A MATEMATIKA tanítása

MÓDSZERTANI FOLYÓIRAT

2014/1

MOZAIK

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

módszertani folyóirat

Szerkesztőség:
Főszerkesztő:
Dr. Kosztolányi József

Szerkesztőség címe:
6723 Szeged, Debreceni u. 3/B
Tel.: (62) 470-101,
FAX: (62) 554-666

Kiadó:
MOZAIK Kiadó Kft.
Felelős kiadó:
Török Zoltán
Tördelőszerkesztő:
Kovács Attila
Borítóterv:
Szőke András

Megjelenik évente 4 alkalommal.

TARTALOM

A matematika szerepe a természettudományos képzésben
Radnóti Katalin
főiskolai tanár, Budapest
Nagy Mária
egyetemi hallgató, Budapest

Változatok egy témára, avagy hogyan szerkeszthetünk feladatokat?
Kovács Béla
tanár, Szatmárnémeti

Feladatok tehetséggondozó szakkörre
Vígh-Kiss Erika
tanár, Budapest

A 2013/2014. évi Hajdú-Bihar megyei Középiskolai Matematikai Versenyről
Dr. Kántor Sándorné
egyetemi adjunktus, Debrecen

Felhívás tanártovábbképzésre

Feladatrovat tanároknak

Közlési feltételek:

A közlésre szánt kéziratokat e-mailen a kattila@mozaik.info.hu címre küldjék meg. A kéziratok lehetőleg ne haladják meg a 6-8 oldalt (oldalanként 30 sorban 66 leütés).

Kérjük, a kézirathoz csatoljanak egy rövid magyar nyelvű kivonatot és egy angol nyelvű Abstract-ot!

A rajzokat, ábrákat, táblázatokat és fényképeket külön fájlokban is kérjük mellékelni. (A szövegrészben pedig zárójelben utaljanak rá.)

Kérjük, hogy a szövegbeli idézések név- és évszámjelöléssel történjenek, míg a tanulmányok végén a felsorolt irodalmak alfabetikus sorrendben készüljenek.

Kérjük szerzőtársainkat, hogy a kéziratok beküldésével egyidejűleg szíveskedjenek közölni pontos címüket, munkahelyüket és beosztásukat.

Radnóti Katalin – Nagy Mária

A matematika szerepe a természettudományos képzésben

Az utóbbi évtizedekben a felsőoktatás szélesre nyitotta a kapuit a tanulni vágyó fiatalok előtt. Ennek következtében sok olyan hallgató is bekerült a rendszerbe, akinek korábban erre nem lett volna lehetősége a tanulmányi előmenetele alapján. Hazánkban 2006 óta az úgynevezett bolognai rendszerű képzés folyik sok szakterületen, mely lehetőséget adott a tematikák újragondolására. A korábbi tapasztalatok alapján fogalmazódott meg az ELTE TTK vezetésében az, hogy a diákok felkészületlensége miatt szükséges lenne úgynevezett felzárkóztató tantárgyak bevezetésére az első évfolyamokon, melyet azóta több felsőoktatási intézmény is átvett. Ez meg is történt, elsők közt a matematika, fizika és kémia tantárgyakból. Ezen tanórák keretében az egyetemi oktatók a hallgatók középiskolai tudásának hiányosságait igyekeznek pótolni. A matematika sok szakterület fontos alapozó tantárgya, így kiemelt figyelem fordul felé. Jelen cikksorozatunkban ezt a témakört járjuk körül.

A matematikai tudást igénylő képzési területek nem csak a műszaki és a matematikus, fizikus szakokat jelentik, hanem minden természettudományos szak, mint például a földtudomány, a környezettudomány szakok is komoly matematikai alapozást igényelnek. Azonban az ez utóbbi szakokra jelentkező diákok a középiskolában fakultációs tantárgyként nem a matematikát választják, hanem természettudományos tantárgyakat, főként biológiát és földrajzot. Ez viszont azzal a következménnyel jár, hogy matematikai alapjaik nagyon hiányosak. Jelen írásunkban a középiskolai matematikaoktatás lehetséges céljait tesszük vizsgálatunk tárgyává, majd fogalmazunk meg javaslatokat. Részletesebben a földrajz és a kémia tantárggyal való kapcsolatra térünk ki. A biológiával és a fizikával külön cikkekben foglalkozunk.

A felsőoktatásba érkező hallgatók tudásával korábban is foglalkoztunk már (*Radnóti,* 2007, *Pálfalviné,* 2009).

Az iskolai tanítás, a közoktatási gyakorlat

Melyek lehetnek az iskolai tanítási célok?

Tehetjük fel a kérdést általánosságban, hogy témánkat beágyazzuk az oktatási környezet egészébe. A válaszok a következők lehetnek, mint: a műveltség, a kultúra átadása a következő nemzedéknek, értékközvetítés, szemléletformálás, kognitív folyamatok segítése, absztrakciós készség kialakításában való közreműködés, annak elősegítése, hogy a gyermekek képesek legyenek több aspektusból is vizsgálni az eseményeket, különbséget tudjanak tenni az egymástól elvben eltérő dolgok között, bele tudjanak helyezkedni az egyes témakörök problémacentrumába, általános érdeklődés felkeltése a világ irányában, tartós koncentrálásra és figyelemre való készség kifejlődésének támogatása, saját koncepciókra való igény és azok megalkotására való affinitás kiépítésében való szerepvállalás, alkalmazható tudás, élethosszig tartó tanulás képességének kialakítása, a kulcskompetenciák fejlesztése, a gondolkodás fejlesztése, az életre való felkészítés, tudatos állampolgárrá (közösségi emberré) való nevelés, és még sorolhatnánk.

Mik lehetnek az egyes tantárgyak tanítási céljai?

Az iskolában különböző tantárgyakat tanítunk, melyek hazánkban a felső tagozattól kezdődően hagyományosan az egyes tudományok leképeződései, annak legfontosabb fejezetei egyszerűsített formában. Az egyes tantárgyak tanulási céljai a tartalmi vonatkozásban kettősek:

- az adott tudományba, annak logikájába, kérdésfeltevéseinek jellegzetességeibe, problémamegoldási módszereibe, jelölési rendszerébe való bevezetés,
- más tudományok tanulásának/tanításának elősegítése.

Minden esetben fontos a kulcskompetenciák fejlesztése a fontosnak ítélt tananyagtartalmakon keresztül, továbbá az **eszköztudás** biztosítása a későbbi tanulmányokhoz, más tantárgyak tanulásához, melyek igen jelentős célok a magyar nyelv és irodalom és a matematika tantárgyak esetében. **Ezért magas az óraszáma a többi tantárgyhoz képest a fenti tantárgyaknak!**

Mik lehetnek a matematikatanítás célkitűzései?

A matematikatanítás célrendszere is kettős az előbbiek értelmében. Kérdés ezek aránya. Jelen írásunkban arra szeretnénk rámutatni, hogy az egyik nagyon fontos célja a többi tudomány (iskolai tantárgy) számára megteremteni a szükséges matematikai alapokat. Véleményünk szerint ennek az eszköztudásnak a kialakítása fontosabb célkitűzés kell, hogy legyen, mint a matematika, mint szaktudomány világába való bevezetés. Ugyanis jóval kevesebb matematikusra van szükség, mint amennyi – a matematikát magas szinten alkalmazni tudó – mérnökre, gazdasági és természettudományos területen dolgozó szakemberre. Valamint kevesebb a kifejezetten a matematika felé orientálódó emberek száma, mint azoké, akiket olyan szakterületek érdekelnek, amelyek igénylik a matematikát mint eszközt a problémák megoldásához valóságleírási folyamataik során, világunk működésének leírásához.

Mi szerepeljen a tananyagban?

Mi a meghatározó cél? Célkitűzés-e a felsőoktatásra való felkészítés a közoktatás során, vagy csak az érettségi vizsgára kell koncentrálni? Míg a korábbi időkben a középiskolát végzett diákoknak körülbelül 10%-a tanult csak tovább, ez az arány napjainkban már 40% körül mozog. Régebben a középiskolák megítélése szempontjából fontos mutató volt az, hogy az érettségizett diákjai hány %-át veszik fel a felsőoktatásba. Ez napjainkban már igazából nem mond sokat, hiszen például a gimnáziumba járó tanulók jelentős része felvételt nyer valamilyen felsőoktatási intézménybe. Ennek alapján azt gondoljuk, hogy a közoktatás éveiben nem csak az érettségi vizsgára kell koncentrálni már a tananyag meghatározásánál sem, hanem tekintettel kell lenni a felsőoktatás igényeire is. És természetesen ennek a szemléletnek az érettségi követelmények meghatározására, annak értékelési rendszerére is hatással kell lennie.

Milyen felsőoktatásra készítsen fel a középiskola, például esetünkben matematikából? Folytathatjuk a kérdések sorát. Hiszen a fentiekben leírt, az adott évfolyam közel 40%-át kitevő fiatal sokféle felsőoktatási lehetőség közül tud választani, melyeknek csak egy része igényli jelentősebben a tanulmányok során a matematikát. Ám kismértékben gyakorlatilag minden területen jelen van a matematika a felsőoktatási törzsanyagban. Például jogi, társadalomtudományi karon folytatott tanulmányok esetében valószínűség-számításhoz és statisztikához kapcsolódó matematikai elemek szerepelnek a tantervben. A nyelvtanulás esetében a mondatelemzés során logikai kapcsolatokat használnak, amelyek hasonlóságot mutatnak a matematikai logikával. A nyelvészetben az informatika is igen nagy szerepet foglal el. Zeneművészet esetében a hangközök, az ütembeosztás hordoz matematikai tartalmat; utóbbit a zenemű elején törtszámmal jelöljük, és a számláló azt mutatja meg, hogy egy ütemben hány alaplüktetés van, a nevező pedig az alaplüktetés ritmusértékére utal. Irodalomban és az idegen nyelvek fonetikájában is nagymértékben jelen van a zenéhez hasonlóan az időmérték, a ritmizálás és a hanglejtés, ami matematikai tartalmat hordoz. Tovább is fejtegethetnénk azt a tényt, hogy a matematikára legalább kismértékben minden területen szükség van a továbbtanulási lehetőségek tárházában attól függetlenül, hogy mely tudomány mellett kötelezi el magát valaki.

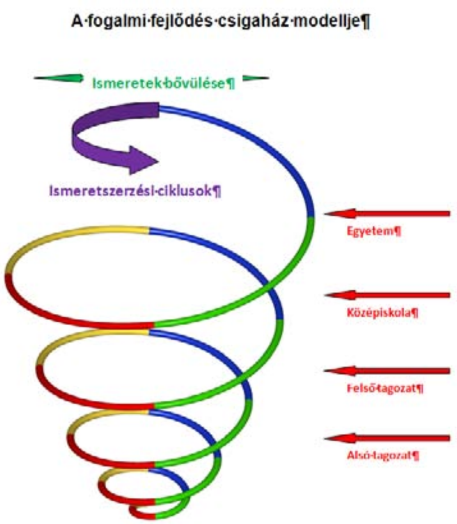
A tanulók közül viszonylag kevesen határozzák el évekkel az érettségi előtt, hogy milyen irányban szeretnének továbbtanulni. Sok diák szinte csak az utolsó hónapokban dönt. Többen meglehetősen változatos helyekre jelentkeznek egyszerre, annyira bizonytalanok. Például megjelölnek jogi pályát, valamilyen műszaki vagy természettudományos szakot és gazdasági szakot is. Szándékosan próbáltunk meg nagyon különböző felsőoktatási lehetőségeket írni, mivel azt gondoljuk, hogy nem elhanyagolható az ilyen jellegű jelentkezések aránya. Például fizika alapszakon előfordul olyan csillagász szakirányos hallgató, aki mellette diplomáciát tanul, és van olyan is, aki a fizika szak előtt első szakként politológiát választott.

Tehát a kérdés az, hogy miként is határozzuk meg a tananyagot, kiknek az igényeit tartsuk szem előtt? Azon tanulók érdekei legyenek-e a meghatározóak, akik biztosan nem matematikai irányban tanulnak tovább, vagy valamilyen szinten mégis figyelembe kellene venni azokat a tanulókat is, akik csak később döntenek, illetve akiknek a matematika nem önmagában lesz fontos, hanem segédtudományként?

Azt lehet mondani, hogy akik biztosan matematikai jellegű továbbtanulásra gondolnak, azok válasszák a fakultációt, és ott felkészítést kapnak az emelt szintű érettségihez. Itt biztosan megkaphatják azt a tudást, mely elegendő lehet a műszaki és természettudományi alapozó matematika kurzusok sikeres teljesítéséhez, majd a későbbiekben ezen ismeretek felhasználásához a szakmai tantárgyakban. Megjegyzendő, hogy a szomorú helyzet az, hogy a matematika fakultáció keretében sem feltétlenül részesülnek az általános, nem speciális matematika tantervben tanulók a kellő plusz szaktárgyi ismeretekben. A matematika BSc képzésben tanulók egy része is csak a leggyengébb, normál szintet választja a normál, haladó és intenzív kurzusok közül, mert önértékelése és a bevezető héten írt kritériumdolgozata eredménye szerint is hiányosságok lelhetőek fel előzetes ismereteiben. Ezen hallgatók a későbbi szakirányválasztás folyamatában az elemző vagy a tanári szakirány mellett döntenek. Utóbbit gyakorta nem azért választják, mert ezt éreznék hivatásuknak, hanem mert jobb elhelyezkedési lehetőséget látnak benne, illetőleg mert az elemző szakirányhoz nem tartozik felsőfokú mesterképzés (MSc), további ösvény a tudás fénylő elemeinek felderítéséhez. Az elemző szakirány elvégzése után lehetőség van természetesen például alkalmazott matematikus MSc-re jelentkezni, de ekkor az alapképzésen meg nem szerzett előismeretek hiánya miatt adódik problémája a hallgatóknak; ezért is kevés az ezen utat választók száma. Az előbbieken kívül az még problematikusabb a matematika alapképzést folytatók körében, hogy nem csak a magasabb szintű kurzusok jelentenek sokaknak nehézséget, hanem a normál szintű tárgyakat sem tudják sikeresen, vagy a minimális szintnél jobban teljesíteni, és ez nagy kudarcélményt jelent számukra. Továbbá a leendő tanárok, matematika majorosok (első tanári szak), fizika minorosok (második tanári szak) esetében gyakran megfigyelhető, hogy bár a matematika törzsanyag keretében nem jelent problémát tárgyaik teljesítése, de fizikás tárgyaik kevésbé sikeresek. Ennek oka az, hogy hiányzik a megszerzett tudás alkalmazásának készsége, az annak **eszközként** való kezeléséhez szükséges elmélyült tudásrendszer. Az eszközök nehézkes alkalmazási készsége nemcsak a fizika minorosoknál figyelhető meg, hanem a fizika majorosoknál, illetve a nem tanár szakirányos fizika alapszakos hallgatók körében is. Ez szintén arra vezethető vissza, hogy bár ezek a hallgatók többnyire matematika fakultációra jártak középiskolás tanulmányaik során, mégsem részesültek a megfelelő szemléletformálásban, ismeretszerzésben. Gyakorlatunkban is többször fordul elő, hogy ismeret szinten is hiányosságaik vannak, nem csak az alkalmazás területén.

Tehát elmondható, hogy akkor sem feltétlenül kapja meg a felsőoktatáshoz szükséges előzetes tudás elsajátításának lehetőségét egy középiskolás, ha már idejekorán határozott, konkrét elképzelései és célkitűzései vannak jövőképére vonatkozóan. És ők még az a réteg, akikre jobb lehetőségek várnak.

De mi lesz azokkal, akik a középiskola utolsó évében tudnak csak dönteni? Mi lesz azokkal, akik olyan természettudományi jellegű felsőoktatásba készülnek, ahol elvárt, hogy természettudományos tantárgyakat válasszanak fakultációként? Például a biológusnak készülő diák biológiát és kémiát, a környezettan szakra készülő biológiát és földrajzot fog választani. Tehát a matematikát csak a „normál” középszinten tudja tanulni, majd középszinten érettségizik. Ezután az első félévben szembesül azzal, hogy a matematikai tudása nagyon hiányos. Mikor ezt a problémát az ideálisnál gyorsabban, hirtelen próbálja orvosolni a tanuló és a felsőoktatási intézmény együttes erőfeszítése, akkor pszichikailag gátolja ezt a folyamatot, hogy a frissen felsőoktatásba csöppent hallgatót sokként éri az a felismerés, miszerint rendkívül hiányos az előzetes tudása, és külön trauma a hatalmas mennyiségű új ismerettel való szembetalálkozás – mely ismeretek nagy részének nem kellene újnak lennie. Az is nagymértékben hátráltatja a felzárkózást, hogy a hallgató – teljesen érthető okokból – megijed az újtól, hiszen az ember számára az ismeretlen leggyakrabban rémisztő dolog, főleg, ha éppen ekkor változott meg a környezete is (előtte legalább 4 évet töltött a megszokott középiskolájának falai és ismerős diáktársai között), s az új dolgok hirtelen és nagy mennyiségben szakadnak a nyakába.



1. ábra
A fogalmi fejlődés csigaház modellje

Mi jelenti a középiskolai matematika tananyag legnagyobb hiányosságát? – tehetjük fel a következő kérdést. A válasz a matematika tananyagból több, mint harminc éve „száműzött” **differenciál- és integrálszámítás.** Mely pedig alapvető eszköz már a legegyszerűbb fizikai fogalom, a sebesség definiálásához is, továbbá nélkülözhetetlen a természeti jelenségek és folyamatok leírásához. Emellett a vektorszámítás elemei is nagyon hiányosak a középiskolai tananyagban.

A matematika tanítására kifejezetten jellemző a fogalmak lassú érlelése, többszöri visszatérés az egyes témakörökre, minden esetben csak kicsit bővítve azokat, melyet csigaházas ábránkkal szemléltethetünk (*1. ábra*).

Általánosságban elmondható, hogy a matematika a túl lassú haladási üteme miatt szinte minden esetben később tanítja a más tantárgyak tanításához eszközként szükséges tartalmakat. Ez pedig nagyon megnehezíti azok tanítását! Sok egyéb mellett ez is oka lehet annak, hogy a több matematikát igénylő, sőt a matematikát, mint leírási nyelvet alkalmazó fizika tantárgy annyira népszerűtlen a diákok körében. A diákok nagyon nagy részének szemében a reáliák megfoghatatlanok, érthetetlenek, azt nyilatkozzák róluk, hogy gyengén megy nekik és ez nem az ő világuk. Ennek egyik oka, hogy ezeken az órákon nagyrészt a nem értésből eredő kudarcélményekkel szembesülnek a sikerek helyett. Pedig a természettudományok által magyarázhatók a mindennapok történései, jelenségei, az események kapcsolata, maga a természet és az élet. A tanulókhoz például úgy vihető közelebb e tudományok **szemléletmódja,** ha megfelelő **eszközök** állnak a rendelkezésre, ezáltal **érthetőbbé lehet tenni** a nehéznek és absztraktnak tartott tantárgyakat.

A középiskolai tankönyvek és a jelenleg leggyakrabban használt tanítási módszerek is meglehetősen szárazon, képlet-orientáltan, a mélyebb, érdekes részeket kihagyva ismertetik a fizikát. Például a feladatmegoldások teljes algoritmusát irányító munkafüzetek, az értés nélküli betanulást jelentő tanulási technikát pártolják, **leszoktatják a tanulókat a gondolkodásról.** Ettől kényelmesebbé válik a tanulás/tanítás, azonban a tudományos szemléletformálás teljes gátját jelenti, mely a való életben és a felsőoktatás színterén bosszulja meg magát. A kizárólag algoritmikus tudás, illetve a képletbetanulás e cikk szerzői szerint rendkívül **negatív hatással van a gondolkodási attitűdök fejlődésére és alakulására, valamint az önálló koncepcióformálás képességének kialakulására nézve.** Így ugyanis a diákok nem értik meg a fizikai fogalmak valódi jelentését, nem a fizikai jelenségeket látják, hanem csupán a matematikai reprezentációt és a megoldási műveletet – minden mögöttes tartalom nélkül –, ami ugyan nagyon fontos, de nem önmagában, hanem a fizikai fogalmak kialakításához vezető eszközként, a jelrendszer által hordozott információtartalom miatt.

A matematikai eszközök használata pedig segíti a mélyebb megértést, a fizikai fogalmak kialakítását. Valamint a matematikának a fizikai fogalmak kialakításában való szerepvállalásával az is együtt jár, hogy egy adott elvonatkoztatott matematikai apparátus megfoghatóbbá válik. Tehát ekkor **a matematika, mint eszköz** segíti a fizika szakmódszertant, és visszahatva az így kialakított fizikai fogalmak is segítik a matematika módszertant azzal, hogy valóságos, megfogható jelentést adnak az eszközként használt matematikai formuláknak, elveknek. Ám ez a módszer csak akkor működik, ha az adott hallgatóságnak megfelelő szinten, ideális matematikai mélységekig eljutva alkalmazzuk. Ám a jelen helyzetben szinte csupán a speciális matematika tagozatosok előképzettsége elegendő még a legalapvetőbb fizikai problémák ilyen jellegű tárgyalásához is. Holott nem túl nehezen elsajátítható szemlélet ez, a matematikát (differenciál- és integrálszámítás, vektorszámítás elemei, analízis alapjai stb.) széleskörűen és általánosan alkalmazó felfogásmód egy középiskolás számára, szó sincs arról, hogy nem elég érettek a gyerekek hozzá. A korábbi középiskolai matematika tankönyveknek ezek a fejezetek részei voltak. A fizika tankönyvekben pedig evidens volt ezen matematikai eszközök használata. Érdekes, hasznos, és érthetőbbé teszi a tanulmányokat az egyes tudományok közti kapcsolat megteremtése. Többek közt ezért lenne fontos, hogy megvalósuljon a fizika és a matematikai eszközök együttes, egymással koordinációban történő tanítása (*Nagy,* 2013).

