjegyzék:

[1] Cosnita C., Turtoiu F.: Probleme de algebra. Bucuresti: Editura Tehnica, 1989

[2] Kosztolányi József – Pintér Klára – Kovács István – Urbán János – Vincze István: Sokszínű matematika 12. Szeged, Mozaik Kiadó, 2006

[3] Gerőcs László – Orosz Gyula – Paróczay József – Szászné Simon Judit: Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I. Budapest, Nemzeti Tankönyvkiadó, 2005

[4] Kovács Béla: Indukcióbuktató: Bizonyítás indukcióval, vagy mégsem? A matematika tanítása 19. évf. 3. sz. Szeged, Mozaik Kiadó, 2011

[5] Nicolescu C. P.: Sinteze de matematica. Bucuresti, Editura Albatros,1990

[6] Pólya György: A matematikai gondolkodás művészete I. kötet: Indukció és analógia. Budapest, Gondolat Kiadó

[7] Szalay István: A tanár előnye: a felsőbb matematikai módszerek ismerete és az általánosítás készsége. Polygon XX. évf. 1. sz. Szeged, Polygon Kiadó, 2011

Dr. Ringler András

Amin Pythagorasz is csodálkozna

Az első n pozitív egész szám négyzetének összege akkor és csakis akkor lesz négyzetszám, ha $n = 24$ (*A matematika tanítása* 2013/1, 12–18.). Éppen ezért az első 24 szám m egészszám-szorosai négyzetének az összege is négyzetszám lesz:

$$\sum_{k=0}^{24} (m \cdot k)^2 = m^2 \cdot \sum_{k=0}^{24} k^2 = m^2 \cdot 4900 = (m \cdot 70)^2.$$

Az egyszerűség kedvéért legyen $m = 3$. Így most az egymást követő, a 0-val együtt 25 tagból álló véges sorozat tagjai rendre: 0, 3, 6, 9, ..., 66, 69, 72. Ezen 25 tagból álló sorozat közepén az $x = 3 \cdot 12 = 36$ van. Most arra vagyok kíváncsi, hogy a számegyenesnek egy másik régiójában, vagyis egy $x \neq 36$ egész szám körül szimmetrikusan vajon létezhet-e az $x \neq 36$ számmal együtt egy szintén 25 tagból álló,

$$x-36,\ x-33,\ x-30,\ \ldots,\ x-6,\ x-3,\ x,$$
$$x+3,\ x+6,\ \ldots,\ x+30,\ x+33,\ x+36$$

alakú sorozat, amelynek tagjai négyzetének az összege négyzetszám. Ha léteznének ilyen tulajdonságokkal rendelkező számsorozatok, akkor annak Pythagorasz – bizonyára – nagyon örülne.

Tegyük fel, hogy létezik legalább egy, ilyen tulajdonságokkal rendelkező sorozat, vagyis teljesül a Pythagorasz-tételre emlékeztető

$$(x-36)^2 + (x-33)^2 + \ldots + (x-3)^2 + x^2 +$$
$$+ (x+3)^2 + \ldots + (x+33)^2 + (x+36)^2 = y^2 \quad (*)$$

egyenlőség, amelyből a négyzetre emelések, majd a rendezések elvégzése után a

$$25 \cdot x^2 + 2 \cdot (3^2 + 6^2 + 9^2 + \ldots + 33^2 + 36^2) =$$
$$= 25 \cdot x^2 + 2 \cdot 9 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 11^2 + 12^2) =$$
$$= 25 \cdot x^2 + 2 \cdot 9 \cdot \frac{12 \cdot 13 \cdot 25}{6} =$$
$$= 25 \cdot x^2 + 36 \cdot 13 \cdot 25 = y^2$$

kifejezéshez jutunk. Mivel a feltételezésünk szerint ez az egyenlőség teljesül, ezért az y számnak $y = 5 \cdot u$ alakú számnak kell lennie, ezért az ilyen alakú y számmal a

$$25 \cdot x^2 + 36 \cdot 13 \cdot 25 = y^2 = 25 \cdot u^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2 + 36 \cdot 13 = u^2$$

egyenlőséghez jutunk. Vegyük észre, hogy ez az egyenlőség csak azonos paritású x és u egész számok esetén állhat fenn, ezért vizsgálataink első lépéseként tegyük fel, hogy az x és az u számok párosak, a második esetként pedig, hogy páratlanok.

1. eset: Az $x = 2 \cdot a$ és az $u = 2 \cdot w$ alakú páros egész számokkal

$$x^2 + 36 \cdot 13 = 4 \cdot a^2 + 36 \cdot 13 = u^2 = 4 \cdot w^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a^2 + 9 \cdot 13 = w^2 \Rightarrow 117 = w^2 - a^2$$

adódik. Minkét oldalt szorzattá bontva:

$$1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 13 = (w-a) \cdot (w+a).$$

A $(w - a)$ és a $(w + a)$ tényezők a következő tulajdonságokkal rendelkezhetnek:

a) eset: $1 \cdot 117 = (w-a) \cdot (w+a)$,
$\Rightarrow w - a = 1$ és $w + a = 117$;

b) eset: $3 \cdot 39 = (w-a) \cdot (w+a)$,
$\Rightarrow w - a = 3$ és $w + a = 39$;

c) eset: $9 \cdot 13 = (w-a) \cdot (w+a)$,
$\Rightarrow w - a = 9$ és $w + a = 13$;

d) eset: $13 \cdot 9 = (w-a) \cdot (w+a)$,
$\Rightarrow w - a = 13$ és $w + a = 9$;

e) eset: $39 \cdot 3 = (w-a) \cdot (w+a)$,
$\Rightarrow w - a = 39$ és $w + a = 3$;

f) eset: $117 \cdot 1 = (w-a) \cdot (w+a)$,
$\Rightarrow w - a = 117$ és $w + a = 1$.

Az *a) eset* $w - a = 1$ *és* $w + a = 117$ egyenleteinek megoldásával a

$$w = 59 \Rightarrow a = 58 \Rightarrow x = 2 \cdot a = 116 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow u = 2w = 118 \Rightarrow y = 5 \cdot u = 590$$

értékekhez jutunk, így a számegyenesen az $x = 116$ körül szimmetrikusan elhelyezkedő, a 116-tal együtt 25 szám rendre:

$$80, 83, 86, \ldots, 110, 113, 116, 119, 122, \ldots,$$
$$146, 149, 152.$$

Ezen számok négyzeteinek az összege négyzetszám: $y^2 = 590^2 = 348100$.

