Kosztolányi József
Kovács István
Pintér Klára
Urbán János
Vincze István

sokszínű Matematika 12

Aktiváló kóddal
DIGITÁLIS VÁLTOZATBAN IS ELÉRHETŐ

MOZAIK
www.mozaik.info.hu

Kosztolányi József
Kovács István
Pintér Klára
Urbán János
Vincze István

Matematika

tankönyv

12

Tizennegyedik, változatlan kiadás

Mozaik Kiadó – Szeged, 2019

Logika, bizonyítási módszerek 1

Számsorozatok 2

Térgeometria 3

Valószínűség-számítás, statisztika 4

Rendszerező összefoglalás 5

Logika, bizonyítási módszerek

Számsorozatok

Térgeometria

Valószínűség-számítás, statisztika

Rendszerező összefoglalás

Gondolkodási módszerek

Algebra és számelmélet

Függvények

Geometria

Középszintű érettségi gyakorló feladatsorok

Útmutató a tankönyv használatához

A könyv jelrendszere és kiemelései segítenek a tananyag elsajátításában.

– A kidolgozott példák gondolatmenete mintát ad a módszerek, eljárások megértéséhez és a további feladatok megoldásához.
– A legfontosabb definíciókat és tételeket színes kiemelés jelzi.
– A tananyag apró betűvel szedett részei és a bordó színnel megjelölt kidolgozott mintapéldák a mélyebb megértést segítik. Ezek és a csillaggal jelölt definíciók, tételek az emelt szintű érettségire való felkészüléshez szükségesek.
– A margón ábrák, az adott lecke főbb vázlatpontjai, ismétlő, magyarázó részek, valamint matematikatörténeti érdekességek találhatók.

A mintapéldák és a kitűzött feladatok nehézségét három különböző színnel jelöltük:

Sárga: elemi szintű gyakorló feladatok, amelyek megoldása, begyakorlása nélkülözhetetlen a továbbhaladáshoz.
Kék: a középszintű érettséginek megfelelő színvonalú feladatok.
Bordó: az emelt szintű érettségire való felkészülést segítő problémák, feladatok.

Ezek a színkódok megfelelnek a Mozaik Kiadó Sokszínű matematika feladatgyűjteményeiben alkalmazott jelöléseknek. A feladatgyűjtemény-sorozat több mint 3000, a gyakorláshoz, az órai munkához és az érettségi felkészüléshez is alkalmas feladatot tartalmaz.

◆ ◆ ◆

A matematika, a ráció, a logikus gondolkodás világunk megismerésének egyik talán leghatékonyabb eszköze, amely néha megmagyarázhatatlan jelenségekkel társul. Elválaszthatatlan a gondolkodó embertől, és teljessé teszi mindennapi tevékenységeit.

Néhány gondolat azoktól, akik mindezt megtapasztalták:

„A mi feladatunk átnyújtani a matematikai tudás fáklyáját a jövő mérnökeinek, tudósainak, tanárainak és nem utolsó sorban kutató matematikusainak. Segítenek ebben a feladatok? Nagyon is. Minden értelmes élet legnagyobb része problémák megoldásából áll, a mérnök, a természettudós munkájának nem kis része matematikai problémák megoldásából.” (Paul R. Halmos)

„Minden embernek örökösen kérdezősködnie kellene e nagy kaland minden órájában, egészen addig a napig, mely után nem hagy többé árnyékot a Nap alatt. Mert ha úgy hal meg, hogy nincs több kérdés a szívében, milyen alapon számíthat folytatásra?” (Frank Moore Colby)

„Nem tudom, hogyan lát engem a világ; de nekem úgy tetszik, hogy csak tengerparton játszadozó kisfiú voltam, aki abban leli örömét, hogy olykor a szokottnál simább kavicsot vagy szebb kagylót talál, míg az igazság óceánja kikutatlanul terül el előtte.” (Sir Isaac Newton)

„A matematikában talán nem is annyira az eredmény a fontos, hanem az út, ahogyan eljutunk hozzá.” (Fried Ervin)

Eredményes munkát és tanulást kívánnak a Szerzők.