A matematikai tudás alkalmazásával kapcsolatban általában a következő nehézségek szoktak felmerülni:

- Hiába tanulta már matematikaórán a diák az adott téma feldolgozásához szükséges ismeretet, a **transzfer** nehéz, az új helyzetben való alkalmazás nem könnyű.
- Sokszor **más betűket** is használnak az egyes természettudományos témakörök matematikai leírásánál, mint a matematikaórán. Ez természetes, hiszen a betűjelek rövidítések. De a diákok a matematikaórákon az ismeretlen mennyiség, illetve a koordináták jelölésére szinte mindig csak az x és y betűket használják, így az összefüggéseket is már csak ezekkel felírva ismerik fel, mely utal arra, hogy tudásuk csak mechanikus, a betanulás, nem pedig az értelmezés technikáját jelentő tanulási folyamat eredménye.
- A természet jellemzéséhez bevezetett mennyiségeknek többnyire **mértékegysége** is van, amivel szintén matematikai műveleteket kell végezni. Ezt dimenzióanalízisnek nevezik, mely sokszor hatalmas segítője a természettudományoknak. Hiszen egy kapott mennyiség helyességét nem az tükrözi, hogy arra próbálunk rájönni, hogy jó képletet használtunk-e, hanem az, hogy megnézzük, milyen más mennyiségekből származtattuk az eredményt, s az ezek mértékegységeivel végzett megfelelő műveletek eredménye ugyanaz-e, mint a kapott eredmény mértékegysége.

A továbbiakban áttekintjük a matematika és a természettudományos tantárgyak kapcsolódási pontjait, a 2012-ben megjelent új Nemzeti alaptantervet és az annak alapján készült kerettanterveket tekintve alapként.

A matematika és a természettudományos tantárgyak kapcsolata

Földrajz

A *térképi méretarány* földrajzórai használatának nehézségei alapvetően arra vezethetők vissza, hogy a hozzá szükséges matematikai tudással még nem rendelkeznek a gyerekek. Megtanulják mondókaszerűen, hogy „ami a térképen 1 cm, az a valóságban *x* cm”, de ezt értelmezni nem képesek. A méretaránynak a térképen használatos felírási módja (pl. 1 : 1000) számukra ekkor – matematikai tanulmányaik alapján – törtet, egy mennyiség arányos felosztását jelentheti.

A másik problémát **a gömbfelszín és a sík közötti projekció** jelenti. Hogyan lesz a gömbfelszínből sík térképlap? A térképészetben nagyon fontos ez a kérdés, a tudományág alapját jelenti. A szemléltetéshez az úgynevezett narancsmodellt lehet használni, mely a következő: a gyümölcs felszínére rajzolunk egy hálózatot, melyet hámozással leválasztunk a gömbről, és kiterítjük a síkba. Ennek elmaradása esetén a gyerekek a térképet a matematikai általánosan használatos Descartes-koordinátarendszerrel azonosítják tudatukban, és ettől kezdve értelmezhetetlen számukra a szélességi és a hosszúsági körök egymáshoz viszonyított helyzete, elnevezése és számozása, s mindezek miatt a használatuk pszichés korlát alatt is állhat. A szélességi és hosszúsági körök egymással azonos térképi (és nem földgömbi) elemekként élnek a gyerekek képzetében, csak annyi különbséget vélnek közöttük, hogy az egyik vízszintesen, a másik függőlegesen húzódik. Ebből az is következik, hogy négyzethálóként fogják fel (mint a keresőhálózatot vagy a turistatérkép kilométerhálózatát). Ugyan a gömbi koordináták használata sokkal magasabb matematikai ismeretszintet követelne meg, de helyette **modellalkotás** segítségével a probléma orvosolható.

Ezen kívül a földrajztanítás fontos elemeit képezi a különböző statisztikai jellegű adatok kezelése, mint például időjárási, éghajlati és gazdasági statisztikák. A gyerekeknek feladatuk is a különböző statisztikai adatok gyűjtése, elemzése és ábrázolása. Ehhez kapcsolódóan adatok rendezése, osztályokba sorolása, táblázatba rendezése, ábrázolása, és ezekből következtetések levonása.

Kémia

A kémia tanításában nagymértékben támaszkodunk matematikai ismeretekre, melynek bemutatását rövid tudománytörténeti kontextusban tesszük meg a téma fontossága miatt.

A 18. századra jutott el a kémia olyan fokra, hogy a kémikusok a fizikusokhoz hasonlóan, illetve tőlük kicsit ellesve, elkezdtek kvantitatív összefüggéseket keresni, melyekkel a kémiai folyamatok leírhatók. Ezek birtokában lehetett ténylegesen tisztázni az *elem – vegyület – keverék* fogalmakat, melyek a kémia alapfogalmai.

A kémiai elem fogalmának kialakulásáért sokat tett és egyben bővítette az elemek sorát a francia Antoine Laurent Lavoisier, aki feleségével közösen végezte kutatásait, melynek fontos eszköze volt a mérleg. A kémikusok addig nem végeztek méréseket, csupán *megfigyeltek* és *leírták* megfigyeléseiket. Lavoisier úgy gondolta, hogy sokkal fontosabb megmérni azt, ami mérhető, és a tömeg éppen ilyen volt. Kísérletei rendszerint nem voltak újak, főként korábbi munkákat ismételt, de egészen más szempontok vezették, mint elődeit. Már első munkája is a mennyiségi elemzés szükségességét hirdette. A tömegmegmaradást a kémiai folyamatok alapelvének tekintette. A levegő és a víz összetett voltának a felfedezése, az oxigén, a nitrogén és a hidrogén megismerése kapcsán a mai felfogáshoz hasonlóan minősítette az egyes anyagokat elemmé. Szerinte az elemeket nem lehet tovább bontani.

A Laviosier mutatta úton a kémikusok elkezdtek keresni, majd felfedeztek bizonyos számszerűleg kifejezhető törvényeket. A közömbösítésnél, majd később az oxidok képződésénél rájöttek arra, hogy a vegyületek csak bizonyos meghatározott tömegarányok szerint jöhetnek létre, a keverékek esetében viszont tetszőleges lehet az arány.

Keveset szoktak hivatkozni a német Jeremias Benjamin Richterre, aki rendkívül nagyra tartotta a matematika szerepét a kémiában és szerette volna a fizikához hasonlóan a kémiát is kvantitatív tudománnyá tenni. Doktori disszertációjának a címe is az volt, hogy „A matematika alkalmazása a kémiában”. Ő vezette be a kémiai számításokra az azóta is használatos sztöchiometria elnevezést.

Ő volt a titrálás fölfedezője is. Rájött arra, hogy az azonos mennyiségű (súlyú) savat semlegesítő különböző mennyiségű (súlyú) bázisok egyenértékűek egymással. 1792-ben azt is leírta, hogy a kémiai reakciókban a vegyületek mindig azonos súlyarányban reagálnak egymással. Joseph-Louis Proust-tal együtt kimondta, hogy az egyes vegyületekben az elemek állandó súlyarányban szerepelnek, ezzel az újkori atomelmélet előfutárává vált.

Proust továbbá felismerte, hogy ha két elem egymással többféle vegyületet alkot, akkor az arányok ugrásszerűen változnak és minden vegyület határozott tömegaránnyal rendelkezik. John Dalton (1766–1844) jött rá arra, hogy ha két elem többféle vegyületet alkothat egymással, akkor az egyik elem azon mennyiségei, amelyek a másik elem ugyanazon mennyiségeivel képesek vegyülni, úgy aránylanak egymáshoz, mint a kicsiny egész számok. Ez a tény természetes módon következik az atomelméletből. Dalton atomelmélete azonban különbözik minden addigi atomelmélettől, mivel mennyiségi értelmezést is ad! (Balázs és mtsai, 1981)

A kémia oktatása során alkalmazott számítások alaptörvényei tehát a következőképp foglalhatók össze:

- Az *állandó tömegviszonyok* törvénye (Proust, 1799). Az elemek meghatározott tömegarányban egyesülnek egymással. Bármely vegyületben az alkotóelemek tömegaránya állandó érték. Például a vízben a hidrogén és az oxigén tömegaránya 1 : 8.
- A *többszörös tömegviszonyok* törvénye (Dalton, 1804). Ha két elem többféle tömegviszony szerint egyesül egymással, akkor az egyik elem meghatározott mennyiségével a másik elem olyan mennyiségei vegyülnek, amelyek úgy viszonyulnak egymáshoz, mint az egyszerű egész számok. Például a hidrogén és az oxigén vízzé és hidrogén-peroxiddá is egyesülhet. A hidrogén és az oxigén tömegaránya a H_2O-ban 1 : 8. A hidrogén és az oxigén tömegaránya a H_2O_2-ben 0,5 : 8, vagyis 1 : 16. Az oxigén azonos mennyiségével vegyülő hidrogén tömegaránya a két vegyületben 1 : 0,5 vagyis 2 : 1.

Összefoglalóan: az anyag részecskékből áll (ezek tömege egymástól különböző), melyek egymással kölcsönhatásba lépnek a kémiai folyamatok során. Mérleggel sok részecske együttes tömegét, vagy mérőhengerrel azok együttes térfogatát tudjuk megmérni, A reakciók esetében azonban a részecskék száma a döntő. Ezért kell sokszor kiszámítani a kémiai számítások során a reakcióban részt vevő anyagok tömegéből, illetve a térfogatából a részecskék darabszámát, vagy – ami ezzel egyenesen arányos – a mólok számát.

A kémiai számítások során fellépő *matematikai nehézségek*: A leggyakrabban alkalmazott matematikai eljárás az *egyenes arányosság* használata és az *egyszerű egyenletrendezés* a reakcióegyenletek esetében. Hiába tanulják meg matematikaórán ennek a használatát, de mint minden esetben, úgy itt is nehéz a transzfer a gyerekek számára. Vagyis az egyfajta kontextusban megtanult eljárásokat csak nehezen tudják új szituációban, egy teljesen másfajta kontextusban eredményesen alkalmazni. Ennek áthidalása véleményünk szerint a kétféle tantárgyat tanító kolléga komoly együttműködését igényli. Célszerű a matematikaórákon kémiai jellegű példákat is megbeszélni, míg kémiaórákon a többi egyenes arányosság feladattal, az egyenletrendezéssel való hasonlatosságot kiemelni. Ekkor a korábbiakban a fizikánál írtakhoz hasonlóan **a matematika segítené eszközként a kémia szakmódszertant** és visszahatva: az így kialakított kémiai fogalmak is segítenék a matematika szakmódszertant: a valóságos, megfogható, materiális mivoltukkal jelentést adnának az eszközként használt matematikai formuláknak, elveknek. S az is kifejezetten előnyös volna, hogy így a matematikaórán kívül a fizika, a kémia és a többi természettudományi tantárgy keretében hallanák az oda tartozó matematikai ismereteket. Ezt a módszert alkalmazva

- egyrészt megtörténik a tananyag átismétlése,
- másrészt megkezdődik a betanult, leginkább algoritmikus szintű tudás absztrakt szintre emelése,

– harmadrészt a természettudományok számára legfontosabb eredményként ez megteremtené a valódi problémák vizsgálatának és elemzésének megfelelő szemléletben történő tárgyalásához szükséges szférát.

Tehát rendkívül előnyös lenne **a természettudományok integrált szemléletben történő tanulása/tanítása.**

Kémiai egyenletrendezés

A matematikai ismeretek egyik fontos alkalmazása a kémia tanulása során a kémiai egyenletrendezések témaköre. Valójában ezek is algebrai egyenletrendezések, csak itt nem különböző változók vannak, hanem helyettük az egyes kémiai elemeket jelölő vegyjelek együtthatóinak kell megegyeznie az egyenlet két oldalán (ez hol alsó indexben szerepel, hol a vegyjel előtt, attól függően, hogy milyen új vegyület keletkezik a folyamatban).

A reakcióegyenletek – mint eszmei modellek – a kémiai átalakulás más-más aspektusát ragadják meg, emelik ki. Ennek három szintjét különböztethetjük meg, mint

1. az úgynevezett szóegyenletek csak a reakcióban résztvevő anyagok minőségét hangsúlyozzák, melyeket a kémiával való ismerkedés első szintjén, a 7. évfolyamon célszerű alkalmazni,
2. a sztöchiometriai egyenletek a kémiai átalakulás mennyiségi viszonyait is leírják, melyeket a későbbi tanulmányok során alkalmazunk,
3. a reakciómechanizmusok pedig a kémiai változás molekuláris szintű történéseit hangsúlyozzák, melyeket már inkább csak a felsőbb szinten tanulók, illetve a kutatásban tevékenykedők alkalmaznak.

A reakcióegyenletek rendezése fontos a kémiai ismeretek szempontjából, a kémiai „beszéd” igen lényeges része, ugyanakkor a gyerekek nehezen értik meg. A sztöchiometriai egyenleteknek (rendezett reakcióegyenleteknek) különösen nagy szerepük van a kémiai számításokban, a kémiai reakciók leírásában. A sztöchiometriai egyenletek felírása számos kémiai ismeretet (a reakcióban résztvevő anyagok és vegyjelük/képletük, valamint a kémiai reakciókra is érvényes megmaradási tételek ismerete) feltételez, és bizonyos matematikai készségeket (egyenletrendezés) is igényel.

A leggyakrabban előforduló „megoldás” – főként általános iskolában, de sokszor még középiskolában is –, hogy a gyerekek az együtthatókkal együtt betanulják az egyenletet.

Az egyenletírással kapcsolatban a legfontosabb az anyagmegmaradás hangsúlyozása, ezt használja ki az úgynevezett mérlegelv, amivel még egy kicsit szemléletessé is tehető az egyenletrendezés. A gyerekek sokszor nem értik világosan, hogy hogyan kellene megvalósulni az anyagmegmaradás elvének. (Természetesen, ha már az egyenletrendezés után felírják a tömegeket, az triviális, hogy a bal oldalon szereplő anyagok össztömege egyenlő a jobb oldalon szereplő anyagok össztömegével.) A leggyakoribb meglepetés, hogy a kiindulási oldalon felírt mólok számának összege nem egyezik meg a keletkezési oldalon szereplő mólok számának összegével. A megértést a részecskekép nagymértékben segíti: bár a kémiai részecskék megváltoznak (elektront vesznek fel vagy adnak le, megváltozik az oxidációs állapotuk, illetve más részecskével kapcsolódnak össze, mint addig, de a számuk nem változik meg). Ha ezt megértik a tanulók, akkor lehet tovább finomítani a megértési folyamatot. A legtöbb egyenletet lehet rendezni a ránézésre történő egyenletrendezési eljárásokkal. A magyar diákok egyértelműen ezt az egyenletrendezési stratégiát kedvelik.

Az egyenletrendezési eljárásnál sok hiba forrása az, hogy a rendezett reakcióegyenletben nem írjuk ki az 1-es együtthatót. Ezért a tanulók gyakran úgy veszik, mintha a rendezetlen egyenletben is a képletek előtt 1-es szerepelne. Az egyenletrendezés tanítása során rá kell szoktatni a tanulókat arra, hogy írják ki az 1-es együtthatót is, így egy fontos hibaforrást sikerül kiiktatniuk.

Példaként nézzük, hogyan rendezhető a következő reakcióegyenlet:

$$KBr + KBrO_3 + HCl \rightarrow Br_2 + KCl + H_2O$$

A reakcióban résztvevő elemek száma: 5, tehát a felírható független egyenletek száma is ennyi kell legyen: 5. A reakcióban résztvevő kémiai anyagok, idegen szóval a reaktánsok száma: 6. Próbáljuk meg a reakcióegyenletet algebrai módszerrel rendezni! Jelöljük a reakcióban résztvevő egyes kémiai anyagok keresett együtthatóit a, b, c, d, e ismeretlenekkel, egy együtthatót pedig önkényesen 1-nek választunk, mely legyen az első anyag, a KBr!

$$1\ KBr + a\ KBrO_3 + b\ HCl \to$$
$$c\ Br_2 + d\ KCl + e\ H_2O$$

A felírható anyagmérleg-egyenletek az egyes elemek esetében:

K-ra: $1 + a = d$
Br-ra: $1 + a = 2c$
O-re: $3a = e$
H-re: $b = 2e$
Cl-ra: $b = d$

Ezek egyben független egyenletek is. Az egyenletrendszer megoldásaként a következő együtthatókat kapjuk: $a = 1/5$, $b = 6/5$, $c = 3/5$, $d = 6/5$, $e = 3/5$. Az így nyert együtthatókat 5-tel szorozva jutunk el a végeredményhez (azért szorozzuk be „önkényesen” 5-tel, mert a kémiában egész számokkal szeretünk dolgozni, itt pedig éppen 5 a szereplő törtek nevezője):

$$5\ KBr + 1\ KBrO_3 + 6\ HCl =$$
$$= 3\ Br_2 + 6\ KCl + 3\ H_2O$$

Megemlítjük, hogy egyébként bonyolultabb úton is eljuthatunk az együtthatók meghatározásához. Ekkor a legkisebb közös többszörös matematikából ismert fogalmát használjuk fel. Tehát a kémiában több matematikai elem között a számelmélet kap szerepet, melynek hangsúlyozása fontos lenne matematikaórán. Érdemes lenne kémiai példák keretében feldolgozni a számelméleti fogalmat.

Természetesen egyszerűbb reakcióegyenletek esetében nem szükséges ténylegesen felírni a matematikai egyenletrendszert, de a megoldás módja, logikája hasonló.

Az egyenes arányosság minden kémiai jellegű számítási feladat alapja.

Az egyenes arányosságon kívül fontos még a 10 hatványaival való számolás a részecskék nagy száma miatt, továbbá a logaritmus, középiskolában a tízes alapú logaritmussal való számítások ismerete a pH fogalom miatt.

A pH fogalom matematikai jellegű megértési nehézségei

A továbbiakban egy 2010-es kémia felmérésben szerepelt, a pH fogalom alkalmazásával kapcsolatos feladat megoldottságát elemezzük, mely alkalmas a megértési nehézségek szemléltetésére. A felmérésben 1582 elsőéves hallgató vett részt, akik választott szakjához fontosak a kémia ismeretek, mint vegyészmérnök, biomérnök, környezettan stb. szakos hallgatók. A feladat szövege a következő volt.

Sóoldat készítése:

a) Első lépésben 2-es pH-jú, 36,47 g HCl-t tartalmazó sósavat 100-szorosára hígítunk. Mennyi lesz a hígított oldat pH-ja?

b) Második lépésben 12-es pH-jú 40 g nátrium-hidroxid-ot tartalmazó oldatot 10-szeresére hígítunk. Mennyi lesz a hígított oldat pH-ja?

c) Mennyi lesz az oldat pH-ja, ha a két oldatot összeöntjük?

d) Mennyi konyhasó keletkezik?

e) Hány liter sóoldat keletkezett?

Megoldás

A pH egy vizes oldat kémhatását (savasságát/lúgosságát) jellemző szám. Definíciója szerint az oldatban lévő H^+ (hidrogénion) koncentráció negatív logaritmusa. Pontosabban a H_3O^+ hidroxónium-ioné.

A tiszta vízben végbemegy egy egyensúlyi reakció, melynek során 1 liter vizet alkotó vízmolekulák közül 10^{-7} mólnyi vízmolekula egy-egy protont ad át 10^{-7} mólnyi másik vízmolekulának (25 °C-on) a következő reakció szerint:

$H_2O + H_2O \rightleftharpoons H_3O^+ + OH^-$

Erre az egyensúlyra vezető folyamatra felírható a következő:

$$K_{víz} = [H_3O^+][OH^-] =$$
$$= 10^{-7}\ mol/dm^3 \cdot 10^{-7}\ mol/dm^3 =$$
$$= 10^{-14}\ (mol/dm^3)^2$$

A $K_{víz}$ a víznek az úgynevezett egyensúlyi állandója, neve vízionszorzat.

A szögletes zárójellel a megfelelő ionok moláris koncentrációját jelöljük.

Ebből következik: tiszta vízben és semleges kémhatású oldatokban:

- $[H_3O^+] = [OH^-] = 10^{-7}$ mol/dm^3
- pH = $-\lg 10^{-7} = 7$

Savak és lúgok híg vizes oldatában az egyensúly eltolódik, de a kétféle ion moláris koncentrációjának szorzata ($K_{víz}$) állandó marad.

Lehetne a pOH-t is definiálni, mely 14 – pH.

a) A feladatban a pH = 2 azt jelenti, hogy az oldat oxóniumion koncentrációja 10^{-2} mol/dm^3.

Az oxóniumionok a HCl és a víz kölcsönhatásából kerülnek az oldatba.

$$HCl + H_2O \rightleftharpoons H_3O^+ + Cl^-$$

A feladatban szereplő 36,47 g HCl éppen 1 mól, tehát ebből 1 mól oxóniumion keletkezik, ha feltételezzük, hogy minden HCl molekula disszociál. Tehát ha a koncentráció 0,01 mol/dm^3, akkor definíció szerint ez 0,01 mol/dm^3 = 1 mol (ezt az előbb kaptuk eredményként) / 100 dm^3, azaz a kiindulási oldat 100 dm^3, ami 100 liter. Ezt hígítjuk 100-szorosára, tehát a keletkezett oldat térfogata **10000 liter** lesz. Ekkor az oxóniumionok aránya is 100-ad része lesz az eredetihez képest, vagyis 10^{-4}, tehát az oldat pH = 4.

b) A feladatnak ez a része hasonló gondolkodást igényel, csak az OH^--ionokra nézve.