A *b) eset* $w - a = 3$ *és* $w + a = 39$ egyenleteinek megoldásával a

$$w = 21 \Rightarrow a = 18 \Rightarrow x = 2 \cdot a = 36 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow u = 2w = 42 \Rightarrow y = 5 \cdot u = 210$$

értékekhez jutunk, így a számegyenesen az $x = 36$ körül szimmetrikusan elhelyezkedő, a 36-tal együtt 25 szám rendre:

$$0, 3, 6, 9, 12, \ldots, 30, 33, 36, 39, 42, \ldots,$$
$$66, 69, 72.$$

Ezen számok négyzeteinek az összege négyzetszám: $y^2 = 210^2 = 44100 = 9 \cdot 4900 = (3 \cdot 70)^2$. Vegyük észre, hogy ezen sorozat tagjai (a 0-val együtt) az első 25 egész szám háromszorosai: az $x = 12$ körüli, a 12-vel együtt 25 egymást követő egész szám háromszorosai.

A *c) eset* $w - a = 9$ *és* $w + a = 13$ egyenleteinek megoldásával a

$$w = 11 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow x = 2 \cdot a = 4 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow u = 2w = 22 \Rightarrow y = 5 \cdot u = 110$$

értékekhez jutunk, így a számegyenesen az $x = 4$ körül szimmetrikusan elhelyezkedő, a 4-gyel együtt 25 szám rendre:

$$-32, -29, -26, \ldots, -2, 1, 4, 7, 10, \ldots,$$
$$34, 37, 40.$$

Ezen számok négyzeteinek az összege négyzetszám: $y^2 = 110^2 = 12100$.

A *d) eset* $w - a = 13$ *és* $w + a = 9$ egyenleteinek megoldásával a

$$w = 11 \Rightarrow a = -2 \Rightarrow x = 2 \cdot a = -4 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow u = 2w = 22 \Rightarrow y = 5 \cdot u = 110$$

értékekhez jutunk, így a számegyenesen az $x = -4$ körül szimmetrikusan elhelyezkedő, a –4-gyel együtt 25 szám rendre:

$$-40, -37, -34, \ldots, -10, -7, -4, -1, 2, \ldots,$$
$$26, 29, 32.$$

Ezen számok négyzeteinek az összege négyzetszám: $y^2 = 110^2 = 12100$. Látható, hogy ezen sorozat tagjai a *c) eset* tagjainak ellentettjeiként állnak elő.

Az *e) eset* $w - a = 39$ *és* $w + a = 3$ egyenleteinek megoldásával a

$$w = 21 \Rightarrow a = -18 \Rightarrow x = 2 \cdot a = -36 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow u = 2w = 42 \Rightarrow y = 5 \cdot u = 210$$

értékekhez jutunk, így a számegyenesen az $x = -36$ körül szimmetrikusan elhelyezkedő, a –36-tal együtt 25 szám rendre:

$$-72, -69, -66, \ldots, -42, -39, -36, -33, -31, \ldots,$$
$$-9, -6, -3, 0.$$

Ezen számok négyzeteinek az összege négyzetszám: $y^2 = 210^2 = 44100 = (3 \cdot 70)^2$. Látható, hogy a mostani sorozat tagjai a *b) eset* tagjainak ellentettjeiként állnak elő.

Az *f) eset* $w - a = 117$ *és* $w + a = 1$ egyenleteinek megoldásával a

$$w = 59 \Rightarrow a = -58 \Rightarrow x = 2 \cdot a = -116 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow u = 2w = 118 \Rightarrow y = 5 \cdot u = 590$$

értékekhez jutunk, így a számegyenesen az $x = -116$ körül szimmetrikusan elhelyezkedő, a –116-tal együtt 25 szám rendre:

$$-152, -149, -146, \ldots, -121, -119, -116,$$
$$-113, -110, \ldots, -86, -83, -80.$$

Ezen számok négyzeteinek az összege négyzetszám: $y^2 = 590^2 = 348100$. Látható, hogy ezen sorozat tagjai az *a) eset* tagjainak ellentettjeiként állnak elő.

Ha megengedjük, hogy az *a)–f)* esetekben a felsorolt tényezők negatívak is lehetnek, akkor visszakapjuk az egyes esetek sorozatainak ellentettjeit. Ezt csak az *a) eset* kapcsán mutatom meg. Ha $w - a = -1$ és $w + a = -117$ is lehet, akkor e két egyenlet megoldásával a

$$w = -59 \Rightarrow a = -58 \Rightarrow x = 2 \cdot a = -116 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow u = 2w = -118 \Rightarrow y = 5 \cdot u = -590$$

értékekhez jutunk. Így a számegyenesen az előjelváltások miatt az $x = -116$ körül szimmetrikusan elhelyezkedő, a –116-tal együtt 25 szám rendre:

$$-152, -149, -146, \ldots, -121, -119, -116,$$
$$-113, -110, \ldots, -86, -83, -80.$$

Ezen számok négyzeteinek az összege is négyzetszám: $y^2 = (-590)^2 = 348100$.

2. eset. Az $x = 2 \cdot a + 1$ és az $u = 2 \cdot w + 1$ alakú páratlan egész számokkal az

$$x^2 + 36 \cdot 13 = 4 \cdot a^2 + 4 \cdot a + 1 + 468 =$$
$$= u^2 = 4 \cdot w^2 + 4 \cdot w + 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4 \cdot a^2 + 4 \cdot a + 468 = 4 \cdot w^2 + 4 \cdot w \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a^2 + a + 117 = w^2 + w \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a \cdot (a + 1) + 117 = w \cdot (w + 1)$$

adódik. Vegyük észre, hogy az utolsó egyenlőség ellentmondást mutat. Bal oldalán páratlan, a jobb oldalán viszont páros kifejezés van. Ez az ellentmondás nyilván azt jelenti, hogy a (*) egyenlőség páratlan x számokkal nem állhat fenn, vagyis páratlan x szám körül szimmetrikusan nem létezik 12–12 darab, $x \pm 3 \cdot n$ (n = 1, 2, 3, ..., 11, 12) alakú, az x számmal együtt 25 darab egymást követő egész szám, amelyek négyzeteinek az összege négyzetszám lenne. A (*) egyenlőség tehát csak páros x számokkal, mégpedig csak a bemutatott

$$x = 116,\ x = 36,\ x = 4,$$
$$x = -4,\ x = -36,\ x = -116$$

számokkal teljesülhet.