Számsorozatok

Számsorozatokkal találkozunk már az ókori görög matematikában is. Talán a legismertebb példa a Kr. e. 500 körül élt Zénón egyik paradoxonja (apóriája). A történet szerint Akhilleusz utol akarja érni a teknőst, azonban bármilyen kicsi is a teknős előnye, Akhilleusznak először el kell jutnia oda, ahol most a teknős van. Amíg Akhilleusz odaér, addig a teknős újabb utat tesz meg. Akhilleusznak tehát ezt a távolságot is meg kell tennie, de ezalatt a teknős újra előrébb jut és így tovább a végtelenségig. A gyors lábú Akhilleusz tehát csak utak végtelen sorozatán keresztül érné utol a teknőst, ami lehetetlen.

1. A sorozat fogalma, példák sorozatokra

1. példa

Írjuk fel az 1., 2., 3., n-edik pozitív páratlan számot.

Megoldás

Az első páratlan szám az 1, a második a 3, a harmadik az 5, általában az n-edik $2n–1$. Ezzel magadtunk egy számsorozatot, minden pozitív egész számhoz hozzárendeltünk egy számot.

számsorozat

DEFINÍCIÓ: A *számsorozat* olyan függvény, amelynek értelmezési tartománya a pozitív egész számok halmaza, értékkészlete számhalmaz.

Jelölése: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$, vagy röviden (a_n). A sorozat n-edik tagja a_n.

Szokás néha a számsorozatot úgy is értelmezni, hogy az értelmezési tartomány a természetes számok halmaza, ilyenkor a 0-hoz is tartozik függvényérték. Hogy melyik értelmezést célszerű használni, az mindig az adott feladattól függ.

2. példa

Számítsuk ki az első n pozitív páratlan szám összegét.

I. megoldás

Gyűjtsünk tapasztalatokat. Először határozzuk meg a keresett összeget $n = 1, 2, 3, 4, 5$ esetére:

$$1 = 1;$$
$$1 + 3 = 4;$$
$$1 + 3 + 5 = 9;$$
$$1 + 3 + 5 + 7 = 16;$$
$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25.$$

Láthatóan az eredmények sorra a négyzetszámok. Ennek alapján azt sejtjük, hogy az első n pozitív páratlan szám összege n^2, azaz

$$1 + 3 + 5 + \ldots + 2n - 1 = n^2.$$

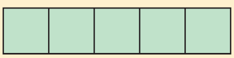
Sejtésünk $n = 1$-re igaz. Tegyük fel, hogy n-re is igaz, és mutassuk meg, hogy ebből következik, hogy az összefüggés $n + 1$-re is igaz:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + 2n + 1 = n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2.$$

Ezzel sejtésünket teljes indukcióval igazoltuk.

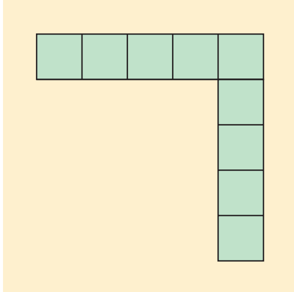
II. megoldás

Szemléltessük az egyes páratlan számokat a következő módon. Egybevágó négyzetekből álló n hosszúságú szalag szemléltesse az n-et. Például az 5-öt az 1. ábrán látható szalag szemlélteti.



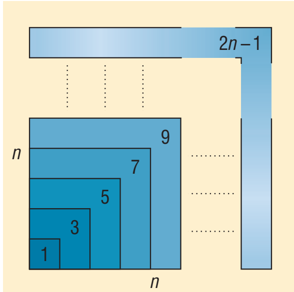
1. ábra

Ha két ilyen szalagot úgy helyezünk el, hogy egy négyzetük fedi egymást, és egymásra merőlegesek, akkor egy $2n-1$ kis négyzetből álló L betűt kapunk, pl.: a 9-et a 2. ábra szemlélteti.



2. ábra

Ha most az egyes páratlan számokat szemléltető L alakzatokat sorra egymáshoz illesztjük, akkor minden lépésben egy-egy négyzetet kapunk, méghozzá az n-edik lépésben éppen egy n oldalú négyzetet. ***(3. ábra)***



3. ábra

Ez igazolja, hogy

$$1+3+5+\ldots+2n-1=n^2.$$

3. példa

A páratlan pozitív egészeket rendezzük el a következő táblázatban. (Az első sorban 1 szám van, minden következő sorban pedig 1-gyel több, mint az előzőben.)