A nátrium-hidroxid képlete NaOH, tehát 40 g NaOH is éppen 1 mól. Vagyis 1 mól OH^--iont juttat az oldatba. Számolhatunk mintegy visszafelé. Ha a pH = 12, akkor a pOH = 2, vagyis az oldat koncentrációja 0,01, akkor a kiindulási oldat 100 liter. Ezt hígítjuk 10-szeresére, tehát a keletkezett oldat térfogata 1000 liter (1000 dm^3) lesz. Ekkor az előbbihez hasonlóan felhasználjuk az elméleti ismereteket:

$$\text{pOH} = 1 \text{ mol} / 1000 \text{ dm}^3 = \\ = 0{,}001 \text{ mol/dm}^3 = 10^{-3} \text{ mol/dm}^3.$$

Tehát definíció szerint a pOH = 3 lesz, vagyis a pH = 11.

c) Ha a két oldatot összeöntjük, akkor a következő reakció játszódik le:

$$NaOH + HCl = NaCl + H_2O,$$

mivel a Cl^--ionok és a Na^+-ionok változatlanok maradnak, a reakció valójában:

$$H_3O^+ + OH^- \rightleftharpoons 2\ H_2O,$$

vagyis az oxóniumionok és hidroxidionok egyesülnek vízmolekulákká. Ez a közömbösítési reakció. Az elméleti részben is említettük, hogy a vízről tudjuk, hogy semleges kémhatású.

Az oxóniumionok és hidroxidionok koncentrációja egyaránt 10^{-7} lesz, mivel szorzatuk 10^{-14}, vagyis a pH = 7, ami semleges oldatot eredményez, hiszen mindkét anyagból 1–1 mól volt megadva a feladatban.

d) Már kiszámoltuk, hogy 1 mól NaCl, vagyis konyhasó keletkezik (vizes oldatban), melynek tömege 36,47 + 40 – 18 = 58,47 (a közömbösítés során keletkezett víz tömegét kellett levonni a reakcióban résztvevő HCl és NaOH tömegének összegéből).

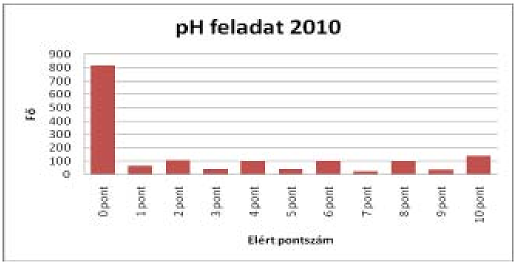
e) 10000 + 1000 = 11000 liter sóoldat keletkezett. Az *a)* és *b)* rész vastagon szedett értékeit használtuk csak fel. A két oldat összeöntésekor a térfogatuk összeadódik.

A feladatmegoldásból látható, hogy milyen sok számolást kell elvégezniük a diákoknak. Tudniuk kell alkalmazni a matematikaórákon tanult egyenletrendezési technikákat a reakcióegyenletek esetében, az egyenes arányosságot az anyagmennyiségek kiszámításához, a hatványokkal való műveleteket és a logaritmust a pH számításához.

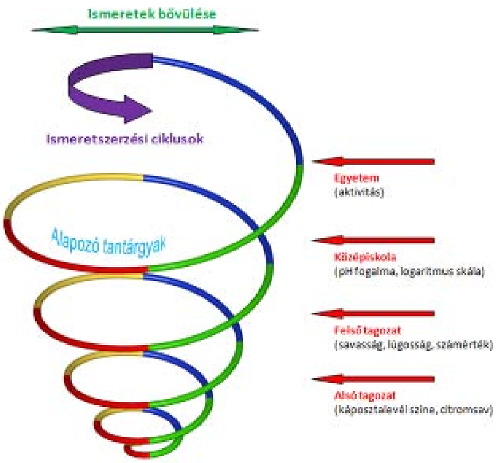
Maximális 10 pontot 142 fő szerzett az 1582 fő közül, mely kevesebb, mint 10%. Az ő összteljesítményük 76,6%-os.

Érdekes megfigyelni, hogy a páros számú pontot szerzett diákok többen vannak. Ez abból adódhat, hogy mindegyik feladatrész 2 pontos volt. Aki el tudta kezdeni a feladatrészt, általában be is tudta fejezni.

A dolgozatírók több, mint a felének egyáltalán semmiféle fogalma nem volt a pH-ról (*2. ábra*). A fogalom természetesen tovább bővül a felsőfokú tanulmányok során is például az aktivitás fogalom bevezetésével, a puffer-rendszerek számításával stb. A fogalmi rendszer alakulását a *3. ábrán* szemléltetjük.



2. ábra
A pH-fogalom alkalmazását kérő feladaton elért tanulói eredmények



3. ábra
A fogalmi fejlődés „csigaház modellje” a pH esetében

Jellegzetes hibák

A különböző típushibákat csakis úgy lehet feltérképezni, majd elemezni, ha megnézzük a dolgozatokat. E részletes elemzéshez 364 fő dolgozatát néztük meg. A részminta kiválasztása nem véletlenszerűen történt, hanem olyan szakos hallgatók dolgozatait néztük meg, akik legalább közepesen, vagy esetleg még jobban teljesítettek az átlaghoz képest. (A kiválasztott minta diákjai átlagosan 5 pontot szereztek.) Ugyanis a gyenge csoportok esetében erre a feladatra nagyon sok 0 pontos megoldás érkezett, vagyis gyakorlatilag semmit nem tudnak a fogalomról, így annak vizsgálata semmitmondó eredményre vezetne.

Az általunk kiválasztott 364 fős mintában, akiknek tételesen is végignéztük, elemeztük a dolgozatát, 133 fő ért el 0 pontot és 76 fő a maximális 10 pontot kapta. Vizsgálatunk számára a maradék *189 fő* dolgozata az érdekes, akik részpontszámokat szereztek, vagyis valameddig eljutottak a megoldásban, de azt különböző okok miatt nem tudták befejezni. Ennél a csoportnál lehetett sok érdekes elképzelést találni, illetve a tudás alkalmazásával kapcsolatos hiányosságokra következtetni. Ez utóbbira „szép példa” az, hogy 65 fő, vagyis az egyharmad eljutott addig, hogy ki tudta számítani a keletkező NaCl mennyiségét, hiszen rájött, hogy éppen 1 mol sósavnak kell 1 mol NaOH-dal reagálnia, de azt már nem ismerte fel, hogy ekkor a keletkezett oldat semleges kémhatású lesz, vagyis pH = 7.

Ilyen dolgozatoknál minden esetben megnéztük, hogy a különböző anyagok vizes oldatának kémhatásával kapcsolatos kérdésben mit válaszolt a diák a NaCl vizes oldatának kémhatására. 7 fő kivételével mindenki tudta, hogy a vizes oldatának semleges a kémhatása! (A részletes vizsgálat alá vett 364 fő közül 68 fő nem tudta, hogy a NaCl vizes oldata semleges. Savas és lúgos válaszok egyaránt előfordultak.) Voltak, akik bonyolult számításba kezdtek.

A fenti egy tipikus példája annak, hogy a diákok sok tényanyagot megtanulnak, nagy a lexikális tudásuk (ez egyben a magyar oktatás sajátossága), hiszen tudják, hogy a NaCl vizes oldata semleges kémhatású, de ezt a tudásukat egy másfajta, életszerű szituációban már nem tudják alkalmazni. (Közvéleménykutatások esetében gyakran alkalmazzák azt a módszert, hogy a kérdőív egymástól viszonylag távoli részében kérdeznek rá azonos dolgokra, de kicsit más kontextusban, majd ezeket a válaszokat összevetik.) A PISA mérések nem a lexikális, hanem az alkalmazásképes tudást kérik számon, ez lehet az egyik oka annak, hogy diákjaink csak a középmezőnyben foglalnak helyet. Nagyon sokan negatív kritikával illetik a PISA méréseket (ez volt a bűnbak), mert rávilágítanak a magyar oktatási rendszer egyik nagy hibájára, hogy nagyrészt az iskolának tanulnak a diákok és nem pedig az életnek.

A felmérésben résztvevők közül voltak, akik az *a)* rész megoldásáig eljutottak, de a *b)* résznél már csak addig, hogy kiszámították a koncentrációt. Ez 5 fő volt a vizsgált részmintában. De arra már nem válaszoltak, hogy az oldat pH-ja hogyan változik, vagyis csökkenni fog. Illetve több, 11 esetben írták azt, hogy növekedni fog, vagyis a 11 helyett 13-at adtak meg végeredményként.

Ebben az esetben a pH-skála érdekes volta a fontos. Hiszen a hígítás a savas oldatnál növeli, míg a lúgos oldatnál csökkenti a számértéket.

Voltak (4 fő), akik az *a)* és a *b)* esetben kiszámított pH-értékek számtani közepét vették.

5 fő esetében a reakcióegyenlet felírása okozott gondot, és emiatt nem tudtak tovább számolni. Egy pillanatra tekintsünk vissza az összes dolgozatot megírt hallgató eredményeit mutató grafikonhoz (2. ábra), amelyről az látszik, hogy több, mint 800 fő, azaz több, mint a hallgatók fele 0 pontos, tehát ennyit sem tud. Pedig ez a kémia legegyszerűbb reakcióegyenlete, amely 7. osztályos tananyag!

4 fő ügyesen elkezdte a pOH-t kiszámítani, ennek értéke a fenti feladatban 3, de utána ezt tekintették a pH-nak, vagyis elfelejtették azt kivonni a 14-ből.

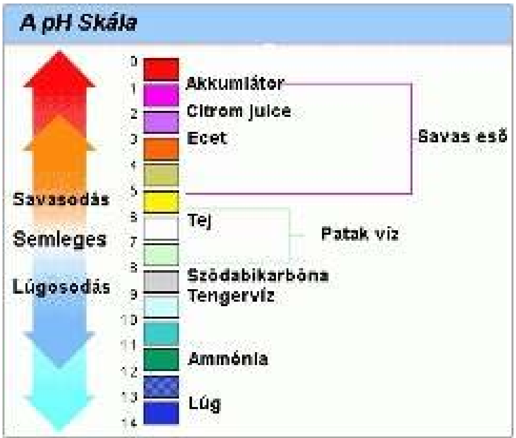
És végül 1 fő esetében a hígítás nem jelent „semmit”, vagyis szerinte az nem változtatja meg a pH értékét, mivel az oldott anyag mennyisége állandó marad.

A vizsgált 189 fő közül 107 esetben tudtunk kimutatni a pH fogalommal kapcsolatos valamilyen hibás elképzelést, melyeket a fentiekben összegeztünk. A többi esetben számolási hiba volt, illetve sokan az utolsó kérdésre nem válaszoltak.

Tapasztalataink alapján a fogalom matematikai nehézségeit az alábbiakban foglalhatjuk össze, mellyel a tananyagfeldolgozási gyakorlatot kívánjuk segíteni:

- A skála 0–14-ig terjed (az extrém koncentrációkat most hagyjuk figyelmen kívül), melynek a közepe, a 7 jelenti a semlegességet. Ez már komoly problémát jelent a gyereknek, mert matematikában a számegyenes „0”-ja felelne meg inkább a 7-es pH-nak, mint egy valamiféle „komplikáltan meghatározott” számérték. Szinonimákat inkább csak a „0” pontos skálára tudunk mondani, mint például a pozitív előjelű gyorsulás ellentettje a negatív előjelű gyorsulás (azaz a lassulás) és a „0” gyorsulás egyenes vonalú egyenletes mozgás vagy álló test esetében áll fenn. Ezt sokkal könnyebb megérteni, mint egy eltolt nullponti rendszert. Valójában a 7-es pH nem is egy abszolút ételemben vett „0” pont, hanem az a pont, ahol a $[H_3O^+]$ és a $[OH^-]$ ionkoncentráció különbsége nulla (*3-1. ábra*).
- A skála logaritmikus, tízes alapú logaritmust alkalmaz, mely esetben az 1 egységnyi különbség valójában 10-szeres változást jelent, azaz ha 10-szeresére hígítjuk az oldatot, akkor a pH csak egy számjeggyel változik, ha 100-szorosára, akkor két számjeggyel stb. Egy példa erre a vörösiszap katasztrófa kapcsán: a Dunában már azért nem jelentett olyan komoly veszélyt a vörösiszapár magas pH-ja, mert a Rábából a Dunába ömlő, akkor még 10-es pH körüli szennyeződés a Duna körülbelül 100-szoros vízhozama miatt felhígult, és így annak pH-ja a közel 8 pH-jú, majdnem normális szintre csökkent.
- A hígítás során a pH értéke a skála közepe irányában változik. Savas oldat hígításakor nő, míg lúgosnál csökken. Akármelyik irányból és akármennyire is hígítjuk az oldatot, a 7-es pH értéket nem léphetjük át!
- A pH mértékegység nélküli számérték (nem %, nem g/dm^3 stb.). (*Radnóti–Király,* 2011)

H+ (mol/litr)	pH	pOH	pH+pOH	OH- (mol/litr)
1	0	14	14	0,00000000000001
0,1	1	13	14	0,0000000000001
0,01	2	12	14	0,000000000001
0,001	3	11	14	0,00000000001
0,0001	4	10	14	0,0000000001
0,00001	5	9	14	0,000000001
0,000001	6	8	14	0,00000001
0,0000001	7	7	14	0,0000001
0,00000001	8	6	14	0,000001
0,000000001	9	5	14	0,00001
0,0000000001	10	4	14	0,0001
0,00000000001	11	3	14	0,001
0,000000000001	12	2	14	0,01
0,0000000000001	13	1	14	0,1
0,00000000000001	14	0	14	1



3-1. ábra
A pH- skála különböző szemléltetési lehetőségei (forrás: http://enfo.agt.bme.hu)

Konstitúciós képletek matematikája

A kémiai konstitúciós képletek, másként szerkezeti képletek matematikai szempontból gráfoknak tekinthetők. Mivel körmentesek és összefüggők, fagráfok. Ebből következik (a fagráfok tulajdonságai alapján), hogy a konstitúciós képletek páros gráfok. Az egyes csúcsok a vegyületet alkotó atomoknak feleltethetőek meg. Egy vegyületben megszámlálható sok atom van, így a szerkezeti képlet síkgráf lesz. A bármely két csúcsot összekötő egyetlen út minden atomon átmegy és a szénatomokat közvetlenül kapcsolja össze ez a feszítő fa. A fagráf levelei lehetnek a vegyület vázát képző atomok, vagy az egyéb elágazást jelentők. Egynél nagyobb foka csak a vázat jelentő atomoknak lehet (de nem feltétlenül kell is lennie).

Irodalom

[1] Balázs Lóránt – Hronszky Imre – Sain Márton (1981): *Kémiatörténeti ABC*. Tankönyvkiadó, Budapest.

[2] Nagy Mária (2013): *A fizikatanítás pedagógiája: matematikai eszközök alkalmazása a fizika tanításában*. TDK-dolgozat. Témavezető: Radnóti Katalin.

[3] Nemzeti alaptanterv 2012

[4] Kerettantervek 2012

[5] http://kerettanterv.ofi.hu/

[6] Pálfalvi Józsefné (2009): Szintfelmérő dolgozatok az ELTE TTK-n 2006–2008. *A matematika tanítása*. XVII. évf. 5. szám

[7] Radnóti Katalin (2007): Miért buknak meg jelentős számban az elsőéves egyetemisták? *Új Pedagógiai Szemle*. LVII. Évfolyam. (11. szám, 42–49.)

[8] Radnóti Katalin (2002): Különböző tudományterületek kapcsolatai a fizikával In.: Radnóti Katalin – Nahalka István (szerk.): *A fizikatanítás pedagógiája*. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 62–108.

[9] Radnóti Katalin – Király Béla (2011): A kémiaoktatás hatékonysága a pH fogalom és a részecskeszemlélet tükrében. *A kémia tanítása*. XIX. évfolyam 1. szám, 16–25.

[10] Tóth Zoltán (2002): Tanulói stratégiák és tévképzetek a reakcióegyenletek rendezésében. *A kémia tanítása*. XI. évfolyam 2. szám, 3–13.

Kovács Béla

Változatok egy témára, avagy hogyan szerkeszthetünk feladatokat?

Hol a hiba?

A $2^x = x^2$ egyenlet megoldása

Látható, hogy az $x = 2$ és $x = 4$ megoldások. Továbbá $x > 0$ esetén az $x \to 2^x$ és $x \to x^2$ ***konvex függvények szigorúan növekvőek, tehát a grafikus képüknek legfeljebb két közös pontja lehet,*** *így más megoldás nincs.*

A XXI. EMMV (Kézdivásárhely) egyik feladatának megoldása során jutunk el a $2^x = x^2$ egyenlethez, amit meg kell oldani (a X. osztály 2.b. feladata és megoldása). Ennek bemutatása szerepelt a Matlap 2011/ 3. számában a 85–86. oldalakon.

Az egyenletnek valóban csak a megtalált két megoldása van, de az indoklás, hogy nincs több, már nem elfogadható, **mert konvex módon szigorúan növekvő függvények grafikus képének lehet kettőnél több közös pontjuk is.**
Kerestem, találtam, és szerkesztettem is ilyen tulajdonságú függvényeket, amelyek kettőnél több pontban metszik egymást.
Például az $f(x) = x^2 - x + 2$ és $g(x) = 2^x$ függvények konvex módon szigorúan növekvők az $]1; \infty[$ intervallumon és 3 közös pontjuk van: $f(1) = g(1) = 2$, $f(2) = g(2) = 4$ és $f(3) = g(3) = 8$.
Ha találtam egyet, akkor már biztosan van több is. Kerestem és találtam, illetve szerkesztettem.
Hogyan találtam ilyen függvényeket? Ráadásul a közös pontok mind természetes számok.
Vettem az $ax^2 + bx + c = d \cdot 2^x$ egyenletet és felírtam, hogy az $x = 1, 2, 3$ pontokban fennálljon az egyenlőség.

$$a + b + c = 2d,\ 4a + 2b + c = 4d,$$
$$9a + 3b + c = 8d.$$

Kaptam 3 lineáris egyenletet 4 ismeretlennel, amit megoldottam a, b és c ismeretlenekre.
A d változó értéke már bármilyen zérótól különböző valós szám lehet. Egyszerűsítés után mindig az $x^2 - x + 2 = 2^x$ egyenlethez jutunk, melynek gyökei az 1, 2 és 3 számok.
Ez aránylag könnyedén bemutatható grafikus módszerrel is.
De miért nincs több megoldása?
A $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = 2^x - (x^2 - x + 2)$ függvény folytonos, deriválható háromszor és

$$h'(x) = 2^x \cdot \ln 2 - 2x + 1,\ h''(x) = 2^x \cdot \ln^2 2 - 2,$$
$$h'''(x) = 2^x \cdot \ln^3 2 > 0$$

minden $x \in \mathbb{R}$ esetén. Ezért a h''-nek legfeljebb egy zérushelye lehet, a h'-nek legfeljebb két zérushelye lehet, a h függvénynek pedig legfeljebb három zérushelye lehet. Ezek pedig az 1, 2 és 3 számok, és nincs több megoldás.
(Rolle tételének egyik sajátos esete alapján, intervallumon deriválható függvény két zérushelye között a derivált függvénynek van legalább egy zérushelye. Vagyis ha a derivált függvénynek nincs zérushelye, akkor a függvénynek legfeljebb egy zérushely lehet.)

Ha a gyökökre az 1, 2 és 4 számokat választjuk, akkor az egyenletrendszer:

$$a + b + c = 2d,\ 4a + 2b + c = 4d,$$
$$16a + 4b + c = 16d.$$

Megoldva és megfelelően választva a d változó értékét, kapjuk a következő egyenletet:

$$2x^2 - 3x + 4 = 3 \cdot 2^{x-1},$$

melynek gyökei: 1, 2 és 4.

Így született meg az alábbi feladatom:

Oldjuk meg a valós számok halmazán a

$$11x^2 - 21x + 22 = 3 \cdot 2^{x+1}$$

egyenletet.

Kovács Béla, Szatmárnémeti
MatLap 2012/3., L: 1987

Megoldás:

Megállapítjuk, hogy $x = 1$ megoldása az egyenletnek.

Ugyanúgy $x = 2$ is megoldása. $x = 3$, és $x = 4$ nem megoldásai az egyenletnek, de $x = 5$ szintén megoldás. Több megoldást nem találunk.

Igazoljuk, hogy nincs több megoldása az egyenletnek.

Tekintsük a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = 3 \cdot 2^{x+1} - 11x^2 + 21x - 22$ függvényt. Folytonos és akárhányszor deriválható, deriváltjai is folytonos függvények, azaz Rolle típusú függvény.

$$f'(x) = 3 \cdot 2^{x+1} \cdot \ln 2 - 22x + 21,$$
$$f''(x) = 3 \cdot 2^{x+1} \cdot \ln 2 \cdot \ln 2 - 22,$$
$$f'''(x) = 3 \cdot 2^{x+1} \cdot \ln 2 \cdot \ln 2 \cdot \ln 2.$$

f''' szigorúan pozitív, nincs zérushelye, amiből következik, hogy f'' függvénynek legfeljebb egy zérushelye lehet, továbbá f' függvénynek legfeljebb 2 zérushelye lehet, végül az f függvénynek legfeljebb 3 zérushelye lehet.