Összefoglalás

A bemutatott

a) 80, 83, 86, ..., 110, 113, 116, 119, 122, ..., 146, 149, 152;

b) 0, 3, 6, 9, 12, ..., 30, 33, 36, 39, 42, ..., 66, 69, 72;

c) –32, –29, –26, ..., –2, 1, 4, 7, 10, ..., 34, 37, 40;

d) –40, –37, –34, ..., –10, –7, –4, –1, 2, ..., 26, 29, 32;

e) –72, –69, –66, ..., –42, –39, –36, –33, –31, ..., –9, –6, –3, 0;

f) –152, –149, –146, ..., –121, –119, –116, –113, –110, ..., –86, –83, –80

sorozatok tagjai négyzetének az összege négyzetszámot ad:

a) $80^2 + 83^2 + 86^2 + \ldots + 116^2 + \ldots + 146^2 + 149^2 + 152^2 = 590^2 = 348100$;

b) $0^2 + 3^2 + 6^2 + 9^2 + \ldots + 36^2 + \ldots + 66^2 + 69^2 + 72^2 = 210^2 = 44100$;

c) $(-32)^2 + (-29)^2 + (-26)^2 + \ldots + (4)^2 + \ldots + (34)^2 + (37)^2 + (40)^2 = 110^2 = 12100$;

d) $(-40)^2 + (-37)^2 + (-34)^2 + \ldots + (-4)^2 + \ldots + (26)^2 + (29)^2 + (32)^2 = 110^2 = 12100$;

e) $(-72)^2 + (-69)^2 + (-66)^2 + \ldots + (-36)^2 + \ldots + (-9)^2 + (-6)^2 + (-3)^2 + 0^2 = 210^2 = 44100$;

f) $(-152)^2 + (-149)^2 + (-146)^2 + \ldots + (-116)^2 + \ldots + (-86)^2 + (-83)^2 + (-80)^2 = 590^2 = 348100$.

Igen-igen valószínű, hogy ezekkel a tényekkel Pythagorasz is elégedett lenne.

Summary

The sum of the squared values of the members of the *a)–f)* series is equal to a squared value (see it (them) above). It is very-very probable that with these facts also Pythagoras would be satisfied.

Dr. Darvasi Gyula

Szerkesszünk körhöz érintőt!

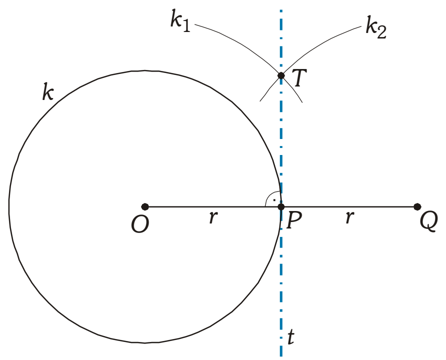
A körhöz egy adott pontjában, vagy egy külső pontból húzható érintő megszerkesztésére kívánunk többféle megoldást bemutatni, amihez mindig adott lesz egy kör a középpontjával együtt, s bármely további alakzat (pont, egyenes, kör, …) ezen kör síkjában lévőnek értendő.

Az olyan egyenest, amelynek a körrel csak egy közös pontja van, a kör érintőjének nevezzük, a közös pontot pedig érintési pontnak. Ebből az értelmezésből következik az érintő alapvető tulajdonsága, ami szerint a kör bármely érintője merőleges az érintési pontba húzható sugárra ([4] 92. oldal, [6] 90. oldal). Ennek megfordításaként az is bizonyítható, hogy ha egy egyenes merőleges a kör valamely sugarára és illeszkedik annak a középponttól különböző végpontjára, akkor ez az egyenes ebben a pontban érinti a kört. Mindezek alapján egy egyenes akkor és csak akkor érintője egy körnek, ha az egyenesnek a középponttól mért távolsága egyenlő a kör sugarával. S minthogy egy egyenesre egy rá illeszkedő pontban egyértelműen állítható merőleges, ezért a kör bármely pontjában egyetlen érintő húzható, amelynek az érintési ponttól különböző összes többi pontja a körön kívül van, s így a kör mindig az érintő egyik oldalán helyezkedik el.

Az érintőre adott szerkesztések mindegyikéhez tartozni fog egy-egy ábra, amelyhez kapcsolódva megadjuk a szerkesztés menetét és bizonyítását, de a vázlat megrajzolását és az elemzés elvégzését átengedjük az olvasónak. Az O középpontú és r sugarú körre mindvégig megtartjuk a $k := k(O, r)$ jelölési módot.

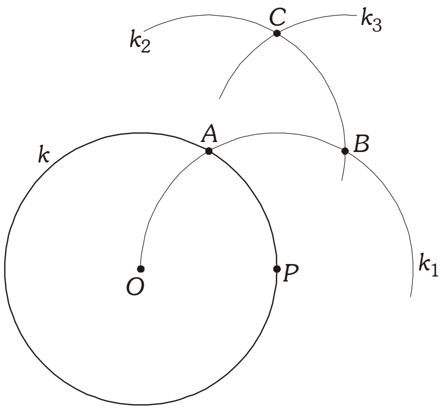
Elsőként a $k(O, r)$ kört egy adott P pontjában érintő t egyenes megszerkesztésével foglalkozunk, ami megoldható körzővel és vonalzóval (1. ábra), csak körzővel (2. ábra), vagy csak vonalzóval (3. ábra).