				1				
			3		5			
		7		9		11		
	13		15		17		19	
21		23		25		27		29

A táblázattal kapcsolatban a következő kérdésekre keressük a választ:

a) Hány szám van az első n sorban összesen?

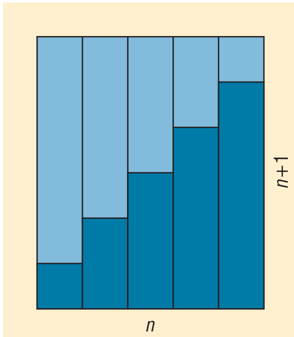
b) Melyik szám áll az n-edik sor utolsó helyén?

c) Mennyi az első n sorban álló számok összege?

d) Mennyi az n-edik sorban álló számok összege?

Megoldás (a)

Az első n sorban összesen $1+2+3+\ldots+n=\dfrac{n\cdot(n+1)}{2}$ páratlan szám van. Az első n pozitív egész szám összegét már ismerjük korábbi tanulmányainkból. ***(4. ábra)***



4. ábra

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n\cdot(n+1)}{2}$$

Megoldás (b)

Az n-edik sor utolsó helyén az $\dfrac{n\cdot(n+1)}{2}$-edik pozitív páratlan szám áll, ez pedig az első példa szerint

$$2\cdot\frac{n\cdot(n+1)}{2}-1=n^2+n-1.$$

Megoldás (c)

A 2. példát alkalmazhatjuk itt, hiszen az első $\dfrac{n\cdot(n+1)}{2}$ pozitív páratlan szám összege:

$$\left(\frac{n\cdot(n+1)}{2}\right)^2.$$

Megoldás (d)

A (c) alkalmazásával könnyen célhoz érünk. Az első n sor összegéből levonva az első $n-1$ sor összegét, éppen az n-edik sorban álló számok összegét kapjuk:

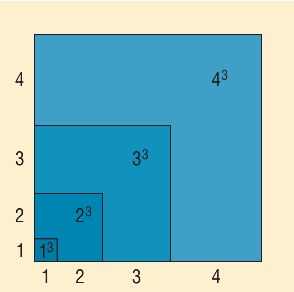
$$\left(\frac{n\cdot(n+1)}{2}\right)^2-\left(\frac{(n-1)\cdot n}{2}\right)^2=\frac{n^2\cdot\left((n+1)^2-(n-1)^2\right)}{4}=n^3.$$

Az n-edik sorban álló számok összege tehát az n-edik pozitív köbszám. Érdemes ennek alapján a (c) feladat eredményét felhasználva megjegyezni, hogy az első n pozitív köbszám összege:

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left(\frac{n\cdot(n+1)}{2}\right)^2=(1+2+3+\ldots+n)^2.$$

(Ezt már az előző fejezetben teljes indukcióval is igazoltuk.)

A kapott összefüggést $n=4$ esetére szemléletesen mutatja az 5. ábra.



5. ábra

Eddig már igazoltuk, hogy a pozitív egész számok sorozatának első n tagját összeadva ezt kapjuk:

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n\cdot(n+1)}{2}.$$

A pozitív köbszámok sorozatának első n tagját összeadva ezt kapjuk:

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left(\frac{n\cdot(n+1)}{2}\right)^2.$$

4. példa

Határozzuk meg a pozitív négyzetszámok sorozatából az első n tag összegét: $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=s_n$. $s_n=?$

Megoldás

Itt egy új ötletet használunk az összeg meghatározásához. Adjuk össze a következő n egyenlőséget, amelyek nyilván igazak:

$$\begin{aligned}(n+1)^3-n^3&=3n^2+3n+1;\\ n^3-(n-1)^3&=3\cdot(n-1)^2+3\cdot(n-1)+1;\\ &\vdots\\ 3^2-2^2&=3\cdot2^2+3\cdot2+1;\\ 2^2-1^2&=3\cdot1^2+3\cdot1+1;\\ \hline (n+1)^3-1&=3\cdot s_n+3\cdot(1+2+\ldots+n)+n.\end{aligned}$$