Ha f-nek lenne 4 valós gyöke, akkor az f'-nek kellene, hogy legyen legalább 3 valós gyöke, f''-nek legalább 2 és f'''-nek pedig legalább 1 valós gyöke kellene, hogy legyen.

Tehát az adott egyenletnek pontosan 3 megoldása van a valós számok halmazán és ezek az 1, 2 és 5 számok, amelyek ki is elégítik az egyenletet.

Az $f(x) = 11x^2 - 21x + 22$ és $g(x) = 3 \cdot 2^{x+1}$ függvények konvex módon szigorúan növekvők a $\left]\frac{21}{22}; \infty\right[$ intervallumon és 3 közös pontjuk van: (1; 12), (2; 24) és (5; 192).

Továbblépve, olyan függvényeket szerkesztettem hasonló módszerrel, amelyek 4 pontban metszik egymást.

Vettem az $ax^3 + bx^2 + cx + d = e \cdot 2^x$ egyenletet.

Választottam az egyenlet gyökeinek az 1, 2 és 5 számokat.

Kaptam a következő egyenletrendszert:

$$a + b + c + d = 2e,$$
$$8a + 4b + 2c + d = 4e,$$
$$125a + 25b + 5c + d = 32e$$

Megoldva a, b, c ismeretlenekre nézve, e értékének 1-et választva kaptam:

$$a = \frac{11 - 3d}{30},\ b = \frac{8d - 11}{10},\ c = \frac{82 - 51d}{30},$$

és az egyenlet ekkor:

$$(11 - 3d)x^3 + 3(8d - 11)x^2 +$$
$$+ (82 - 51d)x + 30d = 30 \cdot 2^x$$

alakú lett.

A d változó bármely értékére az egyenlet gyökei: 1, 2 és 5.

A d változó értékétől függően fog változni az egyenlet negyedik gyöke.

Az egyenlet negyedik gyökének megválasztásával kapjuk a d megfelelő értékét.

Ha a negyedik gyök választása 3, akkor d értéke $-\frac{1}{2}$ és kapjuk a következő feladatomat:

Oldjuk meg a valós számok halmazában az

$$5x^3 - 18x^2 + 43x - 6 = 3 \cdot 2^{x+2}$$

egyenletet.

Kovács Béla, Szatmárnémeti
XXII. EMMV Gyergyószentmiklós
MatLap 2012/4., 126. oldal

Megoldás:

Megállapítjuk, hogy $x = 1$ megoldása az egyenletnek.

Ugyanúgy $x = 2$ is megoldása. $x = 3$ is megoldás, $x = 4$ nem megoldása az egyenletnek, de $x = 5$ szintén megoldás. Több megoldást nem találunk.

Igazoljuk, hogy nincs több megoldása az egyenletnek.

Tekintsük a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = 3 \cdot 2^{x+2} - 5x^3 + 18x^2 - 43x + 6$ függvényt. Folytonos és akárhányszor deriválható, deriváltjai is folytonos függvények, azaz Rolle típusú függvény.

$$f'(x) = 3 \cdot 2^{x+2} \cdot \ln 2 - 15x^2 + 36x - 43,$$
$$f''(x) = 3 \cdot 2^{x+2} \cdot \ln 2 \cdot \ln 2 - 30x + 36,$$
$$f'''(x) = 3 \cdot 2^{x+2} \cdot \ln 2 \cdot \ln 2 \cdot \ln 2 - 30,$$
$$f''''(x) = 3 \cdot 2^{x+2} \cdot (\ln 2)^4.$$

f'''' szigorúan pozitív, nincs zérushelye, amiből következik, hogy az f''' függvénynek legfeljebb egy zérushelye lehet, az f'' függvénynek legfeljebb 2 zérushelye lehet, az f' függvénynek legfeljebb 3 zérushelye lehet, végül az f függvénynek legfeljebb 4 zérushelye lehet.

Ha f-nek lenne 5 valós gyöke, akkor az f'-nek kellene legyen legalább 4 valós gyöke, f''-nek legalább 3, f'''-nek legalább 2 valós gyöke kellene legyen, f''''-nek pedig legalább 1 valós gyöke kellene, hogy legyen.
Vagyis a függvény két zérushelye között a derivált függvénynek van legalább egy zérushelye. Rolle tételének sajátos esete.
Tehát az adott egyenletnek pontosan 4 megoldása van a valós számok halmazán és ezek az 1, 2, 3 és 5 számok, amelyek ki is elégítik az egyenletet.
Itt az $f(x) = 5x^3 - 18x^2 + 43x - 6$ és $g(x) = 3 \cdot 2^{x+2}$ függvények konvex módon szigorúan növekvőek a $]2; \infty[$ intervallumon és 3 pontban metszik egymást. (A negyedik metszéspont környékén az f függvény még nem konvex.)

Ha $d = 2$, akkor a kapott egyenlet három gyöke az 1, 2 és 5, a negyedik pedig irracionális szám, amit csak közelítőleg tudunk megadni. Íme erre az esetre szerkesztett feladatom:

Hány valós megoldása van az

$$\boldsymbol{x^3 + 3x^2 - 4x + 12 = 3 \cdot 2^{x+1}}$$

egyenletnek?

Kovács Béla, Szatmárnémeti
MatLap 2012/5., L: 2019

Megoldás:
Megállapítjuk, hogy $x = 1$ megoldása az egyenletnek.
Ugyanúgy $x = 2$ is megoldása. $x = 3$, és $x = 4$ nem megoldásai az egyenletnek, de $x = 5$ szintén megoldás. Több megoldást nem találunk.
Vizsgáljuk meg, hogy van-e még ezeken kívül megoldása az egyenletnek.
Tekintsük a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = 3 \cdot 2^{x+1} - x^3 - 3x^2 + 4x - 12$ függvényt. Folytonos és akárhányszor deriválható, deriváltjai folytonos függvények, azaz Rolle típusú függvény.

$$f'(x) = 3 \cdot 2^{x+1} \cdot \ln 2 - 3x^2 - 6x + 4,$$
$$f''(x) = 3 \cdot 2^{x+1} \cdot \ln 2 \cdot \ln 2 - 6x - 6,$$
$$f'''(x) = 3 \cdot 2^{x+1} \cdot \ln 2 \cdot \ln 2 \cdot \ln 2 - 6,$$
$$f''''(x) = 3 \cdot 2^{x+1} \cdot (\ln 2)^4.$$

f'''' szigorúan pozitív, nincs zérushelye, amiből következik, hogy az f''' függvénynek legfeljebb egy zérushelye lehet, továbbá az f'' függvénynek legfeljebb 2 zérushelye lehet, az f' függvénynek legfeljebb 3 zérushelye lehet, végül az f függvénynek legfeljebb 4 zérushelye lehet. Hármat találtunk, vizsgálni kell, van-e még zérushely.

$$f(5) = 0, f(6) = 72 > 0, f(7) = 294 > 0,$$
$$f(0) = -6 < 0, f(-1) = -15 < 0,$$
$$f(-2) = -45/2 < 0, f(-3) = -93/4 < 0,$$
$$f(-4) = -93/8 < 0, \text{ de } f(-5) = 291/16 > 0.$$

$f(-4) \cdot f(-5) < 0$, ezért van még egy megoldása az egyenletnek, ami nagyobb, mint –5 és kisebb, mint –4 Darboux tételének egyik következménye alapján.
Ha f-nek lenne 5 valós gyöke, akkor az f'-nek kellene, hogy legyen legalább 4 valós gyöke, f''-nek legalább 3, f'''-nek legalább 2, f''''-nek pedig legalább 1 valós gyöke kellene, hogy legyen.
Vagyis a függvény két zérushelye között a derivált függvénynek van legalább egy zérushelye Rolle tételének értelmében.
Tehát az adott egyenletnek pontosan 4 megoldása van a valós számok halmazán, és ezek az 1, 2, 5, amelyek ki is elégítik az egyenletet, és még egy –5 és –4 között. (Számítógéppel vizsgálva a negyedik gyök közelítő értéke –4,48.)
Itt az $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4x + 12$ és $g(x) = 3 \cdot 2^{x+1}$ függvények konvex módon szigorúan növekvőek az $]1; \infty[$ intervallumon és 3 pontban metszik egymást. (A negyedik metszéspont környékén az f függvény még nem konvex.)

További érdekesebb esetek

$d = -3$ esetben kapjuk a következő feladatot:

Hány valós megoldása van a következő egyenletnek?

$$\boldsymbol{4x^3 - 21x^2 + 47x - 18 = 3 \cdot 2^{x+1}}$$

(kb)

Megoldás: 1, 2, 5 és még egy 5,39 – 5,4 között.

$d = -7$ esetben:

Hány valós megoldása van a következő egyenletnek?

$$\boldsymbol{32x^3 - 201x^2 + 439x - 210 = 15 \cdot 2^{x+1}}$$

(kb)

Megoldás: 1, 2, 5 és még egy 7,3 – 7,4 között.

$d = 1$ esetben:

Oldjuk meg a valós számok halmazában a következő egyenletet.

$$8x^3 - 9x^2 + 31x + 30 = 15 \cdot 2^{x+1}$$

(kb)

Megoldás: 0, 1, 2, 5.

$d = -37/6$ esetben:

Oldjuk meg a valós számok halmazában a következő egyenletet.

$$59x^3 - 362x^2 + 793x - 370 = 15 \cdot 2^{x+2}$$

(kb)

Megoldások: 1, 2, 5, 7.

$d = -4/3$ esetben:

Oldjuk meg a valós számok halmazában a következő egyenletet.

$$3x^3 - 13x^2 + 30x - 8 = 3 \cdot 2^{x+1}$$

(kb)

Megoldások: 1, 2, 4, 5

Itt az $f(x) = 3x^3 - 13x^2 + 30x - 8$ és $g(x) = 3 \cdot 2^{x+1}$ függvények konvex módon szigorúan növekvőek a $]2; \infty[$ intervallumon és 3 pontban metszik egymást. (A negyedik metszéspont környékén az f függvény még nem konvex.)

A bemutatott módszert tovább folytathatjuk, negyedfokú polinomok és exponenciális függvények egyenlőségét vizsgálva. Például:

Oldjuk meg a valós számok halmazában a következő egyenletet.

$$x^4 - 6x^3 + 23x^2 - 18x + 24 = 3 \cdot 2^{x+2}$$

(kb)

Megoldás:

Észre kell venni, hogy az 1, 2, 3, 4 és 5 számok megoldásai az adott egyenletnek. Igazoljuk, hogy nincs több megoldása.

A $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = 3 \cdot 2^{x+2} - (x^4 - 6x^3 + 23x^2 - 18x + 24)$ függvény folytonos és akárhányszor deriválható. Ekkor

$$h'(x) = 3 \cdot 2^{x+2} \cdot \ln 2 - 4x^3 + 18x^2 - 46x + 18,$$
$$h''(x) = 3 \cdot 2^{x+2} \cdot \ln^2 2 - 12x^2 + 36x - 46,$$
$$h'''(x) = 3 \cdot 2^{x+2} \cdot \ln^3 2 - 24x + 36,$$
$$h^{(4)}(x) = 3 \cdot 2^{x+2} \cdot \ln^4 2 - 24,$$
$$h^{(5)}(x) = 3 \cdot 2^{x+2} \cdot \ln^5 2 > 0,$$

minden $x \in \mathbb{R}$ esetén.

Tehát $h^{(4)}$-nek legfeljebb egy zérushelye lehet, $h^{(3)}$-nak legfeljebb két zérushelye lehet, h''-nek legfeljebb három zérushelye lehet, h'-nek legfeljebb négy zérushelye lehet, végül h-nak legfeljebb öt zérushelye lehet. Ezeket megtaláltuk. Tehát az adott egyenletnek pontosan öt valós megoldása van, ezek az 1, 2, 3, 4 és 5 számok.

Itt az $f(x) = x^4 - 6x^3 + 23x^2 - 18x + 24$ és $g(x) = 3 \cdot 2^{x+2}$ függvények konvex módon szigorúan növekvőek az $]1, \infty[$ intervallumon és 5 közös pontjuk van: (1; 24), (2; 48), (3; 96), (4; 192) és (5; 384).

Végezetül még néhány javasolt feladat

Oldjuk meg a valós számok halmazában a következő egyenletet.

$$7x^4 - 52x^3 + 197x^2 - 212x + 180 = \\ = 15 \cdot 2^{x+2}$$

(kb)

M: 1, 2, 3, 4, 6

Oldjuk meg a valós számok halmazában a következő egyenletet.

$$3x^4 - 8x^3 + 33x^2 + 32x + 60 = 15 \cdot 2^{x+2}$$

(kb)

M: 0, 1, 2, 3, 4

Oldjuk meg a valós számok halmazában a következő egyenletet.

$$x^5 - 5x^4 + 25x^3 + 5x^2 + 94x + 120 = \\ = 15 \cdot 2^{x+3}$$

(kb)

M: 0, 1, 2, 3, 4, 5

Oldjuk meg a valós számok halmazában a következő egyenletet.

$$11x^5 - 45x^4 + 215x^3 + 285x^2 + \\ + 9854x + 1560 = 45 \cdot 2^{x+5}$$

(kb)

M: –1, 1, 2, 3, 4, 5

Hány valós megoldása van a következő egyenletnek?

$$30x^5 - 91x^4 - 60x^3 + 875x^2 + 1110x + \\ + 1016 = 45 \cdot 2^{x+5}$$

(kb)

M: –2, –1, 1, 2, 4 és még egy 11 és 12 között. Összesen 6 megoldás.

Vígh-Kiss Erika

Feladatok tehetséggondozó szakkörre

Több, mint 20 éves tanári pályafutásom során többször tapasztaltam, hogy a gyerekek, köztük a matematikában tehetségesek is, kedvelik azokat a feladatokat, amelyekben éppen az idei évszám szerepel vagy valamilyen magyar vonatkozása van. Olyan algebrai úton megoldható feladatokat állítottam össze felső tagozatos tanulók számára, amelyek megoldásában szereplő gondolatmenetek a tankönyvekben ritkán fordulnak elő, és főleg a versenyekre felkészülés vagy matematika tagozatos munka során, illetve jubileumi órákon, tehetséggondozó szakkörökön jelenthetnek üde színfoltot a gyerekek számára. A legtöbb feladat a 2013-as évszámra vonatkozik.

1. feladat

Adj meg olyan számjegyet, amelyet a $\overline{2010a1102210}$ számban az a számjegy helyére írva 7-tel osztható számot kapunk!

Megoldás:
7-tel azok és csak azok a számok oszthatók, amelyek számjegyeit (hátulról kezdve) hármasával csoportosítva, majd az így nyert csoportokat váltakozó előjellel összeadva, a kapott eredmény (vagy annak abszolútértéke) osztható 7-tel.

$$A = 210 - 102 + 0a1 - 201 = 93 + 0a1,$$

ennek a számnak 7-tel oszthatónak kell lennie.

$$A = 91 + 2 + a1.$$

(ahol $a1$ egy kétjegyű szám)
91 osztható 7-tel, tehát A akkor osztható 7-tel, ha $2 + a1$ is osztható 7-tel. A 7-tel osztható kétjegyű számok közül csak a 63 végződik 3-ra, így $a = 6$.

2. feladat

Gazda Gréti egy szép napon úgy döntött, hogy 2010 darab 1 eurós érmét szétoszt rokonai között úgy, hogy a megajándékozottak rendre egymást követő páros számú érmét kapjanak.

a) Hány rokonát ajándékozhatta meg Gazda Gréti?
b) Az egyes esetekben mennyi volt a legkisebb összeg, amit a rokonok kaptak?

Megoldás:
A feladatot úgy is megfogalmazhatjuk, hogy hányféleképpen bonthatjuk fel a 2010-et egymást követő pozitív páros számok összegére. Legyen n db egymást követő páros egész számunk összege: $a + a + 2 + a + 4 + \ldots + a + 2n - 2$, ahol a páros számot jelöl.
Írjuk fel a keresett összeget kétféle módon, majd adjuk össze az első két sort:

$$a + a + 2 + a + 4 + \ldots + \\ + a + 2n - 4 + a + 2n - 2 = 2010$$

$$a + 2n - 2 + a + 2n - 4 + \ldots + \\ + a + 4 + a + 2 + a = 2010$$

Így az $n \cdot (2a + 2n - 2) = 2 \cdot 2010$ egyenlethez juthatunk.
Tehát $n \cdot (a + n - 1) = 2010$, ahol n kisebb, mint $a + n - 1$.

$$2010 = 2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot 67^1.$$

2010-nek $(1 + 1) \cdot (1 + 1) \cdot (1 + 1) \cdot (1 + 1) = 2^4 = 16$ különböző pozitív osztója van. Így az $n \cdot (a + n - 1) = 2010$ egyenlet azon megoldásainak száma, amikor az első tényező a kisebb, a 16 lehetőség fele. 8-féleképpen lehet a 2010-et egymás után következő pozitív páros számok összegére bontani. Az előállításokat felsoroljuk, megadva az egymást követő számok számát (n) és ezen számok közül az elsőt.

n	1	2	3	5	6	10	15	30
a	2010	1004	668	398	330	192	120	38

A táblázat alapján a *b)* kérdés is megválaszolható.
(2010 osztói: 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30, 67, 134, 201, 335, 402, 670, 1005, 2010.)

3. feladat

– Hány unokája van, Miska bácsi? – kérdezte Pali a szintén matematikus szomszédját.
– Találd ki! Egy kezemen meg tudom számolni. Annyit azért mondhatok, hogy az életkorom és unokáim életkorának szorzata éppen 2010-et ad.
– Ebből még nem tudom kitalálni.
– Nincs közöttük két egyforma korú és átlagéletkorunk több, mint 21 év.
– Még ebből sem tudok rájönni.
– Nézd, ezen a képen a középső unokám éppen labdázik.
– Köszönöm, most már tudom a megoldást.

Vajon Te is ki tudod-e találni, hány évesek Miska bácsi unokái, ha ez a párbeszéd 2010-ben hangzott el?

Megoldás:
2010-et a következőképpen bonthatjuk a feltételeknek megfelelő számok szorzatára:

$$\begin{aligned}2010 &= 1\cdot 2\cdot 3\cdot 5\cdot 67 = 2\cdot 3\cdot 5\cdot 67 =\\ &= 1\cdot 2\cdot 15\cdot 67 = 2\cdot 15\cdot 67 =\\ &= 1\cdot 5\cdot 6\cdot 67 = 5\cdot 6\cdot 67 =\\ &= 1\cdot 3\cdot 10\cdot 67 = 3\cdot 10\cdot 67 =\\ &= 1\cdot 30\cdot 67 = 30\cdot 67\end{aligned}$$

Az egyes esetekben az átlagéletkor:

$$\begin{aligned}(1+2+3+5+67) : 5 &= 15{,}6\\ (2+3+5+67) : 4 &= 19{,}25\\ (1+2+15+67) : 4 &= 21{,}25\\ (2+15+67) : 3 &= 28\\ (1+5+6+67) : 4 &= 19{,}75\\ (5+6+67) : 3 &= 26\\ (1+3+10+67) : 4 &= 20{,}25\\ (3+10+67) : 3 &= 16{,}6\\ (1+30+67) : 3 &= 32{,}66\\ (30+67) : 2 &= 48{,}5\end{aligned}$$

Mivel nincs két egyforma korú unoka (akik csak egyévesek lehetnének) és van középső unoka, ezért az unokák 1, 2 és 15 évesek. Tehát Miska bácsinak 3 unokája van, ő maga pedig 67 éves.

4. feladat

Hány évesek az előző feladatbeli unokák, ha Misi bácsi nem árulja el az átlagéletkorukat és az idei évszám azt jelenti, hogy 2013-at írunk?

Megoldás:
2013-at a következőképpen bonthatjuk a feltételeknek megfelelő (életkorokról van szó) számok szorzatára:

$$2013 = 1\cdot 3\cdot 11\cdot 61 = 3\cdot 11\cdot 61 = 1\cdot 33\cdot 61$$

Az egyes esetekben az átlagéletkor:

$$\begin{aligned}(1+3+11+61) : 4 &= 19\\ (3+11+61) : 3 &= 25\\ (1+33+61) : 3 &= 31{,}67\end{aligned}$$

Mivel nincs két egyforma korú unoka (akik csak egyévesek lehetnének) és van középső unoka, ezért az unokák 1, 3 és 11 évesek. Tehát Miska bácsinak ebben az esetben is 3 unokája van, ő maga pedig 61 éves.

5. feladat

Bolyai János, a zseniális magyar matematikus halálának 150. évfordulóját ünnepeltük 2010-ben. Helyezd el a táblázatban a táblázatbeli kétjegyű számokat úgy, hogy minden sorban, minden oszlopban és átlósan is a négy szám összege 150 legyen!

12	12	12	12
24	24	24	24
46	46	46	46
68	68	68	68

Két lehetséges megoldás:

12	46	68	24
24	68	46	12
46	12	24	68
68	24	12	46

68	24	12	46
12	46	68	24
46	12	24	68
24	68	46	12

6. feladat

Bolyai János, a hiperbolikus geometria megalkotója tudta, hogy bármely 3×3-as bűvös négyzetet megfelelően elhelyezett 3 szám meghatároz. Bolyai emlékének tisztelegve töltsd ki a hiányzó számokat a bűvös négyzetben.

a	b	c
d	e	79
41	97	f

Megoldás:
Az alsó sort és a harmadik oszlopot nézve:

$$41 + 97 + f = f + 79 + c,$$

ahonnan $c = 59$.
A középső sort és az egyik átlót nézve:

$$d + e + 79 = 41 + e + 59,$$

ahonnan $d = 21$.