Ha körzővel és beosztás nélküli egyélű vonalzóval kívánunk szerkeszteni, akkor előbb az $\overrightarrow{OP}$ félegyenesen $O-P-Q$ és $PQ = r$ feltétellel előállítjuk a Q pontot (vagyis Q az O-nak P-re vonatkozó tükörképe), s ezután az O és Q pontban r-nél nagyobb sugárral megrajzolt k_1 és k_2 körívek T metszéspontját P-vel összekötve az $\overline{OQ}$ szakasz felezőmerőlegesét kapjuk, ami egyúttal a keresett t érintő, minthogy merőleges az $\overline{OP}$ sugárra és áthalad annak az O középponttól különböző P végpontján.



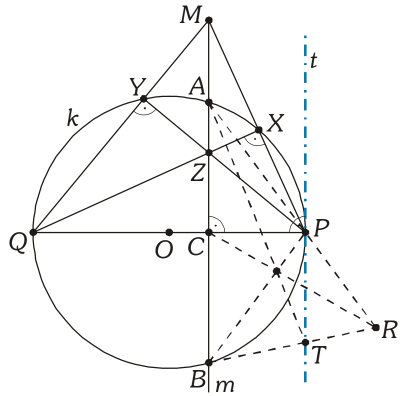
1. ábra

Ha az érintő megszerkesztéséhez csak a körző megengedett, akkor előbb rajzoljunk egy $k_1(P, r)$ félkört, ami a k kört az A pontban metszi, ezután egy $k_2(A, r)$ körívet, ami k_1-et a B pontban metszi, s végül egy $k_3(B, r)$ körívet, ami a k_2 kört C-ben metszi; ekkor $\overleftrightarrow{CP}$ egyenes a keresett t érintő. Ugyanis a $\overleftrightarrow{CP}$ egyenes felezőmerőlegese az $\overline{AB}$ szakasznak, ami az $OABP$ rombusznak az $\overline{OP}$-vel párhuzamos oldala, s ennélfogva $P \in \overleftrightarrow{CP}$ és $\overleftrightarrow{CP} \perp \overline{OP}$ is teljesül. Megjegyezhető még, hogy az A és B pontok megszerkesztése után a C pont előállításához megrajzolt k_2 és k_3 körívek sugara r-től különböző is lehet, de mindenképpen nagyobb legyen az r sugár felénél.



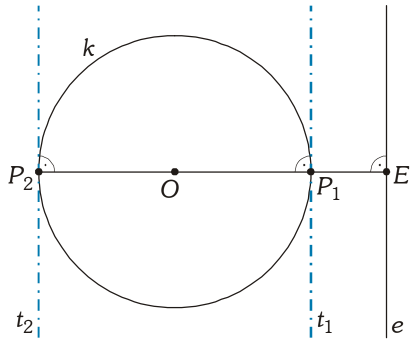
2. ábra

Ha csak a beosztás nélküli egyélű vonalzó használható, akkor előbb egy $M \notin k \cup \overleftrightarrow{OP}$ pontból az $\overleftrightarrow{OP}$-re m merőlegest állítunk úgy, hogy $P \notin m$ teljesüljön. Ehhez legyen Q a P-vel átellenes pont, X és Y a $\overline{PM}$ és $\overline{QM}$ szakaszoknak k-val alkotott közös pontjai, továbbá Z a $\overleftrightarrow{PY}$ és $\overleftrightarrow{QX}$ egyenesek metszéspontja, ami a $PQM_\triangle$ háromszög magasságpontja, s így az $m = \overleftrightarrow{MZ}$ egyenes a $\overline{PQ}$ oldalhoz tartozó magasságvonal ([5] 95. oldal Exercise 5.5, [7] 53. oldal). Ekkor m a k kört A és B pontokban metszi, miközben az $\overline{AB}$ húr C felezőpontját az $\overleftrightarrow{OP}$ egyenes tartalmazza. Tehát az m egyenesen ismert az $\overline{AB}$ szakasz és annak C felezőpontja, s így az m-re nem illeszkedő P ponton át m-mel párhuzamos szerkeszthető, amihez a P pontot összekötjük A-val és B-vel, majd az $\overrightarrow{AP}$ félegyenesen $A - P - R$ feltétellel felvett R pontot összekötjük B-vel és C-vel, a $\overline{BP}$ és $\overline{CR}$ szakaszok S metszéspontját összekötjük A-val, megrajzoljuk az $\overleftrightarrow{AS}$ egyenest, ami $\overline{BR}$ szakaszt a T pontban metszi úgy, hogy $t = \overleftrightarrow{PT}$ egyenes a szerkesztendő párhuzamos ([1] 185. oldal, [5] 73. oldal, [7] 38. oldal). Ez a t párhuzamos a keresett érintő egyenes, mivel a konstrukció miatt t áthalad a P ponton és párhuzamos az $\overline{OP}$-re merőleges m egyenessel, s így $t \perp \overline{OP}$ is teljesül.

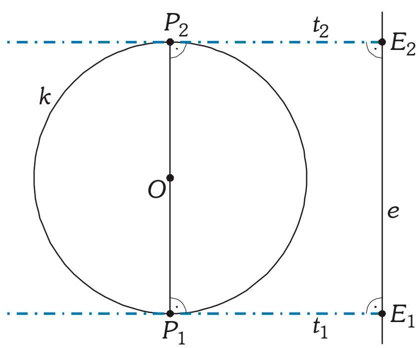


3. ábra

Egy körhöz adott egyenessel párhuzamosan, illetve adott egyenesre merőlegesen két-két érintő húzható: a két érintési pont az egyenesre merőleges, illetve az egyenessel párhuzamos átmérő két végpontja (4. és 5. ábra).