Átrendezve ezt kapjuk:

$$3\cdot s_n=(n+1)^3-(n+1)-3\cdot\frac{n\cdot(n+1)}{2}=$$

$$=(n+1)\cdot\left(n^2+2n+1-1-\frac{3}{2}\cdot n\right)=n\cdot(n+1)\cdot\left(n+\frac{1}{2}\right),$$

$$\text{amiből}\quad s_n=\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}.$$

5. példa

Január 1-jén 1 Ft-ot beteszünk az Ideális Bankba évi 100%-os kamatra. Mennyi lesz év végén a betétünk értéke, ha

a) évente; *b)* havonta; *c)* naponta

tőkésítik a kamatot (azaz a kamatot is hozzáadják a tőkéhez, és onnan kezdve a megnövelt tőke kamatozik)?

Megoldás (a)

Az év végéig nyilván 1 Ft a kamat, tehát a betét értéke az év végén 1 + 1 = 2 Ft.

Megoldás (b)

A havonkénti tőkésítés azt jelenti, hogy minden hónap végén hozzáadják a tőkéhez a hónap elején kimutatott betét 1 havi kamatát, és a következő hónaptól már az így megnövelt betét kamatozik. Jelölje $t_1, t_2, \ldots, t_{12}$ az egyes hónapok végén a betét értékét. Ekkor

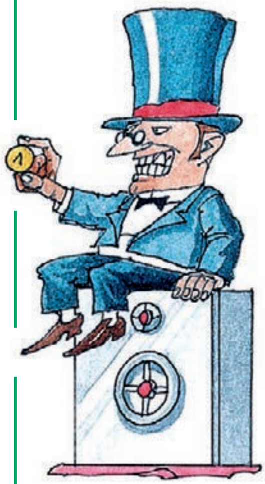
$$t_1 = 1+\frac{1}{12},$$

$$t_2 = 1+\frac{1}{12}+\left(1+\frac{1}{12}\right)\cdot\frac{1}{12} = \left(1+\frac{1}{12}\right)^2,$$

$$t_3 = \left(1+\frac{1}{12}\right)^2+\left(1+\frac{1}{12}\right)^2\cdot\frac{1}{12} = \left(1+\frac{1}{12}\right)^3,$$

$$\vdots$$

$$t_{12} = \left(1+\frac{1}{12}\right)^{12} \approx 2{,}61 \text{ Ft.}$$



Megoldás (c)

Számoljunk úgy, hogy egy évben 365 nap van. Ekkor a naponta történő tőkésítéskor mindig az éves kamat $\frac{1}{365}$-öd részét írják hozzá a tőkéhez. Ennek megfelelően év végére a betét értéke

$$\left(1+\frac{1}{365}\right)^{365} = 2{,}7145 \text{ Ft lesz.}$$

Az eddigiek alapján nyilvánvaló, hogy ha az évet n egyenlő részre osztjuk, akkor amennyiben a tőkésítést minden ilyen n-edrész eltelte után végzik, a betét értéke az év végére

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \text{ Ft lesz.}$$

Mekkora lehet ez az érték, ha n elég nagy? Bizonyítható, hogy minden pozitív egész n-re

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < e \approx 2{,}71828\ldots,$$

ahol e az ún. Euler-féle szám.

Az e irracionális, sőt nem gyöke semmilyen egész együtthatós egyenletnek sem.

Ezek szerint a maximális hozam, amit az adott feltételek mellett folytonos tőkésítéssel 1 Ft betéttel el lehet érni, az 1,72 Ft nyereség.

Feladatok

1. Határozzuk meg a pozitív páros számok sorozatának n-edik tagját, és első n tagjának összegét.

2. A következő számháromszögben a pozitív egész számokat vettük sorra, mégpedig az első sorba az 1-et írtuk, és minden következő sorba két számmal többet írtunk, mint az előzőbe.