A harmadik oszlopot és az egyik átlót nézve:

$$59 + 79 + f = 59 + e + 41,$$

amiből $f = e - 38$.
Az első oszlopot és a másik átlót nézve:

$$a + 21 + 41 = a + e + f.$$

Innen a-t kiejtve és $f = e - 38$-at helyettesítve kapjuk, hogy $e = 50$. Ebből $f = 12$. Továbbá $a = 88$, $b = 3$. A bűvös összeg tehát 150.

88	3	59
21	50	79
41	97	12

2013-as feladatok

7. feladat

Melyik az a legkisebb pozitív egész szám, amely számjegyei összegének 2013-szorosa?

Megoldás:
Az n szám számjegyeinek összegét jelöljük $S(n)$-nel. Ekkor $n = 2013 \cdot S(n)$.
Tehát n osztható 3-mal, ekkor $S(n)$ is osztható 3-mal, azaz n osztható 9-cel, így $S(n)$ osztható 9-cel. Ezért $n = 2013 \cdot 9k$ alakú. Ha $k = 1$, akkor $n = 2013 \cdot 9 = 18117$, de ekkor $S(n) = 18$, ami nem felel meg. Ha $k = 2$, akkor $n = 2013 \cdot 18 = 36234$. Mivel ekkor $S(n) = 18$, ezért ez a legkisebb megfelelő szám.

8. feladat

Határozzuk meg a következő kifejezés értékét:

$$1 \cdot 2 - 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 - 4 \cdot 5 + \ldots +$$
$$+ 2009 \cdot 2010 - 2010 \cdot 2011 +$$
$$+ 2011 \cdot 2012 - 2012 \cdot 2013 + 2013 \cdot 2014$$

Megoldás:
A kijelölt műveleteket a következőképpen csoportosíthatjuk:

$$1 \cdot 2 = 2 \cdot 1$$
$$-2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 = -2 \cdot 3 + 4 \cdot 3 = 2 \cdot 3$$
$$-4 \cdot 5 + 5 \cdot 6 = -4 \cdot 5 + 6 \cdot 5 = 2 \cdot 5$$
$$-6 \cdot 7 + 7 \cdot 8 = -6 \cdot 7 + 8 \cdot 7 = 2 \cdot 7$$
$$\vdots$$
$$-2010 \cdot 2011 + 2011 \cdot 2012 = = -2010 \cdot 2011 + 2012 \cdot 2011 = 2 \cdot 2011$$
$$-2012 \cdot 2013 + 2013 \cdot 2014 = = -2012 \cdot 2013 + 2014 \cdot 2013 = 2 \cdot 2013$$

A keresett összeg:

$$2 \cdot (1 + 3 + \ldots + 2013) = = 2014 \cdot 1007 = 2028098.$$

9. feladat

Határozd meg az összes olyan $\overline{abcd}$ négyjegyű számot, amelyre

$$\overline{abcd} + \overline{ac} + \overline{bd} + a + b + c + d = 2013.$$

Megoldás:
Írjuk fel az összeget a következőképpen:

$$1011a + 11b + 12c + 3d = 2013.$$

Nyilván csak $a = 1$ lehetséges, mert ha a már 2 vagy annál nagyobb lenne, akkor az egyenlet bal oldala már 2020-nál nagyobb lenne.
Így kapjuk, hogy

$$1011 + 111b + 12c + 3d = 2013$$
$$111b + 12c + 3d = 1002$$

Az utóbbi egyenlőségben b értéke legalább 8, ugyanis ha kisebb lenne, akkor a bal oldal értéke még $c = d = 9$ esetén is kisebb lenne a jobb oldalnál.

Ha $b = 8$, akkor

$$888 + 12c + 3d = 1002$$
$$12c + 3d = 114$$
$$4c + d = 38$$

Ekkor $d = 2$, $c = 9$ vagy $d = 6$, $c = 8$.
Ebben az esetben a feltételeknek megfelelő számok: 1892, 1886.

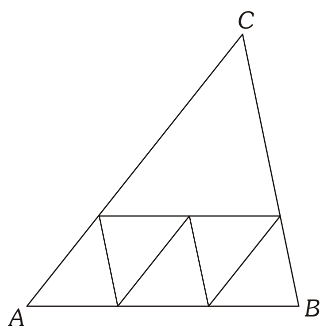
Ha $b = 9$, akkor $12c + 3d = 3$, ahonnan $c = 0$, $d = 1$ adódik. Ekkor a megoldás: 1901.
A feladat feltételeit kielégítő négyjegyű számok tehát: 1886, 1892, 1901.
Ellenőrzés:

$$1886 + 18 + 86 + 1 + 8 + 8 + 6 = 2013$$
$$1892 + 19 + 82 + 1 + 8 + 9 + 2 = 2013$$
$$1901 + 10 + 91 + 1 + 9 + 0 + 1 = 2013$$

10. feladat

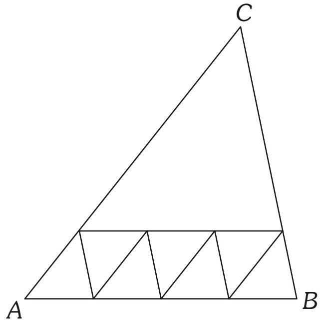
Feldarabolható-e egy tetszőleges háromszög
a) 2013;
b) 2014 darab, az eredetihez hasonló háromszögre?

Megoldás:
Ha behúzzuk a háromszög középvonalait, akkor négy, az eredetihez hasonló kis háromszöget kapunk. Ha már sikerült valahány részre felbontani a háromszöget, akkor hárommal több részre is fel tudjuk bontani, hiszen bármelyik kis háromszöget fel tudjuk darabolni négy, hozzá, és így az eredetihez is hasonló háromszögre.
Mivel az eredeti háromszöget négy kis háromszögre fel tudjuk darabolni, ezért fel tudjuk $n = 3k + 1$ (k pozitív egész) kis háromszögre is. Mivel 2014 3-mal osztva 1 maradékot ad, ezért a feladat b) részével készen vagyunk.
Az *1. ábrán* látható módon hat hasonló háromszögre is felbontható az eredeti háromszög (az osztópontok a megfelelő oldal harmadoló pontjai), így a fentiek alapján $n = 3k$ ($k \geq 2$ egész) háromszögre is készen vagyunk.



1. ábra

Mivel 2013 osztható 3-mal, *ezért* a feladat *a)* részének megoldásával is készen vagyunk.
Érdemes azonban megjegyezni, hogy az eredeti háromszöget nyolc hozzá hasonló háromszögre is fel tudjuk bontani (*2. ábra*), ezért megvalósítható a felbontás $n = 3k + 2$ ($k \geq 2$ egész) darab háromszögre is.



2. ábra

11. feladat

Van n darab egyforma szabályos háromszögünk. Minden háromszög csúcsaira tetszőleges sorrendben ráírjuk egytől 3-ig a számokat. Egymásra akarjuk rakni a háromszögeket úgy, hogy pontosan fedjék egymást.
Egymásra tudunk-e helyezni valamennyi megszámozott háromszöget úgy, hogy az összeg minden csúcsnál

a) 2013
b) 2014 legyen?

Megoldás:
Ha a feladatban leírt módon számozunk meg és rakunk egymásra n darab háromszöget, akkor minden csúcsnál $2n$ lesz az összeg. (Páros n esetén $\frac{n}{2}\cdot 4 = 2n$, páratlan n esetén pedig $\frac{n-3}{2}\cdot 4 + 6 = 2n$.)
Könnyen igazolható, hogy bármilyen más módon számozzuk meg és rakjuk egymásra az n darab háromszöget úgy, hogy minden csúcsnál ugyanazt az összeget kapjuk, ez az összeg mindenképp $2n$ lesz, hiszen az egy háromszögön belül felírt számok összege 6, n darab háromszög esetén pedig $6n$. Vagyis ha minden csúcsnál ugyanannyi az összeg, akkor egy csúcsra $\frac{6n}{3} = 2n$ jut. Vagyis ha n darab háromszöget egymásra helyezünk, akkor mindenképpen páros lesz az összeg. A 2014 páros szám, tehát előfordulhat összegként, a 2013 viszont nem fordulhat elő.

12. feladat

Előáll-e két egymást követő pozitív egész szám szorzataként a $2^{2013} + 6$?

Megoldás:
Két egymást követő pozitív egész szám szorzata 0-ra, 2-re vagy 6-ra végződik. A 2^{2013} szám utolsó számjegye 2. Ugyanis 2 hatványai ciklikusan ismétlődnek: $2^1 = 2$, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, $2^4 = 16$, $2^5 = 32$, egy ciklusban a 2, 4, 8, 6 végződések követik egymást. A 2013 négyes maradéka 2, tehát 2^{2011} szám 2-re végződik. Ehhez 6-ot adva a szám utolsó számjegye 8, tehát a $2^{2013} + 6$ nem lehet két egymást követő pozitív szám szorzata.

13. feladat

Hányféleképpen választhatunk ki az első 2013 természetes szám közül kettőt úgy, hogy összegül páros számot kapjunk?

Megoldás:
Két természetes szám összege akkor lesz páros, ha vagy mindkettő páros, vagy mindkettő páratlan. Az első 2013 természetes szám között 1006 darab páratlan van, ezek közül kettőt $\frac{1006\cdot 1005}{2} = 505\,515$-féleképpen választhatunk ki. A többi 1008 számból kettőt pedig $\frac{1008\cdot 1007}{2} = 507\,528$-féleképpen választhatunk ki. Ez összesen $1\,013\,043$ lehetőség.

14. feladat

Hányféleképpen választhatunk ki három különböző, 2013-nál nem nagyobb pozitív egész számot úgy, hogy az összegük páros számot adjon?

Megoldás:
Három egész szám összege akkor ad páros számot, ha az összeadandókban páratlan számú páros szám szerepel.
Ha az 1006 páros számból hármat akarunk kiválasztani, akkor az elsőt 1006-féleképpen, a másodikat 1005-féleképpen, a harmadikat pedig 1004-féleképpen választhatjuk ki. Ez $1006 \cdot 1005 \cdot 1004$ lehetőség. De ekkor minden kiválasztott számhármast hatszor vettünk figyelembe, hiszen három szám 6-féleképpen permutálható. Így az 1006 páros számból hármat 169 179 020-féleképp választhatunk ki.
Az 1006 páros számból egyet 1006-féleképpen választhatunk ki, hozzá az 1007 páratlan számból kettőt $\frac{1007 \cdot 1006}{2} = 506\,521$-féleképpen választhatunk ki, ez összesen

$$1007 \cdot 506\,521 = 510\,066\,647 \text{ eset.}$$

Tehát a 2013-nál nem nagyobb pozitív egészek közül $169\,179\,020 + 510\,066\,647 =$ $= 679\,245\,667$-féle módon választható ki három úgy, hogy az összegük páros legyen.

15. feladat

A sík két párhuzamos egyenesének egyikén 2012, a másikon 2013 darab pont van. Az adott pontokból hány darab háromszög szerkeszthető?

Megoldás:
Ha az egyik egyenesről választunk két pontot, akkor ezt $\binom{2012}{2}$-féleképpen tehetjük. A másik egyenesről egy pontot ezekhez választva összesen 4 072 431 858 lehetőség adódik.
2012 pontból egyet és 2013 pontból kettőt pedig 4 074 456 936-féleképpen választhatunk ki. Tehát összesen 8 146 888 794 háromszöget rajzolhatunk.

16. feladat

Mennyi azoknak a csupa különböző számjegyekből álló négyjegyű számoknak az összege, amelyek számjegyei között csak a 2013 számjegyei szerepelhetnek?

Megoldás:
Az ezresek helyén 0 nem állhat, tehát az egyes helyiértékekre rendre 3, 3, 2, 1-féle számjegy kerülhet, azaz összesen $3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 18$ darab ilyen szám van. A 0-tól különböző számjegyek az egyesek helyének kivételével minden helyiértéken 6-szor fordulnak elő, így itt a számjegyek összege $6 \cdot (1 + 2 + 3) = 36$. A nullától különböző számjegyek az egyesek helyén 4-szer fordulnak elő, így itt a számjegyösszeg $4 \cdot (1 + 2 + 3) = 24$. Tehát a 18 szám összege

$$36 \cdot (1000 + 100 + 10) + 24 = 39\,984.$$

17. feladat

Van-e olyan egész szám, amelynek négyzete $2013^{2015} + 1$ alakba írható?

Megoldás:
A 2013^{2015} szám utolsó számjegyét az határozza meg, hogy 3^{2015} utolsó számjegye mire végződik. 3 hatványait vizsgálva azt tapasztaljuk, hogy azok négyes ciklusonként ismétlődnek: $3^1 = 3$, $3^2 = 9$, $3^3 = 27$, $3^4 = 81$, $3^5 = 243$, … .
2015 néggyel osztva hármat ad maradékul, tehát a ciklusban a harmadik lesz 3^{2015} utolsó számjegye, azaz 7. Ezért $2013^{2015} + 1$ utolsó számjegye 8, ezért ez a szám nem lehet négyzetszám.

18. feladat

Határozd meg, hogy az alábbi szorzatban milyen számjegyek állnak a *-ok helyén.

$$3* \cdot *1 = 2{*}{*}3.$$

Megoldás:
A szorzandó 1-esre végződik, így a szorzat csak akkor végződhet 3-ra, ha a másik szorzandó is 3-ra végződik, tehát $33 \cdot {*}1 = 2{*}{*}3$.
$2003 : 33 = 60$, $2993 : 33 = 90$, tehát a második szorzandó 60 és 90 közötti egyre végződő szám. Tehát a megoldások:

$$33 \cdot 61 = 2013,\ 33 \cdot 71 = 2343,\ 33 \cdot 81 = 2673.$$

19. feladat
(5. osztály 2014-ről)

Határozd meg a következő osztásban a *-ok helyén szereplő számjegyeket!

$$20{*}{*} : 19 = {*}{*}6$$

Megoldás:
$2000 : 19 = 105$, maradék az 5; $2100 : 19 = 110$, maradék a 10. A hányados 105-nél nagyobb és 110-nél kisebb, hatra végződő szám, ezért csak 106 lehet. Tehát az osztás $2014 : 19 = 106$.

20. feladat

Nevezzünk egy napot „prímnapnak”, ha mind a hónapot, mind a napot prímszám jelöli. Ilyen pl. május 7, mert 5. hó 7 és mindkét szám prím.

a) Hány „prímnap” van a 2013-as évben?
b) És 2016-ban?

Megoldás:

a) „Prímnap” csak 2., 3., 5., 7., 11. hónapban lehet. Mivel 2013 nem szökőév, ezért februárban a következő napok jók: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23. Ez 9 nap. Márciusban ehhez a 9 naphoz hozzá kell adni még kettőt, 29-e és 31-e miatt.
Májusban és júliusban szintén 11–11 „prímnap” van. Novemberben pedig 10, mert csak 30 napos. Ez összesen $9 + 11 + 11 + 11 + 10 = 53$.
b) 2016 szökőév, így február 29. miatt értelemszerűen eggyel több, tehát 54 „prímnap” lesz.

21. feladat

1-től 2013-ig leírtuk egy nagy papírlapra a természetes számokat.

a) Hány számjegyet kellett leírnunk?
b) Hány 1-es számjegyet írtunk le?

Megoldás:

a) 9 darab egyjegyű szám leírásához 9 számjegy kellett. A 90 db kétjegyű leírásához $90 \cdot 2 = 180$ számjegy kellett. 900 darab háromjegyű leírásához $900 \cdot 3 = 2700$ kellett. A négyjegyű számok száma $2013 - 999 = 1014$, ezek leírásához még $1014 \cdot 4 = 4056$ számjegyre volt szükség. Ez összesen $9 + 180 + 2700 + 4056 = 6945$.
b) Helyi értékenként számoljuk össze az 1-es számjegyek számát. Az ezresek helyi értékére 1000-szer írtuk le (1000-től 1999-ig).
A százasok helyi értékére (100-tól 199-ig és 1100-tól 1199-ig) 200-szor.
Tízesek helyi értékére minden „százas kupacban” 10-től 19-ig 10 darab 1-es. Ez összesen $20 \cdot 10 + 4 = 204$. A +4 a 2010 és a 2013 közötti számok miatt kell.
Az egyesek helyi értékére minden „tízes kupacban” egyszer kell 1-est írni, ezért 202 ilyen van.
Ez összesen $1000 + 200 + 204 + 202 = 1606$.

22. feladat

Helyezz el a következő 4×4-es táblázatban 4 db 0, 1, 2, 3-as számjegyet úgy, hogy minden sorban és minden oszlopban mindegyik számjegy csak egyszer szerepeljen!

2			
	0		
		1	
			3

Megoldás:
A hiányzó mezőkbe a következő számok kerülhetnek:

2	1 vagy 3	0 vagy 3	0 vagy 1
1 vagy 3	0	2 vagy 3	1 vagy 2
0 vagy 3	2 vagy 3	1	0 vagy 2
0 vagy 1	0 vagy 2	0 vagy 2	3

Ha a felső sor 2 melletti mezőbe 1-est írunk, akkor a megoldás:

2	1	3	0
3	0	2	1
0	3	1	2
1	2	0	3

Ha a felső sor 2 melletti mezőbe 3-ast írunk, akkor a megoldás:

2	3	0	1
1	0	3	2
3	2	1	0
0	1	2	3

23. feladat

Mat Terka összeadott öt egymást követő páros számot, majd az eredményből kivonta a köztük levő páratlan számok összegét, s így 2014-et kapott. Mely számokkal dolgozott Mat Terka?

Megoldás:
A feladat szövege alapján a következő egyenletet írhatjuk fel:

$$\begin{aligned} 2k+(2k+2)+(2k+4)+(2k+6)+\\ +(2k+8)-((2k+1)+(2k+3)+\\ +(2k+5)+(2k+7))=2014\\ 10k+20-(8k+16)=2014\\ 2k+4=2014 \end{aligned}$$

Innen $k = 1005$.
Tehát Mat Terka a következő számokkal számolt: 2010, 2011, 2012, 2013, 2014, 2015, 2016, 2017, 2018.

Irodalom

[1] Sztrókai Vera – Török Judit: *Érdekességek és feladatok egy évszámról – 1991*, Typotex Kft. Elektronikus Kiadó, 1990

[2] Sztrókai Vera – Török Judit: *Érdekességek és feladatok egy évszámról – 1998*, Mozaik Oktatási Stúdió Szeged, 1997

[3] Bátaszéki matematikaverseny Feladatok és megoldások 1990–2000, összeállította: Károlyi Károly, Mozaik Kiadó Szeged, 2003

[4] Bátaszéki matematikaverseny Feladatok és megoldások 2001–2010, összeállította: Károlyi Károly, Mozaik Kiadó Szeged, 2009

[5] Katedra. A levelező matematikaverseny feladatai 2005–2010, összeállította: RNDr. Horváth Géza, Lilium Aurum 2010

Dr. Kántor Sándorné

A 2013/2014. évi Hajdú-Bihar megyei Középiskolai Matematikai Versenyről

A versenyről

A 2013/2014. tanévben 2013. november 12-én került megrendezésre a Hajdú-Bihar megyei Középiskolai Matematikai Verseny a DE Matematikai Intézete és a BJMT H-B megyei Tagozata közös szervezésében.

A verseny szponzorai a DE Matematikai Intézete, Informatikai Kara és a Bolyai János Matematikai Társulat Hajdú-Bihar megyei Tagozata voltak.

A versenyre a város és a megye 24 középiskolája nevezett be 772 tanulóval, a következő megoszlásban:

- 9. évfolyam 275 fő (I. kategória: 124, II. kategória: 138, III. kategória 13)
- 10. évfolyam 207 fő (I. kategória: 88, II. kategória: 94, III. kategória 25)
- 11. évfolyam fő 157 fő (I. kategória: 38, II. kategória: 102, III. kategória 17)
- 12. évfolyam 133 fő (I. kategória: 18, II. kategória: 102, III. kategória 13).

Legnépesebb a 9. évfolyam I. és II. kategória, illetve a 11. és 12. évfolyam II. kategóriája volt.

Ebben a tanévben is az országos matematikaversenyek rendszeréhez hasonlóan évfolyamonként, a heti óraszámok függvényében értékeltük a tanulók dolgozatait három kategóriában (I. kategória: heti óraszám 3, II. kategória: heti óraszám 4–7, de nem speciális matematika tagozat, III. speciális matematika tagozat).

Az 5 feladatból álló feladatsor kidolgozására 3 óra állt a versenyzők rendelkezésére. A tanulók csak zsebszámológépet, vonalzót és körzőt használhattak segédeszközként. Egy-egy feladatsor összpontszáma minden esetben 60 volt. A tanulók a dolgozatot saját iskolájukban írták, és tanáraik javították ki, majd továbbították a legalább 30 pontos dolgozatokat, vagy ha ilyen nem volt, akkor az adott évfolyamról a legjobb dolgozatot.

A versenybizottsághoz 112 dolgozat érkezett be 19 iskolából, a következő eloszlásban: 9. évfolyamról 33 dolgozat, 10. évfolyamról 36 dolgozat, 11. évfolyamról 16 dolgozat, 12. évfolyamról 27 dolgozat. Ebben a tanévben a feladatsorok közül aránylag könnyűnek bizonyult a 9. évfolyam feladatsora, legkönnyebb feladat a 11. évfolyam első feladata volt, a legnehezebb pedig a 10. évfolyam ötödik feladata volt.