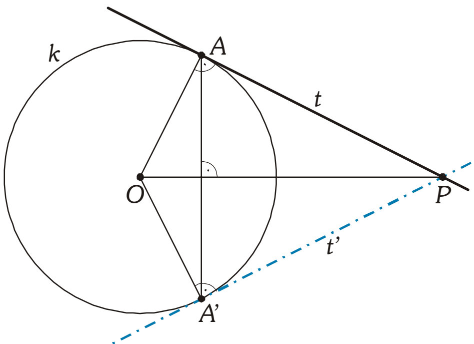


4. ábra



5. ábra

Mindezek után legyen t a $k(O, r)$ kör A pontbeli érintője és P a t-nek egy A-tól különböző pontja (6. ábra). Ekkor egyrészt P a k-nak külső pontja, másrészt az $\overleftrightarrow{OP}$ egyenesre vonatkozó tükrözést tekintve (a tükrözés illeszkedés-, távolság- és szögmértéktartó tulajdonsága miatt) a t' egyenes az A' pontban érinti a k kört. Ezáltal a k körhöz a P külső pontból már két érintő húzható, de további érintő nem létezik, mert az OPA és OPA' derékszögű háromszögeket OP és $OA' = OA = r$ egyértelműen meghatározza ([4] 96. oldal). Az $\overleftrightarrow{OP}$-re vonatkozó tükrözésből adódik még, hogy a $\overline{PA}$ és $\overline{PA'}$ érintőszakaszok egyenlő hosszúak, s az érintési pontokat összekötő $\overline{AA'}$ húrt merőlegesen felezi az $\overleftrightarrow{OP}$ egyenes. A továbbiakban a $k(O, r)$ körhöz egy P külső pontból húzható két érintő megszerkesztésére kívánunk bemutatni többféle megoldást, amelyekre az érintési pontokat mindig A és B jelöli, s az adott szerkesztési menetek ezen pontok előállításával zárulnak. Megjegyezzük, hogy az $\overleftrightarrow{OP}$-re vonatkozó szimmetria miatt elegendő csak a $\overleftrightarrow{PA}$ érintőre szerkesztési menetet és bizonyítást adni.

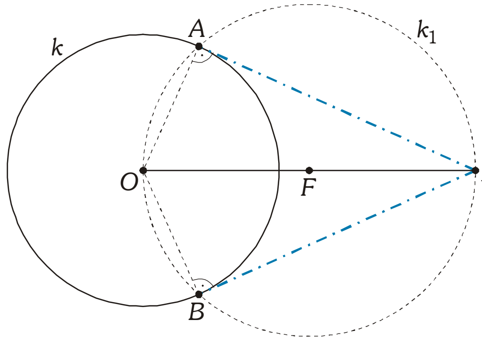


6. ábra

1. mód

Szerkesszük meg az $\overline{OP}$ szakasz F felezőpontját, majd a $k_1(F, OF)$ kört (7. ábra), ami a k körvonalat az A és B pontokban metszi.

Az OPA háromszög A csúcsa illeszkedik az $\overline{OP}$ átmérőjű k_1 körre, s így a Thalész-tétel miatt $m(OAP\sphericalangle) = 90°$, azaz $\overleftrightarrow{PA} \perp \overline{OA}$ teljesül ([4] 161. oldal).

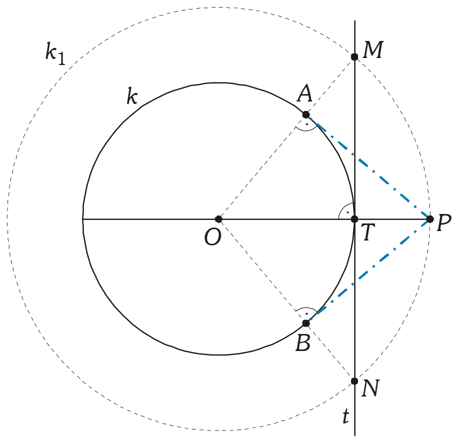


7. ábra

2. mód

Húzzuk meg az $\overline{OP}$ szakaszt, ami a k kört egy T pontban metszi (8. ábra). Rajzoljuk meg a $k_1(O, OP)$ kört és szerkesszünk T-ben k-hoz t érintőt: k_1 és t közös pontjait jelölje M és N. Húzzuk meg az $\overline{OM}$ és $\overline{ON}$ szakaszokat, amelyek a k kört az A és B pontokban metszik.

$OP = OM$, $OA = OT$ és $m(POA\sphericalangle) = m(MOT\sphericalangle)$ miatt $OPA_\triangle \cong OMT_\triangle$, s így a megfelelő szögek egyenlők: $m(OAP\sphericalangle) = m(OTM\sphericalangle) = 90°$, azaz $\overleftrightarrow{PA} \perp \overline{OA}$ teljesül ([2] III. 17. Tétel, [3] 17–18. oldal).



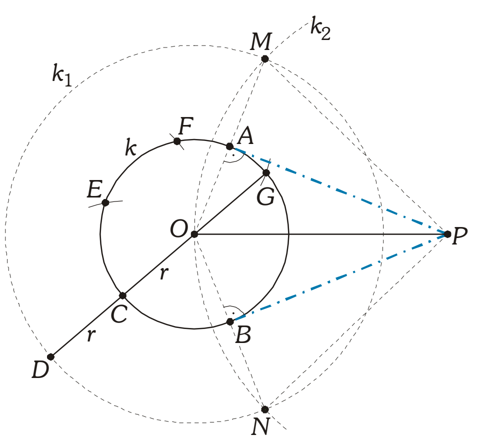
8. ábra

3. mód

Legyen C a k kör tetszőleges pontja (9. ábra), húzzuk meg az $\overrightarrow{OC}$ félegyenest, C-re tükrözzük az O pontot, s ha a képet D jelöli, akkor

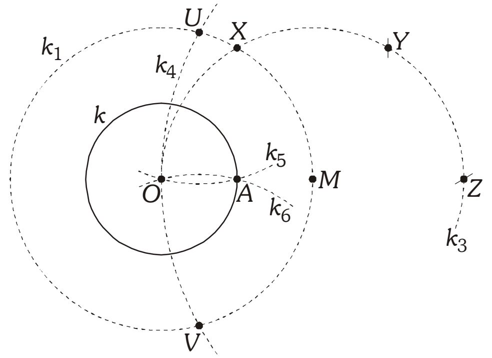
$OD = 2r$. Rajzoljuk meg a $k_1(O, OD)$ és $k_2(P, OP)$ köröket, amelyek az M és N pontokban metszik egymást. Húzzuk meg az $\overline{OM}$ és $\overline{ON}$ szakaszokat, amelyek a k kört az A, illetve B pontban metszik.

$OP = MP$ miatt az OMP háromszög egyenlő szárú, melyre A az $\overline{OM}$ alap felezőpontja, s így a $\overline{PA}$ súlyvonal egyúttal magasság is ([4] 55. oldal, [6] 48–49. oldal), azaz $\overleftrightarrow{PA} \perp \overleftrightarrow{OA}$ teljesül.