				1				
			2	3	4			
		5	6	7	8	9		
	10	11	12	13	14	15	16	
17	18	19	20	21	22	23	24	25

Válaszoljunk a következő kérdésekre!

a) Melyik szám áll az n-edik sor utolsó helyén?

b) Mennyi az első n sorban álló számok összege?

c) Mennyi az n-edik sorban álló számok összege?

3. Igazoljuk a következő egyenlőségeket:

a) $$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+4\cdot 5+\ldots+n\cdot(n+1)=\frac{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}{3};$$

b) $$1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+3\cdot 4\cdot 5+\ldots+n\cdot(n+1)\cdot(n+2)=\frac{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)}{4};$$

c) $$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=1-\frac{1}{n+1};$$

d) $$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)}\right).$$

4. Adott két sorozat (a_n) és (b_n). Igazoljuk, hogy a két sorozat ugyanazokból a tagokból áll.

a) $a_n=(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)\cdot\ldots\cdot(2n-1)\cdot 2n,$

$b_n=1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)\cdot 2^n;$

b) $$a_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n},$$

$$b_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}.$$

5. Figyeljük meg a következő egyenlőségeket. Fogalmazzuk meg általánosan a sejtést, és bizonyítsuk is be a talált összefüggést.

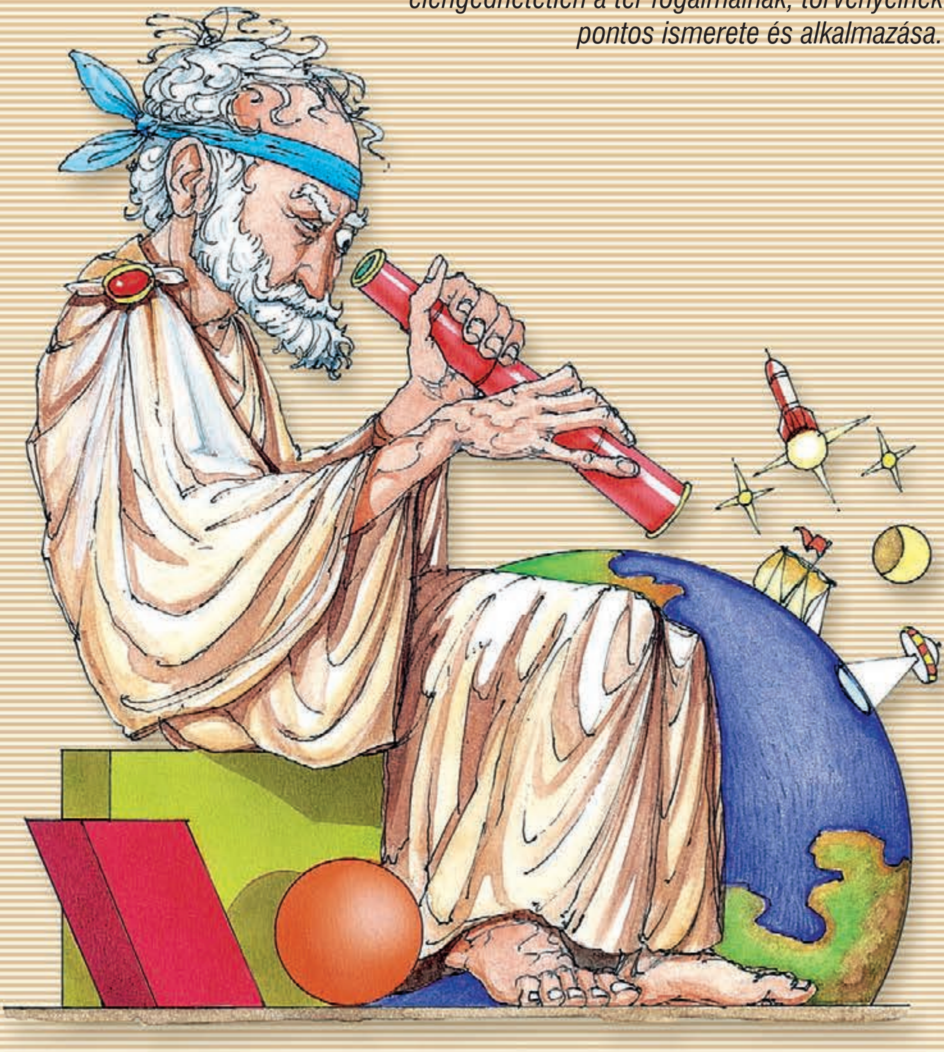
$$1+2=3$$
$$4+5+6=7+8$$
$$9+10+11+12=13+14+15$$
$$16+17+18+19+20=21+22+23+24$$

Térgeometria

A geometria a matematika egyik legősibb fejezete. Bár a tudomány fejlődésével a kutatás határai jelentősen kitágultak, a 21. században ugyanúgy tárjuk fel a teret, mint évezredekkel ezelőtt.