Mindegyik sorozatban volt könnyebben és nehezebben megoldható feladat. Szokatlanabb témájú feladatokat tartalmazott a 10. és a 11. évfolyam feladatsora.

A versenybizottság jónak értékelte a tanulók teljesítményét. A 2013/2014. tanévben 12 iskola 34 tanárjának 55 diákját részesítette helyezésben vagy dicséretben. 14 első, 14 második, 8 harmadik díjat és 19 dicséretet kaptak a helyezettek. A 9. évfolyamról 15 tanuló, a 10. évfolyamról 16 tanuló, a 11. évfolyamról 9 tanuló és a 12. évfolyamról 15 tanuló teljesítményét ítéltük kiválónak.

Maximális, azaz 60 pontszámú dolgozatot írtak: Baran Zsuzsanna (FMG 9.), Vámosi Ábel (FMG 9.), Almási Nóra (FMG 9.), Almási Péter (FMG 11.).

Majdnem maximális pontszámú dolgozatot írt Babotán Márk (FMG 9.).

A Versenybizottság különdíjban részesített három tanulót egy feladat különösen szép megoldásáért. A 9. évfolyamról Baran Zsuzsannát (FMG), a 10. évfolyamról Kurgyis Pált (DRK Gimn.) és a 12. évfolyamról Kordás Pétert (Hőgyes E. Gimn., Hajdúszoboszló).

A feladatsorokat a DE Matematikai Intézetének oktatói állították össze: 9. évfolyam: Herendiné Dr. Kónya Eszter, 10. évfolyam: Dr. Kántor Sándor, 11. évfolyam: Dr. Bessenyei Mihály, 12. évfolyam: Dr. Kántor Sándorné.

A verseny szervezői: Dr. Kántor Sándorné és Herendiné Dr. Kónya Eszter.

A feladatsorok lektorai a hajdúszoboszlói Hőgyes Endre Gimnázium tanárai: Károlyné Teleki Anikó (9. évfolyam), Dankó Sándor (10. évfolyam), Deli Lajos (11. évfolyam) és Balla Éva (12. évfolyam).

Versenyeredmények, helyezések

9. évfolyam

I. kategória
I. díj: **Kővári Péter Viktor** (DE Kossuth Gyak. Gimn. Debrecen),
II. díj: **Oláh Dóra** (Bocskai I. Gimn. Hajdúböszörmény),
III. díj: **Rózsa Dorottya** (Hőgyes E. Gimn. Hajdúszoboszló).

II. kategória
I. díj: **Szatmári Judit** (Hőgyes E. Gimn. Hajdúszoboszló),
II. díj: **Dudás Zoltán** (Tóth Á. Gimn. Debrecen),
III. díj: **Budai Éva** (Tóth Á. Gimn. Debrecen).

Speciális matematika tagozat
(Fazekas Mihály Gimn. Debrecen)
I. díj: **Baran Zsuzsanna**, **Vámosi Ábel**, **Almási Nóra**,
II. díj: **Babotán Márk**.

10. évfolyam

I. kategória
I. díj: **Kubicza Gréta** (Tóth Á. Gimn. Debrecen),
II. díj: **Tóth László** (Bocskai I. Gimn. Hajdúböszörmény), **Kurdics Tamás** (DE Kossuth Gyak. Gimn. Debrecen) és **Molnár Rózsa** (DRK Gimn.).

II. kategória
I. díj: **Varga Péter Tamás** (Hőgyes E. Gimn. Hajdúszoboszló),
II. díj: **Körtefái Dóra** (Hőgyes E. Gimn. Hajdúszoboszló),
III. díj: **Molnár Nóra** (DRK Gimn.) és **Szathmári Balázs** (DE Kossuth Gyak. Gimn. Debrecen).

Speciális matematika tagozat
(Fazekas Mihály Gimn. Debrecen)
I. díj: **Teski Tamara**,
II. díj: **Vereb György**.

11. évfolyam

I. kategória
I. díj: **Macz István** (Mechwart A. SZkI. Debrecen),
II. díj: **Szántó András** (Mechwart A. SZkI. Debrecen).

II. kategória
I. díj: **Herendi Zsolt** (DE Kossuth Gyak. Gimn. Debrecen),
II. díj: **Kocsis Péter Koppány** (Hőgyes E. Gimn. Hajdúszoboszló),
III. díj: **Alekszejenko Levente** (Tóth Á. Gimn. Debrecen).

Speciális matematika tagozat
(Fazekas Mihály Gimn. Debrecen)
I. díj: **Almási Péter**,
II. díj: **Kátay Tamás**.

12. évfolyam

I. kategória
I. díj: **Hanzel Dávid** (Péchy M. SzkI. Debrecen),
II. díj: **Uzonyi Noémi** (Mechwart A. SZkI. Debrecen),
III. díj: **Szűcs Éva** (Bethlen G. SzkI. Debrecen).

II. kategória
I. díj: **Hagymássy Gábor** (DE Kossuth Gyak. Gimn. Debrecen),
II. díj: **Csáky Pál** (DRK Dóczy Gimn.),
III. díj: **Lévai Dávid** (Fazekas Mihály Gimn. Debrecen).

Speciális matematika tagozat
(Fazekas Mihály Gimn. Debrecen)
I. díj: **Varga Dániel**,
II. díj: **Panyi Dávid**,
III. díj: **Fórián László**.

Az egyes évfolyamok feladatsorai

9. évfolyam

1. Bizonyítsa be, hogy a $2^9 + 2^{99}$ szám osztható 10-zel!

2. Írjuk fel egy papírra 1-től 10000-ig az egész számokat, majd húzzuk ki azokat, amelyekben a 0 vagy az 1 számjegy előfordul. Több, vagy kevesebb szám marad a papíron, mint az eredetileg felírt számok fele?

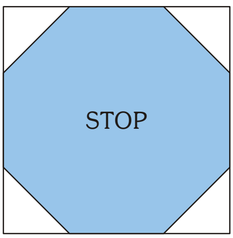
3. Az A és B pontok között egy autóbusz közlekedik, amely csak A-ban és B-ben áll meg, mindenütt 3 percre. Ismerjük a következőket:

a) Az autóbusz sebessége állandó.
b) 9 óra 8 perckor az autóbusz áthalad a C ponton B felé.
c) 11 óra 28 perckor indult A-ból.
d) 13 óra 16 perckor érkezett B-be.
e) 14 óra 4 perckor áthaladt C-n, ismét a B felé.
f) A pékmester 58 percen át figyelte az utcát és nem látta elhaladni az autóbuszt.

Hol helyezkedik el a C pont az AB szakaszon?

4. Melyik az a legkisebb természetes szám, amelyben a számjegyek szorzata 300, a számjegyek összege pedig 2013?

5. János egy négyzet alakú műanyag lapból a rajzon látható módon egy szabályos nyolcszög alakú stoptáblát készített. Hány forint a vesztesége, ha a műanyag lapot 1000 Ft-ért vette?



10. évfolyam

1. Határozza meg azokat az $(x; y)$ számjegypárokat, amelyekre a tízes számrendszerben felírt, $52x2y$ alakú ötjegyű számok oszthatók 36-tal!

2. Le lehet-e ültetni három házaspárt egy hatszögletű asztal mellé úgy, hogy házastársak sem egymás mellett, sem egymással szemben nem ülhetnek? (Az asztallap szabályos hatszög alakú, és egy személy egy oldala mellett ül.)

3. Tekintsünk egy olyan trapézt, amelynek van olyan oldala, amelyen levő két szöge nem egyenlő, és kisebbek, mint 90°. Mutassuk meg, hogy a trapéz párhuzamos oldalai összegének és különbségének aránya megegyezik az átlók négyzete különbségének és a szárak négyzete különbségének az arányával!

4. Az A középpontú kör és annak B kerületi pontja adott (rögzített). A C pont végigfut a kör kerületén (a kerület bármely pontja lehet). Mi az ABC háromszögek súlypontjainak a halmaza? (Az ABC háromszög elfajuló is lehet.).

5. Igazolja, hogy $\sqrt[n]{n!} \geq \sqrt{n}$ $(n \in \mathbb{N}^+)$.

11. évfolyam

1. Egy matematikus hajlamú kincskereső három ládikót talál, melyek mindegyikén egy-egy felirat olvasható:

(1) Az arany ebben a ládikóban van.
(2) Az arany nem ebben a ládikóban van.
(3) Az arany nem az első ládikóban van.

Melyik ládikóban van az arany, ha a három felirat közül legfeljebb egy igaz, és pontosan egy olyan ládikó van, amelyikben van arany?

2. Legyen $h(x)$ másodfokú polinom. Bizonyítsa be, hogy a $h(x+1) - 2h(x) + h(x-1)$ kifejezés értéke az x valós számtól független állandó!

3. Legyen p rögzített prímszám, és legyenek a, b, c, d páronként különböző egészek. Tegyük fel, hogy az r egész szám eleget tesz az $(r-a)(r-b)(r-c)(r-d) = p^2$ összefüggésnek. Igazolja, hogy ekkor r az a, b, c, d számok számtani közepe!

4. Mutassa meg, hogy bármely konvex hatszög szemközti oldalfelező pontjait összekötő szakaszokból szerkeszthető háromszög!

5. Határozza meg azokat az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényeket, amelyek minden valós $(x; y)$ számpár esetén kielégítik az $f(x) - f(y) \leq (x-y)^2$ egyenlőtlenséget!

12. évfolyam

1. Mennyi az $x^2 + y^2 = 25$ és az $(x - 4)^2 + 9y^2 = 81$ egyenletű görbék metszéspontjai által meghatározott háromszög területe?

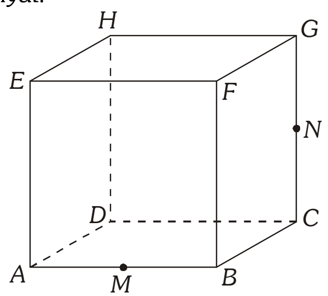
2. Anna, Béla, Cili és Dani egy négyzet alakú asztal négy különböző oldalán ülnek és kártyáznak. A 32 lapos magyar kártyát egyenlő részekben osztják szét a négy játékos között. Ha Annának nem jut ász, akkor mi a valószínűsége annak, hogy legalább egy másik játékosnak pontosan két ásza van?

3. Az f: $\mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}^+$ függvényre teljesül, hogy $f(1) = 1$, és $f(m + 1) = f(m) + m$ bármely $m \in \mathbb{N}^+$ esetén. Határozza meg $f(2013)$ értékét!

4. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletet!

$$(\log_2 \mathrm{tg}x)^2 + (\log_2 \sin^2 x) \cdot (\log_2 \cos^2 x) = 1$$

5. Adott az egységnyi élhosszúságú *ABCDEFGH* kocka (ábra). Síkot illesztünk a kocka *D* csúcsára és az *AB*, illetve *GC* élének *M*, illetve *N* felezőpontjára. Ez a sík a kockát két testre vágja szét. Adja meg a két test térfogatának arányát!



Megoldások

9. évfolyam

1. A 2 pozitív egész kitevőjű hatványainak végződései rendre 2, 4, 8, 6, 2, 4, ….
Ha tehát a kitevő 4-gyel osztva 1, 2, 3 vagy 0 maradékot ad, a hatvány 2-re, 4-re, 8-ra vagy 6-ra végződik. Eszerint 2^9 2-re, a 2^{99} pedig 8-ra végződik.
Két ilyen végződésű számot összeadva 0-ra végződő számot kapunk, ami azt jelenti, hogy $2^9 + 2^{99}$ osztható 10-zel.

2. A kihúzás után a papíron azok a számok maradnak, melyekben nem fordul elő sem az 1, sem a 0 számjegy. Ez azt jelenti, hogy meg kell határoznunk az összes egy-, két-, három- és négyjegyű számot, amelyekben csak a 2; 3; 4; 5; 6; 7, 8; 9 számjegyek fordulnak elő.
Egyjegyű számokból 8 db van, kétjegyű számokból $8 \cdot 8 = 64$ db, háromjegyű számokból $8 \cdot 8 \cdot 8 = 512$ db, négyjegyű számokból $8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 = 4096$ db van. Tehát összesen 4680 db szám marad a papíron.
Eredetileg 10000 db számot írtunk fel, ennek fele 5000, tehát kevesebb marad a papíron, mint az eredetileg felírt számok fele.

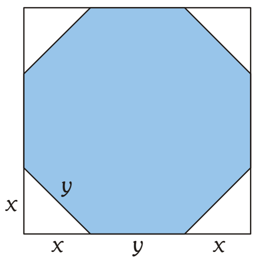
3. Jelöljük x-szel az A és B pontok közötti út megtételéhez szükséges időt.
Az *f)* feltételből következik, hogy $2x + 6 > 58$, mert az autóbusz, míg egy adott ponton ismét áthalad, kétszer teszi meg az utat és kétszer 3 percig áll.
Innen kapjuk, hogy $x > 26$ p.
Az autóbusz ugyanakkor a *d)* és *e)* feltételek alapján 14 ó 4 p – 13 ó 16 p = 48 p alatt több, mint egy utat megtett, azaz $x < 48$ p.
A *c)* és *d)* feltételek alapján 13 ó 16 p – 11 ó 28 p = = 108 p alatt megtett 1, 3, 5, 7 stb. utat.
Figyelembe véve, hogy $26 < x < 48$, és beszámítva a 3 perces megállásokat, x-re az $x = 108$, $3x + 6 = 108$, $5x + 12 = 108$, $7x + 18 = 108$ stb. egyenletek közül a $3x + 6 = 108$ szolgáltatja a megoldást: $x = 34$ p.
A *d)*-ből és *e)*-ből következik, hogy 13 ó 19 p + + 34 p = 13 ó 53 p-kor érkezett ismét A-ba, ahonnan 13 ó 56 p-kor indult B-be. Az *e)* szerint 8 perc múlva áthaladt C-n.
Mivel a sebessége állandó, a C pont az AB szakasz $\frac{8}{34} = \frac{4}{17}$ -ed részénél helyezkedik el (A-hoz közelebb).

4. Először keressük meg azt a legkisebb természetes számot, amelyben a számjegyek szorzata 300. A 300 prímtényezős felbontása: $2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$.
A számban az 1 mellett a következő számjegyek szerepelhetnek: 2, 2, 3, 5, 5 vagy 4, 3, 5, 5 vagy 2, 6, 5, 5. Ezekből a lehetőségekből a legkisebb előállítható szám a 2556.

A számjegyek szorzatát nem változtatja meg, ha a számba további 1-es számjegyek kerülnek.
A számjegyek összegére vonatkozó feltétel úgy teljesíthető, hogy ha a számhoz még 2013 – – (2 + 5 + 5 + 6) = 1995 db 1-es számjegyet hozzáírunk.
A legkisebb számot úgy kapjuk, ha ezt az 1995 db 1-es számjegyet a szám első 1995 helyi értékére írjuk, majd az utolsó 4 helyi értékre a 2556 kerül. A szám tehát:

$$\underbrace{111...111}_{1995\text{-ször}}2556$$

5. A szabályos nyolcszög minden szöge 135°-os, így a négyzetből levágott 4 db egybevágó derékszögű háromszög hegyesszögei 45°-osak.
Ez azt jelenti, hogy a derékszögű háromszög egyenlő szárú.
Jelölje x a befogó, y pedig a szabályos nyolcszög egy oldalának hosszát.



Pitagorasz tételéből kapjuk, hogy $y^2 = 2x^2$. Innen, mivel $y > 0$, adódik, hogy $y = \sqrt{2}x$.
A négyzetlap területe:

$$(2x + y)^2 = \left(2x + \sqrt{2}x\right)^2 = x^2\left(2 + \sqrt{2}\right)^2.$$

A veszteséget jelentő 4 db derékszögű háromszög területe: $4\dfrac{x^2}{2} = 2x^2$.
A négyzetlap és a háromszöglapok árának aránya megegyezik a területeik arányával:

$$\frac{x^2\left(2+\sqrt{2}\right)^2}{2x^2} = \frac{4+4\sqrt{2}+2}{2} = 3 + 2\sqrt{2} \approx 5{,}83.$$

Így a veszteség kb. $\dfrac{1000}{5{,}83} \approx 172$ Ft.

10. évfolyam

1. Mivel $36 = 9 \cdot 4$, a 4-gyel és 9-cel való oszthatóságot vizsgáljuk.
$52x2y$ akkor osztható 4-gyel, ha y értéke 0, vagy 4, vagy 8. $52x2y$ akkor osztható 9-cel, ha $5 + 2 + x + 2 + y$ osztható 9-cel, vagyis $x + y$ osztható 9-cel.
Ha $y = 0$, akkor $x = 9$, vagy $x = 0$. Ha $y = 4$, akkor $x = 5$. Ha $y = 8$, akkor $x = 1$.
Tehát a keresett párok: (9; 0), (0; 0), (5; 4), (1; 8).

2. Legyen az asztallap $ABCDEF$. Ha az ültetés lehetséges, akkor az AB oldalnál az $(x_1; x_2)$ házaspár x_1 tagja, a BC oldalnál az $(y_1; y_2)$ házaspár y_1 tagja ül. Az x_2 tag vagy CD-nél (I. eset) vagy EF-nél (II. eset) ül.
Az I. esetben az y_2 tag vagy DE-nél (I.a. eset), vagy FA-nál (I.b. eset) ül. Az I.a. esetben a $(z_1; z_2)$ házaspár a szomszédos EF; FA oldalakhoz, az I.b. esetben a szomszédos DE; EF oldalakhoz kerülne, amik nem megengedettek.
A II. esetben az y_2 tag vagy DE-nél (II.a. eset), vagy FA-nál (II.b. eset) ül. A II.a. esetben a $(z_1; z_2)$ házaspár a szemközti CD; FA oldalakhoz, a II.b. esetben a szomszédos CD; DE oldalakhoz kerülne, amik nem megengedettek.
Tehát az ültetés nem lehetséges.

3. A szóban forgó a oldal a rajta levő szögekre tett kikötések miatt csak a trapéz hosszabbik párhuzamos oldala lehet, és a rövidebbik párhuzamos oldalnak a rá eső merőleges vetülete a belsejében van, azt x, c, és y hosszúságú szakaszokra bontja ($a = x + c + y$), és feltehetjük, hogy $x > y$.
A párhuzamos oldalak összegének és különbségének az aránya: $\dfrac{a+c}{a-c} = 1 + \dfrac{2c}{x+y}$.
Legyen az x felőli szár d, az y felőli szár b hosszúságú, így $d > b$, a magasság m, az átlók e és f, ahol $e > f$.
Pitagorasz-tétel alapján

$$d^2 = x^2 + m^2,\ b^2 = y^2 + m^2, \text{ és}$$
$$e^2 = (x + c)^2 + m^2,\ f^2 = (y + c)^2 + m^2.$$

Tehát

$$\frac{e^2-f^2}{d^2-b^2}=\frac{x^2-y^2+2c(x-y)}{x^2-y^2}=1+\frac{2c}{x+y},$$

amit bizonyítani kellett.

4. A BC szakaszok F felezőpontjai az adott körnek a B pontból felére való kicsinyítésével előálló k_1 kör kerületén vannak, és a kerület minden pontja ilyen.
Az ABC háromszögek súlypontjai az AF szakaszokon, A-tól $\frac{2}{3}AF$ távolságra vannak, így rajta vannak annak a k_2 körnek a kerületén, amely a k_1 körnek az A-ból $\frac{2}{3}$ arányú kicsinyítésével áll elő, és a kerület minden pontja ilyen.
Tehát a keresett ponthalmaz a k_2 körnek a kerülete.

5. Nyilván elég bizonyítani, hogy $(n!)^2 \geq n^n$ $(n \in \mathbb{N}^+)$.
Ha $1 \leq k \leq n$ és $k \in \mathbb{N}^+$, akkor $k(n-k+1) \geq n$, mert ezzel ekvivalens: $nk-n \geq k^2-k$ és $n(k-1) \geq k(k-1)$ is, ami igaz.
Minden szóba jövő k-ra felírva a $k(n-k+1) \geq n$ egyenlőtlenségeket, a bal oldalak szorzata $(n!)^2$, a jobb oldalaké n^n. Tehát igaz a bizonyítandó állítás.

11. évfolyam

1. Jelölje a ládikókon levő állításokat rendre A, B, C. Ekkor az A és C állítások egyszerre nem lehetnek igazak a feladat feltétele szerint, és egyszerre nem lehet mindkettő hamis. Tehát, az A és C közül csak az egyik hamis, a másik igaz, továbbá B csak hamis lehet.
Ha A igaz, B hamis, C hamis, akkor mind az első, mind pedig a második ládikóban arany van, ami nem lehetséges.
Ha A hamis, B hamis, C igaz, akkor nem kapunk ellentmondást, így az arany csak a második ládikóban lehet.

2. Ha h másodfokú, akkor $h(x)=ax^2+bx+c$ alakban írható föl, ahol a, b, c valós számok és $a \neq 0$.
Ekkor minden x valós változó esetén

$$h(x+1)=a(x+1)^2+b(x+1)+c= \\ =ax^2+(2a+b)x+a+b+c$$

$$h(x-1)=a(x-1)^2+b(x-1)+c= \\ =ax^2-(2a-b)x+a-b+c.$$

Innen azonnal adódik, hogy a feladatban szereplő kifejezés értéke $2a$, vagyis valóban független az x változótól.