9. ábra

Az $\overline{OC}$ sugár megkétszerezése elvégezhető csak körzővel: C-ből kiindulva a k körvonalat r sugarú körívekkel háromszor elmetszve kapjuk az E, F és G pontokat, s ekkor az OCE, OEF és OFG szabályos háromszögekből adódik, hogy C és G a k kör egy átmérőjének a végpontjai, vagyis $CG = 2r$ (9. ábra). Az $\overline{OM}$ szakasz A felezőpontja is megszerkeszthető csak körzővel (10. ábra). Ehhez elsőként megkétszerezzük az $\overline{OM}$ szakaszt úgy, hogy a $k_3(M, OM)$ körvonalat O-tól kezdve OM sugarú körívekkel elmetszve kapjuk az X, Y és Z pontokat: ekkor $Z \in \overrightarrow{OM}$ és $OZ = 2OM$. Ezután megrajzoljuk a $k_4(Z, OZ)$ kört, ami a k_1-et U és V pontokban metszi. S végül megrajzoljuk a $k_5(U, OU)$ és $k_6(V, OV)$ köröket, amelyek O-tól különböző metszéspontja a keresett A pont. (Jóllehet $A \in k \cap k_5$ miatt k_6 már mellőzhető.) A szerkesztés bizonyításához először is meg kell mutatni, hogy A rajta van az $\overleftrightarrow{OM} = \overleftrightarrow{OZ}$ egyenesen: ez teljesül, mivel $OU = OV$, $AU = AV$ és $ZU = ZV$ miatt az $\overline{UV}$ szakasz felezőmerőlegese tartalmazza az O, A és Z pontokat. Ezután vegyük észre, hogy az OAU és OUZ egyenlő szárú háromszögek hasonlók egymáshoz, mivel az O-nál lévő szögük közös, s minthogy e hasonlóság aránya $1 : 2$, ezért $OA = OU / 2 = OM / 2$. Megállapítható tehát, hogy ezen mód alapján a külső pontból húzható körérintő megszerkesztése elvégezhető kizárólag körzőt használva.



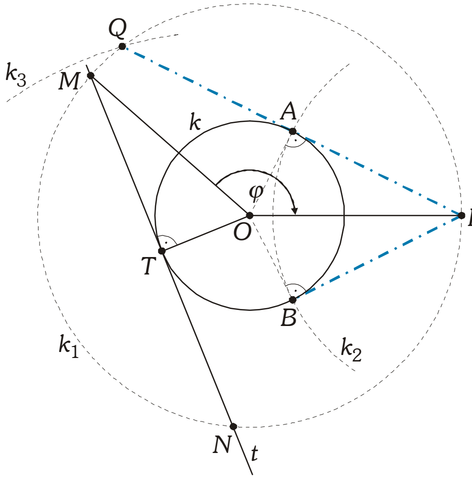
10. ábra

4. mód

Rajzoljuk meg a $k_1(O, OP)$ kört, majd a k kör tetszőleges T pontjában húzzunk k-hoz t érintőt, ami k_1-et M és N pontokban metszi (11. ábra). Ezután rajzoljuk meg a $k_2(P, TM)$ kört, ami a k körvonalat az A és B pontokban metszi.

Ha Q jelöli a $\overleftrightarrow{PA}$ egyenes és a k_1 körvonal P-től különböző metszéspontját, akkor a k_1 körben lévő $\overline{PQ}$ és $\overline{MN}$ húrok egyenlőségéből az O középponttól mért távolságaik egyenlősége is következik ([6] 90. oldal), s ennélfogva $\overleftrightarrow{PA}$ a keresett érintő.

Az M és N pontok előállítása után a szerkesztés két másik úton is folytatható: egyrészt az O középpontú és $\varphi = m(MOP\sphericalangle)$ szögű elforgatás révén $M' = P$, $N' = Q$ és $T' = A$ teljesül ([6] 91. oldal), másrészt az MNQ és MPQ háromszögek egybevágósága miatt $Q \in k_1 \cap k_3(N, PM)$, s így a Q pont előállítása révén $\overleftrightarrow{PA} = \overleftrightarrow{PQ}$ teljesül ([9]).

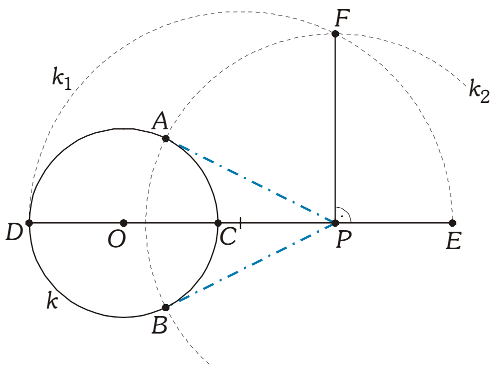


11. ábra

5. mód

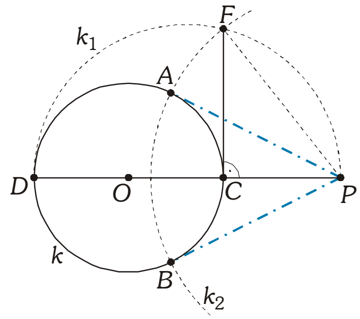
Húzzuk meg P-ből az O ponton áthaladó szelőt, ami a k kört C és D pontokban metszi úgy, hogy C legyen az $\overline{OP}$ szakasz belső pontja, s ezt P-re tükrözve kapjuk az E pontot (12. ábra). Ezután a $\overline{DE}$ szakaszt átmérőnek választva rajzoljuk meg a k_1 félkörívet, amit a P-ben $\overleftrightarrow{CP}$-re állított merőleges egy F pontban metsz, s végül rajzoljuk meg a $k_2(P, PF)$ kört, ami a k körvonalat az A és B pontban metszi.

Minthogy a P külső pont k körre vonatkozó $PC \cdot PD$ hatványa egyenlő a $\overline{PA}$ érintőszakasz hosszának a négyzetével, azaz $PC \cdot PD = PA^2$ ([4] 125. oldal, [6] 129. oldal), ezért a $\overline{PC}$ és $\overline{PD}$ szakaszok mértani közepének a megszerkesztése a $\overline{PA}$-val egybevágó $\overline{PF}$-re vezet.