Arisztotelész számára még csak az tűnt különlegesnek, hogy a tengeren távolodó hajóknak a teste tűnik el előbb, majd legvégül az árboca. Ugyanakkor ma az űrhajók a Marsot ostromolják, az egyre nagyobb felbontású mikroszkópok pedig az anyag belső rejtelmeit tárják fel.

A világűr és a mikrovilág titkainak megismeréséhez is elengedhetetlen a tér fogalmainak, törvényeinek pontos ismerete és alkalmazása.



4. A terület fogalma, a sokszögek területe

Gyakran adódik, hogy különböző típusú alakzatok, síkidomok területét kell meghatároznunk. Például egy telek nagysága meghatározhatja annak értékét, egy falfelület a hozzá szükséges burkoló anyagok mennyiségét. Ezek a síkidomok legtöbbször sokszögek, de később látni fogjuk, hogy lehetnek tetszőleges vonallal határolt síkidomok is.

Néhány területmérték m^2-ben kifejezett nagysága:

1 ár $= 100\ m^2$,

1 hektár $= 100$ ár $=$
$= 10000\ m^2$,

1 négyszögöl $= 3{,}596\ m^2$,

1 katasztrális hold $=$
$= 5{,}75462 \cdot 10^3\ m^2 =$
$= 1600$ négyszögöl.

A sokszögek esetén a terület nagyságának meghatározása az egységnyi területtel való összevetés alapján adódik. Az egységet célszerű egy könnyen jellemezhető, egyszerű alakzattal megjeleníteni. Ezt a szerepet az 1 oldalú, ún. *egységnégyzet* kapta. (Az oldal hossza és a terület nagysága minden esetben az aktuális egységekben értendő. Így például a négyzet oldala lehet 1 m, és akkor a területe 1 m^2 lesz. Ha a tárgyalt problémák során ennek nincs szerepe, akkor ezeket elhagyjuk.)

Pontosabban fogalmazva a területet úgy foghatjuk fel, mint egy függvényt, ahol minden síkidomhoz hozzárendelünk egy pozitív számot a következők teljesülése mellett:

(1) **Az egységnégyzet területe 1.**

(2) **Az egybevágó sokszögek területe egyenlő.**

(3) **Ha egy sokszöget részsokszögekre vágunk szét, akkor a részek területének összege a sokszög területével egyenlő.**

Igazolható, hogy ez a hozzárendelés minden sokszöghöz egyértelműen hozzárendel egy pozitív számot, azaz minden sokszögnek van területe.

A definíció általánosítható abban az értelemben, hogy a síkidom nem szükségszerűen egyenesek által határolt, hanem tetszőleges görbék is közrezárhatják. Mi ezek közül a kör és részeinek területét vizsgáljuk meg.

A terület fogalmát felhasználva lehetőségünk lesz a testek felszínéről beszélni, hiszen ha a felület síkba kiteríthető, akkor a felszín megegyezik a terület nagyságával.

A téglalap területe

A sokszögek területének meghatározásánál a téglalap területe szolgál kiindulási alapul. Ezért fontos eredményt rögzít a következő tétel.