3. Mivel a, b, c, d páronként különböző egészek, ezért $r-a$, $r-b$, $r-c$, $r-d$ páronként különböző osztói p^2-nek.
Azonban p^2 osztói $\pm p^2$, $\pm p$, ± 1, tehát p^2 csakis egyféle módon állítható elő négy, páronként különböző egész szám szorzataként: az $\{r-a, r-b, r-c, r-d\}$ négyelemű halmaz és a $\{\pm p, \pm 1\}$ négyelemű halmaz szükségképpen egyenlők. Ez utóbbi halmaz elemeinek az összege 0, így az előbbi halmaz elemeinek az összege is 0-val egyenlő, azaz $4r-(a+b+c+d)=0$, ahonnan rendezéssel azonnal adódik az állítás.

4. Jelölje a csúcsokat pozitív körüljárás szerint A_1, ..., A_6. Legyen P tetszőleges pont. Legyenek a csúcsok erre a pontra vonatkozó helyvektorai rendre a_1, ..., a_6.
Ekkor az oldalfelező pontok helyvektorai:

$$\frac{a_1+a_2}{2};\quad \frac{a_2+a_3}{2};\quad \frac{a_3+a_4}{2};$$

$$\frac{a_4+a_5}{2};\quad \frac{a_5+a_6}{2};\quad \frac{a_6+a_1}{2}.$$

A szemközti oldalfelező pontok az alábbi vektorokat származtatják:

$$\frac{a_1+a_2-a_4-a_5}{2};\quad \frac{a_3+a_4-a_6-a_1}{2};$$

$$\frac{a_5+a_6-a_2-a_3}{2}.$$

Mivel ezek összege a nullvektor és nincs köztük párhuzamos, ezért az általuk meghatározott szakaszokból valóban szerkeszthető háromszög.

5. Egyszerűen ellenőrizhető, hogy minden konstans függvény teljesíti a vizsgálandó egyenlőtlenséget. Mivel a jobb oldal szimmetrikus a változókban, ezért a bal oldalnak is annak kell lennie, vagyis a bal oldalon valójában abszolút érték szerepeltethető.

Rögzített $x < y$ esetén osszuk fel az $[x, y]$ intervallumot n egyenlő részre. Jelölje az osztópontokat rendre $x = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = y$. Az $|f(u) - f(v)| = (u - v)^2$ egyenlőtlenséget a szomszédos osztópontokban felírva kapjuk, hogy

$$|f(x_{k-1}) - f(x_k)| = (x_{k-1} - x_k)^2 = \frac{(x-y)^2}{n^2}.$$

Teleszkópos összegzést, a háromszög egyenlőtlenséget, végül az előző becsléseket alkalmazva az alábbi egyenlőtlenség adódik:

$$|f(x) - f(y)| = \left|\sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1}) - f(x_k)\right| \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{n} |f(x_{k-1}) - f(x_k)| \le \frac{(x-y)^2}{n}.$$

Mivel itt a jobb oldal tetszőlegesen kicsivé válik, ha n elég nagy, ezért a bal oldal csak 0 lehet, vagyis $f(x) = f(y)$; a függvény tehát szükségképpen konstans.

12. évfolyam

1. Megoldjuk az $x^2 + y^2 = 25$ és az $(x - 4)^2 + 9y^2 = 81$ egyenletrendszert. Az első egyenletből kifejezzük az y^2-et, azaz $y^2 = 25 - x^2$, majd ezt visszahelyettesítjük a második egyenletbe.
A számolások elvégzése után azt kapjuk, hogy $x^2 + x - 20 = 0$. A másodfokú egyenlet gyökei: $x_1 = -5$, $x_2 = 4$, így az y értékek: $y_1 = 0$, $|y_2| = 3$, azaz $y_2 = 3$, $y_3 = -3$.
A metszéspontok, vagyis a keresett háromszög csúcsai: $A(-5; 0)$, $B(4; 3)$, $C(4; -3)$. Az ABC háromszögben $BC = 6$, az A csúcshoz tartozó magasság hossza 9. Tehát az ABC háromszög területe: 27.

2. *1. megoldás*
A kedvező ászelosztások: 2, 2, 0 és 2, 1, 1 .
Az első eset, vagyis a 2, 2, 0 ászelosztás valószínűsége:

$$p_1 = \binom{3}{1} \cdot \frac{\binom{4}{2}\binom{20}{6}}{\binom{24}{8}} \cdot \frac{\binom{14}{6}}{\binom{16}{8}}.$$

A másik, vagyis a 2, 1, 1 ászelosztás valószínűsége:

$$p_2 = 3 \cdot \frac{240}{759} \cdot \binom{2}{1} \cdot \frac{\binom{14}{7}}{\binom{16}{8}}.$$

Tehát a keresett valószínűség:

$$p_1 + p_2 = \frac{8}{11} \approx 0{,}727.$$

2. megoldás

Ismert, hogy $v_{A|B} = \dfrac{v_{AB}}{v_B}$.

A jelenti, hogy egy játékosnak 2 ász jut, B jelenti, hogy egy játékosnak nincsen ásza, AB jelenti a két esemény együttes bekövetkezését. A B esetben a kedvező esetek száma egy meghatározott játékosra nézve annyi, ahányféleképpen a 28 ász nélküli lapból 8 lap választható: $\binom{28}{8}$, vagyis az összes kedvező eset száma: $\binom{4}{1} \cdot \binom{28}{8}$.

AB esetben vegyük figyelembe, hogy az a tény, hogy az egyik játékosnak pontosan két ásza van, már maga után vonja, hogy legalább egy játékosnak nincsen ásza. Tehát minden olyan eset, amelyben egy játékosnak pontosan két ásza van, már kedvező.
Így az AB esetben a kedvező esetek száma: $\binom{4}{1} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{28}{6}$.

Tehát

$$v_{AB} = \frac{\binom{4}{1} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{28}{6}}{\binom{32}{8}}, \quad v_B = \frac{\binom{4}{1} \cdot \binom{28}{8}}{\binom{32}{8}},$$

$$v_{A|B} = \frac{\binom{4}{2} \cdot \binom{28}{6}}{\binom{28}{8}} = \frac{8}{11}.$$

3. Néhány esetben kiszámoljuk a függvényértékeket. $f(1) = 1$, $f(2) = 1 + 1 = 2$, $f(3) = 4$.
A bizonyítást teljes indukcióval végezzük el. Indukciós feltevés: $f(m) = \dfrac{(m-1)m}{2} + 1$.

Megmutatjuk, hogy $f(m+1)=\dfrac{m(m+1)}{2}+1.$

A képzési szabály szerint:

$$f(m+1)=f(m)+m=\frac{(m-1)m}{2}+1+m=$$
$$=\frac{m(m+1)}{2}+1.$$

Így

$$f(2013)=\frac{2012\cdot 2013}{2}+1=2\,025\,079.$$

4. Legyen $a=\log_2 \sin x$, $b=\log_2 \cos x$.

Ekkor $\operatorname{tg} x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$ miatt

$$\log_2 \operatorname{tg} x=\log_2 \sin x-\log_2 \cos x=a-b.$$

$$\log_2 \sin^2 x=2\log_2 \sin x=2a,$$
$$\log_2 \cos^2 x=2\log_2 \cos x=2b,$$

Így az adott egyenlet alakja: $(a-b)^2+4ab=1$, amiből $(a+b)^2=1$, vagyis $|a+b|=$ Két esetet különböztetünk meg.

a) Ha $a+b=1$, akkor

$$\log_2 \sin x+\log_2 \cos x=1,$$
$$\log_2 (\sin x\cdot \cos x)=1,$$
$$\sin x\cdot \cos x=2,$$

ami nem lehetséges, így ekkor nem kapunk megoldást.

b) Ha $a+b=-1$, akkor

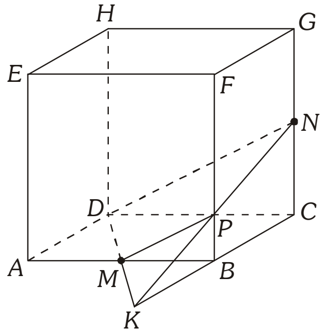
$$\log_2 \sin x+\log_2 \cos x=-1,$$
$$\log_2 (\sin x\cdot \cos x)=-1,$$
$$2\sin x\cdot \cos x=\sin 2x=1,$$

amiből $x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

A kapott x értékek kielégítik az eredeti egyenletet.

5. Ábrát készítünk. A szétvágás után keletkező két test térfogatának az arányát kell meghatároznunk.

A DMN csúcsokra illeszkedő sík a P pontban metszi a BF élt, és a BC él meghosszabbítását pedig a K pontban. Az M pont az AB él felezőpontja és mivel $MB \parallel DC$, így a B pont a CK szakasz felezőpontja, tehát $CK=2$.



A $DCNK$ gúla térfogata:

$$\frac{1}{3}T_{CDN}\cdot CK=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2=\frac{1}{6}.$$

A $DCNK$ gúla hasonló az $MBPK$ gúlához, és a hasonlóság aránya 2.

Az $MBPK$ gúla térfogata ezért $\dfrac{1}{2^3}\cdot\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{48}.$

A kisebbik test térfogata: $\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{48}=\dfrac{7}{48}.$

A nagyobbik test térfogata: $1-\dfrac{7}{48}=\dfrac{41}{48}.$

Így a keresett arány: $\dfrac{7}{41}.$

Tapasztalatok és tanulságok

A versenyfeladatok megfogalmazása általában eltér a tankönyvi feladatoktól, mert egyrészt nyitottabbak, másrészt elméletiek, tehát bizonyításokat, érveléseket igényelnek. A feladatsorok összeállításának egyik szempontja az, hogy az első három feladatot mindenki meg tudja oldani, vagyis a benne lévő ismeret az iskolai tananyagnak része legyen. A többi feladat viszont legyen olyan, ami differenciálja a mezőnyt, sőt legyen olyan feladat is, amely a speciális matematika tagozatosok számára is kihívást jelent.

A 9. évfolyamon elsősorban az általános iskolai ismeretekre támaszkodtunk, a magasabb évfolyamokon inkább elméleti, mint alkalmazás és gyakorlati jellegűek voltak a kitűzött problémák, ezért matematikai hátteret és tárgyi ismereteket is igényelt a feladatok megoldása.

Jól alkalmazható ismeretek: számelméleti tételek, a maradékos osztás, első- és másodfokú egyenletek, másodfokú egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek, trigonometrikus egyenletek megoldási módszerei, a számtani és a mértani közép közti egyenlőtlenség ismerete, klasszikus valószínűség kiszámítása. Geometriából: Pitagorász tétele, Thalész-tétel, háromszögek egybevágósága, háromszögek, síkidomok területének meghatározása, sík és térbeli hasonlóság, koordináta-geometria, térgeometriai alapismeretek.

Az egyes kategóriák esetében természetesen a speciális matematika tagozatos tanulók teljesítménye a legegyenletesebb, de nem minden feladatnál volt a legmagasabb. Szembetűnő volt az eltérés a speciális matematika tagozatos versenyzők javára a 10. és 11. évfolyam 4. és 5. feladatánál, a 12. évfolyam 5. feladatánál. Viszont a 12. évfolyam 1. feladatában a II. kategória versenyzői teljesítettek a legjobban.

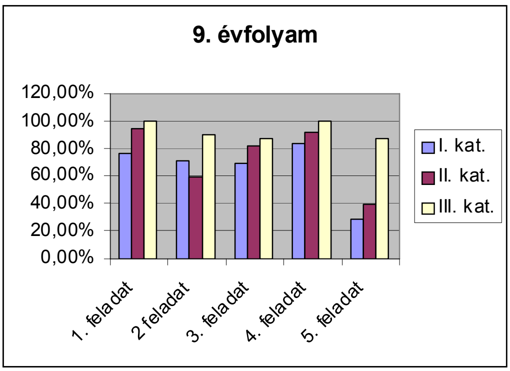
A teljesítmények oszlopdiagramjai

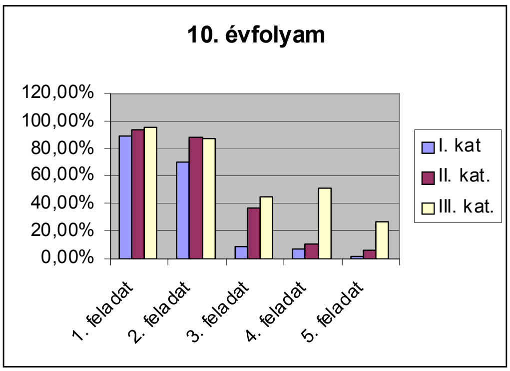
Elkészítettük a verseny eredményeiről évfolyamonként és kategóriánként a teljesítmények oszlopdiagramjait és ábrázoltuk az átlagteljesítményt.

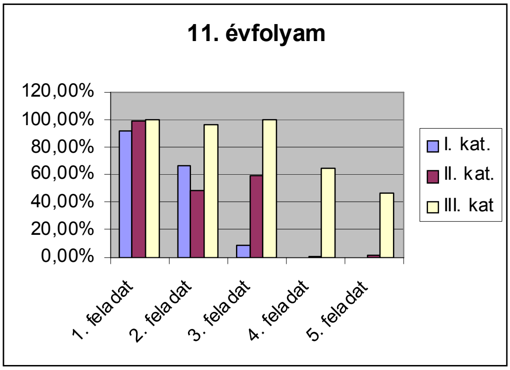
A diagramok vizsgálata azt mutatja, hogy a *9. évfolyamon* lényegében nincs nagy különbség az I. és II. kategóriában versenyzők teljesítménye között, míg a speciális matematika tagozaton tanulók számára könnyűnek bizonyult a feladatsor, ami abból is látszik, hogy az 1. és 4. feladatban 100%-os volt a teljesítményük, vagyis a versenybizottsághoz továbbított dolgozatokban mindenki hibátlanul oldotta meg mindkét feladatot. Témakörük az oszthatóság és a számjegyek tulajdonságai voltak Az 5. feladat gyakorlati jellegű, egyszerű területszámítási feladat volt, mellyel az I. és II. kategória versenyzői kevésbé boldogultak.

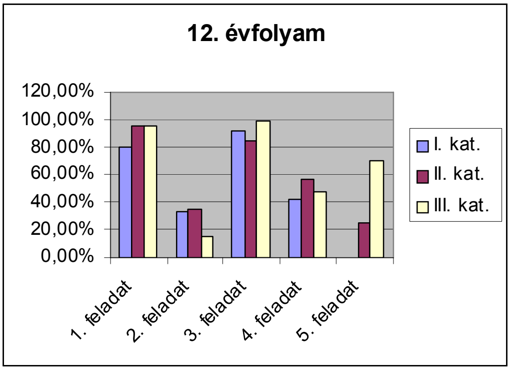
A *10. évfolyamon* jól teljesítettek a tanulók az 1. és 2. feladat megoldásában. Itt lényegében nem tért el egymástól az egyes kategóriákban nyújtott teljesítmény. Mind a számokkal kapcsolatos feladat, mind a logikai feladat megoldása sikeres volt, sőt igen szép tanulói megoldások is születtek. A 3. geometriai feladattal az I. kategória versenyzői nem boldogultak. A 4. és 5. feladat megoldása volt a leggyengébb. A 4. feladat ismét geometriai feladat volt, és a régi nevén mértani hellyel volt kapcsolatban. Sajnos a mértani hely elnevezést újabb időben a pontok halmaza megjelölés váltotta fel. Eközben elsikkadt a pontos megfogalmazás és az, hogy a bizonyításnak két része van, oda-vissza meg kell mutatni a tulajdonságok teljesülését. Az 5. feladat egyenlőtlenség bizonyítása volt, ami nehézséget okozott a speciális matematika tagozatos versenyzőknek is.

A *11. évfolyamon* az 1. feladat megoldása szinte minden kategóriában sikeres volt. A II. kategória versenyzői lényegében az 1–3. feladatokkal foglalkoztak. Az I. kategóriában nem kaptunk egyetlen megoldást sem a 4. és 5. feladatokra, nehéznek bizonyultak. Nem foglalkoztak sem a geometriai szerkesztéssel, sem a függvényegyenlőtlenséggel! A III. kategória versenyzői a 3. feladatot 100%-osan oldották meg.





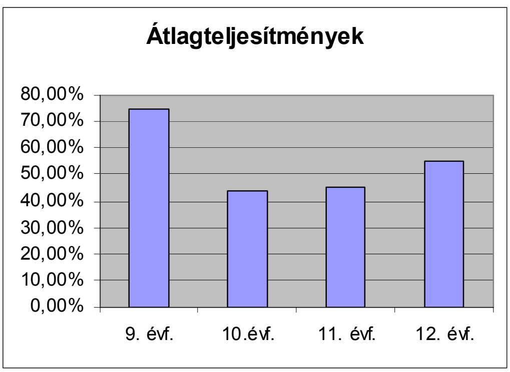




A *12. évfolyamon* a második, vagyis a valószínűség-számítási feladat teljesítménye érdekes képet mutat. Itt a speciális matematika tagozatos versenyzők teljesítménye alacsonyabb, mint az I. és II. kategóriás versenyzőké. Ugyanez mondható el a 4. feladatban szereplő transzcendens egyenlet megoldásáról is. Ez számomra is meglepő, de az okát nem tudom.

Az 5. feladat, ami térgeometriai feladat volt, nehéznek számított az I. és II. kategóriában. A térgeometriai ismeretek mellett térlátásra, a térbeli hasonlóság ismeretére is szükség volt.

Ha visszanézünk az előző évek tapasztalataira, akkor megállapíthatjuk, hogy a számelméleti vizsgálatok, a közepek közti egyenlőtlenségek, a geometriai bizonyításos feladatok és a térgeometriai feladatok változatlanul nehézséget jelentenek még a versenyzők számára is, sőt ebben a tanévben a valószínűség-számítási feladat is.



Irodalom

[1] Dr. Kántor Sándorné: A 2005/2006. és 2006/2007. tanévi Hajdú-Bihar megyei Középiskolai Matematika Versenyről. A matematika tanítása, 2007. 2. szám, 5–15.

[2] Dr. Kántor Sándorné: A 2007/2008. tanévi Hajdú-Bihar megyei Középiskolai Matematika Versenyről. A matematika tanítása, 2008. 2. szám, 3–8.

[3] Dr. Kántor Sándorné – Dr. Kántor Sándor (2008): Versenyfeladatok Matematikából Középiskolások Hajdú-Bihar megyei Versenye, 1975–2007. Studium ’96 Bt, Debrecen

[4] Dr. Kántor Sándorné: A 2008/2009. tanévi Hajdú-Bihar megyei Középiskolai Matematika Versenyről. A matematika tanítása, 2009. 2. szám, 16–24.

[5] Dr. Kántor Sándorné: A 2009/2010. évi Hajdú-Bihar megyei Középiskolai Matematika Versenyről. A matematika tanítása, 2010. 2. szám, 12–21.

[6] Dr. Kántor Sándorné: A 2010/2011. évi Hajdú-Bihar megyei Középiskolai Matematika Versenyről. A matematika tanítása, 2011. 2. szám, 33–41.

[7] Dr. Kántor Sándorné: A 2011/2012. évi Hajdú-Bihar megyei Középiskolai Matematika Versenyről. A matematika tanítása, 2012. 2. szám, 9–17.

[8] Dr. Kántor Sándorné: A 2012/2013. évi Hajdú-Bihar megyei Középiskolai Matematika Versenyről. A matematika tanítása, 2013. 1. szám, 28–37.

Felhívás tanártovábbképzésre

Kedves Kollégák!

Egy hároméves EU nemzetközi projektben (LEMA, lásd www.lema.org) kidolgozott matematikai modellezésről szóló továbbképzésre szeretnénk felhívni a figyelmet. A 30 órás továbbképzés augusztusban lett 5 évre akkreditálva. Rövid tartalmát a felhívás végén találják. Az alapító az ELTE TTK Matematikai Intézete. Elegendő jelentkező esetén akár vidékre is elutazunk. A továbbképzés segítséget ad a matematikai modellezés – ma elvárt – oktatásának felkészítésére, biztos hátteret és szakmai segítséget ad ilyen órák szervezésére, feladatok gyűjtésére vagy akár írására is. Foglalkozunk az ilyen típusú órák értékelésének lehetőségével is. Mind általános, mind középiskolai tanárok jelentkezését várjuk. Az első kurzusokat Ambrus Gabriella, Vancsó Ödön (az ELTE TTK Matematikai Intézetének oktatói) és Tóth László (a közreműködő Nyugat-magyarországi Egyetem szombathelyi Regionális Pedagógia Intézete munkatársa) tartják, olyan jelentkezőket is várva, akik majd trénerként vehetnek részt későbbi továbbképzések folyamán. A részletes program az Oktatási Hivatal honlapján (www.oh.gov.hu) látható a továbbképzések között „Matematikai modellezési feladatok írása, matematikai modellezés a tanórán” címmel. Nyilvántartási száma: 957/121/2013.

Érdeklődni és jelentkezni Fehér Mariann intézeti titkárnőnél (ELTE) a +36-1-381 2169-es telefonon, illetve e-mailen: feherm@cs.elte.hu címen lehet, valamint a partner Nyugat-magyarországi Egyetem Regionális Pedagógiai Intézeténél fejlesztés@pszk.nyme.hu címen vagy telefonon a +36-94-504 495-ös számon. A részvétel díja 49 500 Ft. A program ismertetője:

A továbbképzés megismerteti a résztvevőket a modellezési feladat fogalmával, felkészíti őket
- egyszerűbb esetekben ilyen feladat megoldására a modellezési ciklus alapján;
- a gyakorlatokon csoportonként megadott feladatok megoldására, valamint
- adott szituációkhoz feladatok és adott feladatokhoz variációk készítésére.