12. ábra

Az előbbiekben a $\overline{PC}$ és $\overline{PD}$ szakaszok mértani közepét a magasságtétel alapján kaptuk meg, de ehhez felhasználható a befogótétel is (13. ábra), amikor a C és D pontok előállítása után megrajzoljuk a $\overline{DP}$ átmérőjű k_1 félkörívet, amit a C-ben $\overleftrightarrow{OP}$-re állított merőleges egy F pontban metsz, s innen a befejezés ugyanaz. A szerkesztés bizonyításának leírását átengedjük az olvasónak.

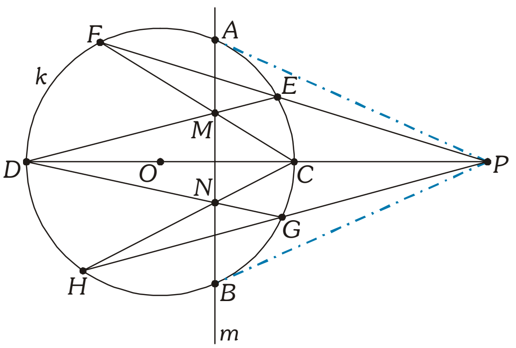


13. ábra

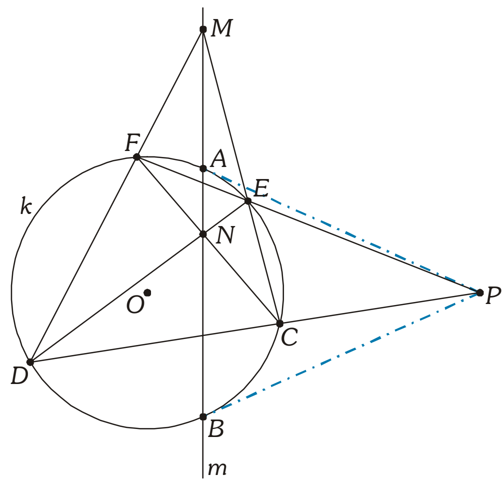
6. mód

Húzzuk meg P-ből az O ponton áthaladó szelőt, ami a k kört C és D pontokban metszi úgy, hogy C legyen az $\overline{OP}$ szakasz belső pontja (14. ábra). Ezután húzzunk P-ből két másik szelőt (a jobb áttekinthetőség céljából az $\overleftrightarrow{OP}$ egyenes két oldalán), amelyek messék k körvonalat E és F, illetve G és H pontokban, miközben $P-E-F$ és $P-G-H$ teljesül. Rajzoljuk meg a $\overline{DE}$ és $\overline{CF}$, illetve a $\overline{CH}$ és $\overline{DG}$ húrokat, amelyek M és N metszéspontjait összekötő egyenes a k körvonalat az A és B pontokban metszi. A szerkesztés elején megtehető, hogy az $\overleftrightarrow{OP}$ egyenes helyett a P pontból egy tetszőleges szelőt húzunk, s ezáltal nincs szükség az O középpontra.

Elegendő azt igazolni, hogy az M pont illeszkedik az A és B érintési pontokat összekötő egyenesre. Ez projektív geometriailag nyilvánvalóan igaz. Ha viszont analitikus bizonyítást kívánunk adni, akkor válasszuk origónak az O középpontot, x tengelynek az $\overleftrightarrow{OP}$ egyenest és y tengelynek az O-ban $\overleftrightarrow{OP}$-re merőlegest. Ezáltal a k kör egyenlete $x^2 + y^2 = r^2$ alakú, s ha bevezetjük a $P(p, 0)$, $C(r, 0)$ és $D(-r, 0)$ koordinátákat, ahol $p > r$, akkor az $\overleftrightarrow{AB}$ egyenes egyenlete és az M pont első koordinátája egyaránt $x = \frac{r^2}{p}$ alakú: tehát $M \in \overleftrightarrow{AB}$ teljesül ([8]). Megjegyezzük, hogy az M pont y koordinátája egy trigonometrikus kifejezéseket bőven tartalmazó tört lesz, de ez nem változtat a most bizonyított tényen.



14. ábra

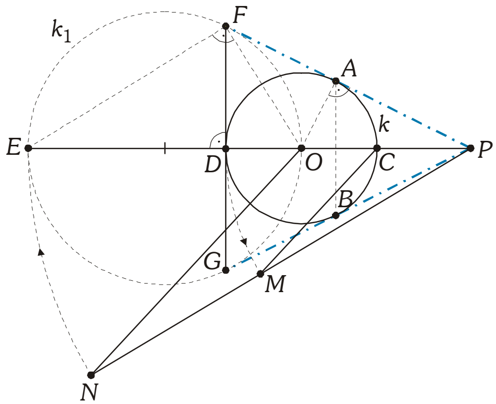


15. ábra

Az előbbi szerkesztésnek egy másik változatához jutunk, ha a P ponton át két tetszőleges szelőt húzunk, amelyek a k körvonalat C és D, illetve E és F pontokban metszik, miközben $P-C-D$ és $P-E-F$ teljesül (15. ábra). Ezután rajzoljuk meg a $\overleftrightarrow{CE}$ és $\overleftrightarrow{DF}$, illetve $\overleftrightarrow{CF}$ és $\overleftrightarrow{DE}$ egyeneseket, amelyek M és N metszéspontjait összekötő egyenes a k körvonalat az A és B pontokban metszi.