Témákat gyűjtenek feladatok készítéséhez és ezeket önállóan és csoportosan is felhasználva modellezési feladatokat készítenek. A modellezési feladatok lehetséges csoportosításával tudatosítják a modellezési feladatok közös és eltérő jellemzőit.

Foglalkoznak a modellezési feladatok iskolai alkalmazásának néhány alapvető módszertani kérdésével (óraszervezés, adott tananyaghoz feladatkészítés, tankönyvi nem modellezési feladat átalakítása modellezési feladattá).

Órákat tartanak modellezési feladattal iskolájukban, a tapasztalataikat megosztják egymással, illetve megadott szempontok alapján az óráról leírást is készítenek. Ennek fontos része saját munkájuk reflektív megítélése.

A foglalkozásokon főleg csoportokban dolgoznak, amelynek során maguk is megtapasztalhatják, hogy a modellezési feladatok megoldásának leghatékonyabb módja a csoportmunka.

A tanúsítvány kiadásának feltétele:
- Részvétel a továbbképzésen: az összóraszám minimum 90 százalékában – jelenléti ívvel igazolva.
- Aktív részvétel a gyakorlati feladatok és beszámolók megoldásában.
- Egy önállóan készített, megfelelően kivitelezett modellezési feladat és ennek kommentárja, amely tartalmazza a feladat legalább egy lehetséges megoldását a modellezési ciklus alapján, a korcsoport(ok) megjelölését, akik számára feladható; a tananyagrészek megjelölését, amelyek felhasználásra kerülnek a megoldás során.
- Olyan óra vagy órarészlet leírása megadott szempontok alapján, melyen modellezési feladat megoldását irányította.

FELADATROVAT TANÁROKNAK

Rovatvezető: **Kosztolányi József**

Kérjük, hogy a megoldásokat a rovatvezető címére küldjék: 6757 Szeged, Miklós u. 27. Ugyanide kell küldeni a kitűzésre szánt feladatokat is. Ezeknek a megoldását is mellékeljék! Minden megoldást (tehát ugyanannak a feladatnak a megoldásait is) külön lapra írják tollal vagy géppel, jól olvashatóan! Mindegyiket külön-külön hajtsák össze, és külső felére írják rá a feladat sorszámát és a megoldó nevét! Csatoljanak a megoldásokhoz összesítő jegyzéket is! A megoldásokat a kitűzést követő harmadik számban ismertetjük. A legjobb megoldásokat beküldőjük nevével közöljük.

Beküldési határidő: 2014. február 28.

Feladatok (465–469.)

465. Legyen $a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\cdot(n+1-k)}$. Mutassuk meg, hogy az $\{a_n\}$ sorozat szigorúan csökkenő.

466. Igazoljuk, hogy meg lehet adni 1000 darab egymást követő pozitív egész számot úgy, hogy közöttük pontosan 10 darab prímszám legyen.

467. A D pont az ABC háromszög belső pontja úgy, hogy $DAC\sphericalangle = DCA\sphericalangle = 30°$ és $DBA\sphericalangle = 60°$. Az E pont a BC oldal felezőpontja, F pedig az AC oldal harmadoló pontja úgy, hogy $AF = 2\cdot FC$. Bizonyítsuk be, hogy a DE és EF egyenesek merőlegesek egymásra.

468. Az a_1; a_2; ...; a_n véges sorozat tagjait véletlenszerűen választjuk a $\{0; 1\}$ halmazból (bináris sorozat). Mi a valószínűsége annak, hogy azon a_i; a_{i+1} párok száma, amelyek mindkét tagja 0, megegyezik azon párok számával, melyek első tagja 0, második tagja 1? (Például $n = 10$ esetén az 1; 1; 1; 0; 0; 0; 1; 0; 1; 0 ilyen sorozat.)

Dályay Pál Péter, Szeged

469. Az n pozitív egészre $v(n) = (-1)^k$, ahol k az n szám nem feltétlenül különböző prímtényezőinek a száma. Írjuk fel zárt alakban a következő összeget:

$$\sum_{k=0}^{m-1} v(2k+1)\cdot\left\lfloor\frac{m+k}{2k+1}\right\rfloor.$$

($\lfloor x\rfloor$ az x szám alsó egészrésze.)

Dályay Pál Péter, Szeged

Feladatmegoldások (450–454. feladatok)

450. Jelölje H az első 2012 darab pozitív egész szám halmazát. H minden nem üres X részhalmazára legyen $m(X)$ az X halmaz legkisebb és legnagyobb elemének összege. Határozzuk meg az $m(X)$ összegek számtani közepét.

I. megoldás: A feladatot általánosan oldjuk meg, azaz H jelölje az első n pozitív egész halmazát. Legyen

$$S_n=\sum_{X\subseteq H} m(X).$$

S_n-t fogjuk előbb rekurzív módon, majd n függvényeként meghatározni.
Először belátjuk, hogy

$$S_{n+1}=S_n+2(n+1)+\sum_{i=1}^{n}(i+n+1)\cdot 2^{n-i}. \qquad (1)$$

Azon X részhalmazok száma, amelyekben a legkisebb elem i, a legnagyobb pedig $n+1$, 2^{n-i}. Így

$$\sum_{(n+1)\in X} m(X)=2(n+1)+\sum_{i=1}^{n}(i+n+1)\cdot 2^{n-i}.$$

Mivel

$$\sum_{(n+1)\notin X} m(X)=S_n,$$

ezért (1) valóban tejesül.

Előbb (1) jobb oldalának harmadik tagját hozzuk zárt alakra az $n - i = j$ helyettesítést alkalmazva.

$$\sum_{i=1}^{n}(i+n+1)\cdot 2^{n-i} = \sum_{j=0}^{n-1}(2n+1-j)\cdot 2^j =$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1}(2n+1)\cdot 2^j - \sum_{j=0}^{n-1} j\cdot 2^j =$$

$$= (2n+1)\cdot(2^n-1) - 2^n\cdot(n-2) - 2 =$$

$$= 2^n\cdot(n+3) - 2n - 3.$$

Így

$$S_{n+1} = S_n + 2(n+1) + 2^n\cdot(n+3) - $$
$$- 2n - 3 = S_n + 2^n\cdot(n+3) - 1. \quad (2)$$

Ezek után a rekurziót oldjuk fel.

$$S_n - S_1 = \sum_{k=1}^{n-1}(S_{k+1} - S_k) = \sum_{k=1}^{n-1}(2^k\cdot(k+3)-1) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} k\cdot 2^k + 3\cdot\sum_{k=1}^{n-1}2^k - (n-1) =$$

$$= (n-2)\cdot 2^n + 2 + 3\cdot(2^n-2) - n + 1 =$$

$$= 2^n\cdot(n+1) - n - 3$$

Mivel $S_1 = 2$, ezért

$$S_n = 2^n\cdot(n+1) - n - 1 = (2^n-1)\cdot(n+1).$$

Egy n elemű halmaznak $2^n - 1$ nem üres részhalmaza van, így a keresett átlag $n + 1$, ami ebben a konkrét esetben 2013.

Nagy Sándor, Békéscsaba

II. megoldás: Nevezzük H nem üres X részhalmazának legkisebb és legnagyobb elemét X szélsőértékeinek, a kettő összegét pedig X értékének.

Ha X szélsőértékei n és $2013 - n$ ($n = 1, 2, ..., 2012$), akkor értéke minden esetben 2013 lesz.

Ha H egy nem üres X részhalmazának szélsőértékei p és r úgy, hogy $p + r \neq 2013$ ($p = r$ esetén egyelemű részhalmazról van szó), akkor X-hez rendeljük hozzá azt az X' részhalmazát H-nak, amelyre teljesül, hogy $x \in X$ pontosan akkor, ha $(2013 - x) \in X'$. Ekkor X' szélsőértékei $2013 - r$ és $2013 - p$ lesznek. Így mivel $m(X) = p + r$ és $m(X') = 4026 - (p + r)$, ezért

$$\frac{m(X) + m(X')}{2} = 2013.$$

X és X' részhalmazok párosítása kölcsönösen egyértelmű, ezért H minden nem üres részhalmaza vagy 2013 értékű, vagy egy részhalmazpár tagja, melyek értékeinek számtani közepe 2013. Következésképpen az $m(X)$ összegek számtani közepe 2013 lesz.

Zsidó Nagy György, Kolozsvár

A megoldók száma: 5.

451. Jelölje egy háromszög köré írt körének sugarát R, beírt körének sugarát r, félkerületét pedig s. Igazoljuk, hogy

$$4R^2 + 4Rr + 3r^2 \geq s^2.$$

Mikor áll fenn egyenlőség?

Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely

Megoldás: A Héron-képletet, valamint a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget alkalmazva

$$\sqrt[3]{\frac{T^2}{s}} = \sqrt[3]{(s-a)(s-b)(s-c)} \leq \frac{s}{3}, \quad (1)$$

és egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha a háromszög szabályos.

(1)-ből a $T = s\cdot r$ területképletet alkalmazva köbre emelés és átalakítások után következik, hogy

$$\frac{s^2}{r^2} \geq 27. \quad (2)$$

Ezután térjünk rá a feladatban kitűzött egyenlőtlenség bizonyítására. Az egyenlőtlenséget ekvivalens módon több lépésben átalakítjuk.

$R\cdot r$-rel történő osztás, majd az $x = \dfrac{R}{r}$ jelölés bevezetése után

$$4x + 4 + 3\cdot\frac{1}{x} \geq \frac{s^2}{R\cdot r},$$

ahonnan x-szel szorozva

$$4x^2+4x+3\ge \frac{s^2}{r^2}. \qquad (3)$$

(2) alapján (3)-ból

$$4x^2+4x-24\ge 0 \qquad (4)$$

következik.
(4)-gyel ekvivalens az

$$(x-2)(x+3)\ge 0 \qquad (5)$$

egyenlőtlenség.
Mivel a sugáregyenlőtlenség miatt $x=\frac{R}{r}\ge 2$, ezért (5) minden lehetséges x-re teljesül.
Egyenlőség pontosan akkor van, amikor $x=2$, azaz $R=2r$, ami csak szabályos háromszög esetén érvényes. Ekkor (2)-ben és a kiinduló egyenlőtlenségben is egyenlőség áll fenn.
Ezzel bebizonyítottuk a feladat állítását.

Bíró Bálint, Eger

A megoldók száma: 5.

452. Oldjuk meg az egész számok körében a következő egyenletet.

$$x^3+x^2y+xy^2+y^3=8(x^2+xy+y^2+1)$$

Megoldás: Alakítsuk át az egyenletet:

$$(x+y)^3-2xy(x+y)=8((x+y)^2-xy+1). \qquad (1)$$

Legyen x és y a

$$z^2-pz+q=0 \qquad (2)$$

egyenlet gyökei. A Viète-formulák szerint $x+y=p$ és $xy=q$. Ezzel (1)

$$p^3-2pq=8(p^2-q+1)$$

alakban írható, ahol p és q egész számok. q-t kifejezve:

$$q=\frac{p^3-8p^2-8}{2p-8}. \qquad (3)$$

Ahhoz, hogy q egész legyen, szükséges, hogy a tört számlálója páros legyen. Ez viszont csak akkor teljesül, ha p is páros, azaz $p=2m$, ahol m egész.
A behelyettesítés, egyszerűsítés és maradékos osztás elvégzése után (3):

$$q=\frac{2m^3-8m^2-2}{m-2}=2m^2-4m-8-\frac{18}{m-2}.$$

Mivel q egész, ezért $m-2$ osztója a 18-nak, így $m\in\{-16; -7; -4; -1; 0; 1; 3; 4; 5; 8; 11; 20\}$, így a belőle számolt $(p; q)$ párok lehetséges értékei: (–14; 120), (–8; 43), (–2; 4), (0; 1), (2; 8), (6; –20), (8; –1), (10; 16), (16; 85), (22; 88), (40; 711). A (2) egyenlet diszkriminánsa csak három esetben nem negatív, és ezek közül is csak a (10; 16) értékpár esetén négyzetszám. Így (2):

$$z^2-10\cdot z+16=0,$$

a gyökök pedig 2 és 8. Így az eredeti egyenlet megoldásai: (2; 8), (8; 2).

Rakonczai György, Budapest

A megoldók száma: 6.

453. Egy matematikai előadást öt matematikus hallgatott. Az előadás alatt mind az öt matematikus kétszer szundított el, és bármelyik két matematikushoz volt olyan időintervallum, amikor mindketten szunyókáltak. Mutassuk meg, hogy volt olyan időintervallum, amikor egyszerre három matematikus is szunyókált.

Megoldás: Minden egyes pároshoz tekintsük azt az első olyan időpillanatot, amikor mindketten aludtak. Mivel 10 pár van, ezért az ilyen pillanatok száma is 10. Ha ezek között van két megegyező, akkor készen vagyunk.
Tegyük fel, hagy a tekintett 10 időpont mind különböző. Jelölje ezek halmazát T. A definíció miatt T minden eleme egyben egyike azoknak az időpillanatoknak, amikor egy matematikus elalszik (ezekből is 10 van). Tekintsük a legkorábbi T-beli időpontot, legyen ez t. A t időponttal bezárólag eltelt időszakban már volt két olyan matematikus, aki elaludt, ezért a t idő-

pont után legfeljebb 8 olyan pillanat lehetett, amikor valaki elaludt. Viszont a $T \setminus \{t\}$ halmaznak 9 eleme van, ami ellentmondás. Ezzel beláttuk az állítást.

Borbély József, Tata

A megoldók száma: 2.

454. Bizonyítsuk be, hogy ha m pozitív egész szám, akkor

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]}(2k+1)\left(2^{\left[\log_2\frac{2m}{2k+1}\right]}-1\right)=\binom{m+1}{2},$$

ahol $[x]$ az x valós szám (alsó) egészrészét jelöli.

Dályay Pál Péter, Szeged

Megoldás: Az állítást Cauchy-féle teljes indukcióval bizonyítjuk be. Először belátjuk, hogy igaz az állítás minden olyan esetben, amikor m a 2 hatványa, majd bizonyítjuk, hogy ha igaz az állítás m-re ($2^{n-1}+1 \le m \le 2^n$), akkor igaz ($m-1$)-re is.

A) Legyen $m = 2^n$. Ekkor $\left[\frac{m-1}{2}\right]=2^{n-1}-1$, így

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]}(2k+1)\left(2^{\left[\log_2\frac{2m}{2k+1}\right]}-1\right)=$$

$$=\sum_{k=0}^{2^{n-1}-1}(2k+1)\left(2^{\left[\log_2\frac{2^{n+1}}{2k+1}\right]}-1\right)=$$

$$=\underbrace{\sum_{k=0}^{2^{n-1}-1}(2k+1)\cdot 2^{\left[\log_2\frac{2^{n+1}}{2k+1}\right]}}_{(1)}-\underbrace{\sum_{k=0}^{2^{n-1}-1}(2k+1)}_{(2)}.$$

A számtani sorozat összegképlete szerint a (2) összeg $\frac{1+2^{n-1}}{2}\cdot 2^{n-1}=2^{2n-2}$ alakra hozható.

Felhasználva, hogy

$$\left[\log_2\frac{2^{n+1}}{2k+1}\right]=[n+1-\log_2(2k+1)]=$$

$$=n+1+[-\log_2(2k+1)],$$

és $0 < k$ esetén $\log_2(2k+1)$ nem egész, kapjuk, hogy

$$\left[\log_2\frac{2^{n+1}}{2k+1}\right]=n-[\log_2(2k+1)].$$

Ezt figyelembe véve az (1) összeg a következő alakban írható:

$$\sum_{k=0}^{2^{n-1}-1}(2k+1)\cdot 2^{\left[\log_2\frac{2^{n+1}}{2k+1}\right]}=$$

$$=2^{n+1}+\sum_{k=1}^{2^{n-1}-1}(2k+1)\cdot 2^{n-[\log_2(2k+1)]}=$$

$$=2^{n+1}+2^n\cdot\underbrace{\sum_{k=1}^{2^{n-1}-1}\frac{2k+1}{2^{[\log_2(2k+1)]}}}_{(3)}.$$

Teljes indukcióval bizonyítható, hogy a (3) összeg

$$\underbrace{\frac{3}{2}}_{\frac{3}{4}\cdot 2}+\underbrace{\left(\frac{5}{2^2}+\frac{7}{2^2}\right)}_{\frac{3}{4}\cdot 2^2}+\ldots+$$

$$+\underbrace{\left(\frac{2^{n-1}+1}{2^{n-1}}+\frac{2^{n-1}+3}{2^{n-1}}+\ldots+\frac{2^n-1}{2^{n-1}}\right)}_{\frac{3}{4}\cdot 2^{n-1}}=$$

$$=\frac{3}{2}\cdot(2^{n-1}-1).$$

Így az (1) összeg:

$$2^n\cdot\left(2+\frac{3}{2}\cdot(2^{n-1}-1)\right)=3\cdot 2^{2n-2}+2^{n-1}.$$

A bizonyítandó azonosság bal oldalát alakítva a fentiek alkalmazásával:

$$\sum_{k=0}^{2^{n-1}-1}(2k+1)\cdot\left(2^{\left[\log_2\frac{2^{n+1}}{2k+1}\right]}-1\right)=$$

$$=3\cdot 2^{2n-2}+2^{n-1}-2^{2n-2}=2^{2n-1}+2^{n-1}=$$

$$=\binom{2^n+1}{2}.$$

Ezzel $m = 2^n$ esetére beláttuk az állítást.

B) Legyen

$$S_m=\sum_{k=0}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]}(2k+1)\left(2^{\left[\log_2\frac{2m}{2k+1}\right]}-1\right).$$

Belátjuk, hogy ha $S_m=\binom{m+1}{2}$, akkor $S_m-S_{m-1}=m$, ami ekvivalens azzal, hogy igaz az állítás $(m-1)$-re is.

a) Legyen m páros pozitív egész, azaz $m=(2q+1)\cdot 2^r$, ahol q természetes szám, r pedig pozitív egész szám. Tegyük fel továbbá, hogy $2^{n-1}+1<(2q+1)\cdot 2^r\le 2^n$. Ebben az esetben S_m és S_{m-1} ugyanannyi tagból áll.

$$S_m-S_{m-1}=$$

$$=\sum_{k=0}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]}(2k+1)\left(2^{\left[\log_2\frac{2m}{2k+1}\right]}-2^{\left[\log_2\frac{2m-2}{2k+1}\right]}\right). \qquad (4)$$

Belátjuk, hogy ha $k\ne q$ és $2k+1<m$, akkor $\left[\log_2\frac{2m-2}{2k+1}\right]=\left[\log_2\frac{2m}{2k+1}\right]$, vagy ami ekvivalens ezzel $\left[\log_2\frac{m-1}{2k+1}\right]=\left[\log_2\frac{m}{2k+1}\right]$.

Tegyük fel, hogy ez nem igaz, azaz van olyan s pozitív egész szám, hogy

$$\frac{m-1}{2k+1}<2^s<\frac{m}{2k+1}.$$

Ebből viszont adódik, hogy

$$m-1<2^s\cdot(2k+1)<m,$$

ami lehetetlen.

Beláttuk tehát, hogy

$$\left[\log_2\frac{m-1}{2k+1}\right]=\left[\log_2\frac{m}{2k+1}\right],$$

ha $k\ne q$.

Ha $k=q$, akkor

$$\left[\log_2\frac{2m}{2k+1}\right]=\left[\log_2\frac{(2q+1)\cdot 2^{r+1}}{2q+1}\right]=$$

$$=[r+1]=r+1.$$

Ekkor $\left[\log_2\frac{2m-2}{2k+1}\right]=r$ kell, hogy teljesüljön.

Ezzel beláttuk, hogy a (4) összegnek egyetlen 0-tól különböző tagja van. Így

$$S_m-S_{m-1}=$$

$$=\sum_{k=0}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]}(2k+1)\left(2^{\left[\log_2\frac{2m}{2k+1}\right]}-2^{\left[\log_2\frac{2m-2}{2k+1}\right]}\right)=$$

$$=(2q+1)(2^{r+1}-2^r)=(2q+1)\cdot 2^r=m.$$

b) Legyen m páratlan pozitív egész. Ebben az esetben S_m eggyel több tagból áll, mint S_{m-1}.

$$S_m-S_{m-1}=$$

$$=\sum_{k=0}^{\frac{m-1}{2}-1}(2k+1)\left(2^{\left[\log_2\frac{2m}{2k+1}\right]}-2^{\left[\log_2\frac{2m-2}{2k+1}\right]}\right)+$$

$$+m\cdot\left(2^{\left[\log_2\frac{2m}{m}\right]}-1\right). \qquad (5)$$

Az előzőhöz hasonlóan belátható, hogy itt is $\left[\log_2\frac{2m-2}{2k+1}\right]=\left[\log_2\frac{2m}{2k+1}\right]$, ha $2k+1<m$, és így az (5) összeg:

$$S_m-S_{m-1}=m\cdot\left(2^{\left[\log_2\frac{2m}{m}\right]}-1\right)=m.$$

Ezzel beláttuk, hogy ha az állítás igaz valamely m-re, akkor igaz $(m-1)$-re is. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

Rakonczai György, Budapest

A megoldók száma: 3.

A megoldók névsora: Bíró Bálint, Eger (451., 452.); Borbély József, Tata (450–454.); Dályay Pál Péter, Szeged (450., 451. 3 mód, 452–454.); Nagy Sándor, Békéscsaba (450., 451. 3 mód, 452.); Rakonczai György, Budapest (450., 452., 454.); Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely (451.); Zsidó Nagy György, Kolozsvár (450. 2 mód, 452.).