7. mód

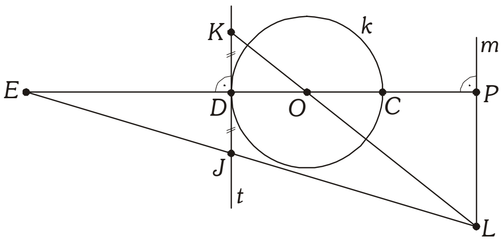
Húzzuk meg P-ből az O ponton áthaladó szelőt, ami a k kört C és D pontokban metszi úgy, hogy C az O és P között legyen (16. ábra). A D pontban szerkesszük meg k-nak t érintőjét. Rajzoljunk egy a $\overrightarrow{PO}$-val hegyesszöget bezáró, P kezdőpontú félegyenest, amire D pontot P körül leforgatva az M pontot kapjuk. A $\overleftrightarrow{CM}$ egyenessel az O ponton át húzzunk párhuzamost, ami a $\overrightarrow{PM}$ félegyenest az N pontban metszi, s ezt P körül $\overrightarrow{PO}$ félegyenesre leforgatva kapjuk az E pontot. Ezután megrajzoljuk az $\overline{EO}$ átmérőjű k_1 kört, ami a t érintőt F és G pontokban metszi: ekkor $\overleftrightarrow{PF}$ és $\overleftrightarrow{PG}$ egyenesek a keresett körérintők, amelyekre az O-ból állított merőlegesek A és B talppontjai az érintési pontok.



16. ábra

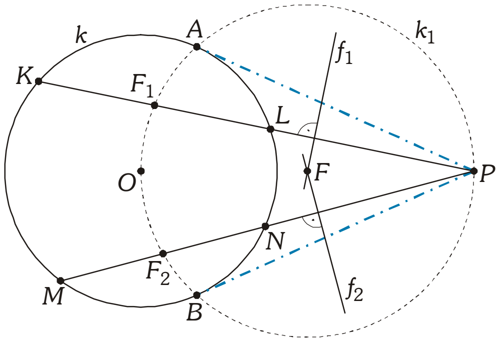
Az M és N pontok előállítása miatt $\frac{PD}{DE} = \frac{PM}{MN} = \frac{PC}{CO}$ teljesül, amiből $\lambda = \frac{EP}{ED} = 1 + \frac{PD}{DE} = \frac{PC}{CO} + 1 = \frac{PO}{CO} = \frac{PO}{OD} > 1$ kapható, s így k_1 a $\overline{PD}$ szakasz λ arányú Apolloniusz-köre ([4] 124. oldal). Ennélfogva $F \in k_1$ miatt fennáll a $\frac{FP}{FD} = \frac{OP}{OD}$ arány, s ezért a szögfelezőre vonatkozó arányossági tétel ([4] 123. oldal) megfordítása miatt a PFD háromszögben $\overrightarrow{FO}$ félegyenes a PFD szögnek felezője, s így az O-nak $\overleftrightarrow{PF}$ és $\overleftrightarrow{DF}$ egyenesektől mért távolsága ugyanakkora, $OA = OD = r$, vagyis $\overleftrightarrow{PF}$ egyenes érinti k kört az A pontban ([9]).

Az E pontnak egy másik megszerkesztéséhez jutunk, ha a D pont és a t érintő előállítása után D-ből t-re mindkét irányban egyenlő szakaszokat felmérve kapjuk a J és K pontokat (17. ábra), majd az $\overleftrightarrow{OK}$ egyenes és a P-ben $\overleftrightarrow{OP}$-re állított merőleges L metszéspontját J-vel összekötjük. Ez a $\overleftrightarrow{JL}$ egyenes az $\overleftrightarrow{OP}$ egyenest a keresett E pontban metszi. Ugyanis az $EJD_\triangle \sim ELP_\triangle$ és $KOD_\triangle \sim LOP_\triangle$ hasonlóságokból adódnak a $\frac{DJ}{PL} = \frac{DE}{PE}$ és $\frac{DK}{PL} = \frac{OD}{PO}$ arányok, ahonnan $DJ = DK$ miatt az előbbi $\frac{EP}{ED} = \frac{OP}{OD}$ arány is teljesül ([9]).



17. ábra

Végezetül megemlítjük még, hogy az adott k kör O középpontja nem csupán a 6. módban leírt egyélű vonalzós szerkesztés során mellőzhető, hanem az 1. és az 5. módban is (KöMaL 1952, IV. kötet 3. szám, 82–83. oldal). Ehhez az 1. módnál azt használjuk fel, hogy egy kör bármely húrjának felező merőlegese áthalad a kör középpontján ([4] 95. oldal, [6] 91. oldal). A k kör és a P pont megadása után húzzunk P-ből k-hoz két tetszőleges szelőt, a k által belőlük kimetszett $\overline{KL}$ és $\overline{MN}$ húroknak állítsuk elő az F_1 és F_2 felezőpontjait, amelyek illeszkednek a szerkesztendő k_1 Thalész-körre, s így annak F középpontja a k_1-ben lévő $\overline{PF_1}$ és $\overline{PF_2}$ nem párhuzamos húrok f_1 és f_2 felezőmerőlegeseinek metszéspontja lesz, aminek ismeretében k_1 már megrajzolható (18. ábra). Az 5. módnál pedig az a tény használható fel, hogy a $PC \cdot PD = PA^2$ összefüggés akkor is fennáll, ha a P külső pontból a k körhöz húzott szelő nem halad át az O középponton ([4] 125. oldal, [6] 129. oldal). S minthogy a szerkesztés további része ugyanaz marad, ezért az a 12. ábra alapján elvégezhető.



18. ábra

Ha a körhöz egy pontjában vagy egy külső pontból húzott érintő megszerkesztéséhez a betoló vonalzó (2011/2. és 3. szám), vagy a párhuzamos élű vonalzó (2012/1. szám), vagy pedig a szögvonalzó (2012/2. szám) kizárólagos használata van előírva, akkor az érintő szerkesztésének részletes leírása megtalálható ugyanezen folyóirat itt megadott számaiban.

Irodalom

[1] Czédli Gábor – Szendrei Ágnes (1997): Geometriai szerkeszthetőség. Polygon

[2] Euklidész (1983): Elemek. Gondolat

[3] Faragó László – Forgó Péterné (1967): Geometriai szerkesztések. Tankönyvkiadó

[4] Hajós György (1966): Bevezetés a geometriába. Tankönyvkiadó

[5] George E. Martin (1998): Geometric constructions. Springer

[6] Pelle Béla (1974): Geometria. Tankönyvkiadó

[7] Szőkefalvi Nagy Gyula (1943): A geometriai szerkesztések elmélete. Minerva (Kolozsvár)

[8] Solution and comments on Problem 66.F. The Mathematical Gazette, March 1983, 60–61.

[9] З. А. Скопец: О построении касательной к окружности. Математика в школе, № 5-1983, стр. 59-61.