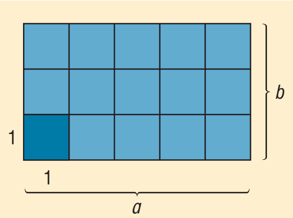
a téglalap területe

TÉTEL: **Az a és b oldalú *téglalap területe:* $t = a \cdot b$.**

Bizonyítás

A tétel állítása nyilvánvaló, ha a téglalapot egységnégyzetekre lehet felvágni, azaz ha az oldalélek hossza egész szám. ***(28. ábra)***

28. ábra

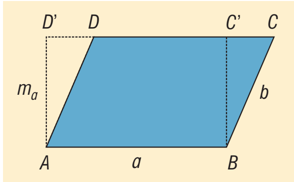


Abban az esetben, ha nem ez a helyzet, akkor a bizonyítás elvégzéséhez finomabb eszközökre van szükség, de az igazolás ekkor is az állítás helyességét mutatja.

Téglalapok esetében megemlíthetjük, hogy bármelyik oldalához tartozó magassága a téglalap másik oldalával egyenlő. Így az a megfogalmazás is helyes, ha azt mondjuk, hogy a téglalap területe megegyezik egy oldalának és a hozzá tartozó magasságának szorzatával.

A paralelogrammák területe

A paralelogrammák területének meghatározásakor felhasználhatjuk a téglalapokra kapott eredményt. Bármely paralelogramma könnyen átdarabolható vele egyenlő területű téglalappá a 29. ábrának megfelelő módon.



29. ábra

Az ábrán keletkező két háromszögre teljesül, hogy egybevágóak, így területük egyenlő. Emiatt az $ABCD$ paralelogramma területe megegyezik az $ABC'D'$ téglalap területével, vagyis a téglalap két oldalának a szorzatával. Az AD' szakasz hossza viszont éppen a paralelogramma AB oldalához tartozó magassága, így ebben az esetben is teljesül a következő:

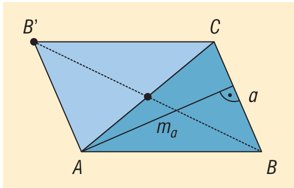
a paralelogrammma területe

TÉTEL: **A *paralelogramma területe* egyenlő bármelyik oldalának és a hozzá tartozó magasságnak a szorzatával:**

$$t = a \cdot m_a.$$

A háromszögek területe

A háromszögek területét a paralelogrammák területére vezetjük vissza. Ugyanis ha az ábrának megfelelően az ABC háromszöget tükrözzük az AC oldal felezőpontjára, akkor egy $ABCB'$ paralelogrammát kapunk. *(30. ábra)*



30. ábra

Ennek a területe nyilván kétszerese a háromszög területének. Mivel a paralelogramma a oldalához tartozó magassága a háromszög m_a magasságával egyenlő, ezért az ABC háromszög területére igaz a következő:

a háromszög területe

TÉTEL: **A *háromszög területe* egyenlő egy oldalának és a hozzá tartozó magasság szorzatának a felével:**

$$t = \frac{a \cdot m_a}{2}.$$

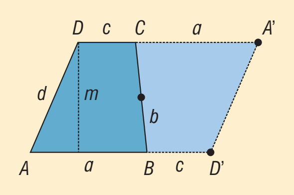
Érdemes megemlítenünk, hogy korábbi tanulmányaink során számos olyan összefüggéssel találkoztunk, melyek a háromszög területét más jellemző adatokkal hozzák kapcsolatba. Bizonyítás nélkül ezek közül sorolunk fel néhányat:

$t = \rho \cdot s$, ahol ρ a háromszögbe írt kör sugara, s pedig a félkerület nagysága;

$t = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}$, Heron képlete;

$t = \dfrac{b \cdot c \cdot \sin\alpha}{2}$, ahol α a b és c oldalak által bezárt szöget jelenti;

$t = \dfrac{a \cdot b \cdot c}{4R}$, ahol R a háromszög köré írható kör sugarával egyenlő.



31. ábra

A trapézok területe

A trapézok területének meghatározásában szintén a paralelogrammák területképletét használhatjuk fel. Ha ugyanis az $ABCD$ trapézt tükrözzük például a BC oldalának a felezőpontjára, akkor egy paralelogrammát kapunk. ***(31. ábra)***

A trapéz területe a paralelogramma területének a fele. Azaz:

a trapéz területe

TÉTEL: **A *trapéz területe* a két alap számtani közepének és a magasságnak a szorzatával egyenlő:**

$$t = \frac{a+c}{2} \cdot m.$$

A sokszögek területe

Mivel minden sokszöget feldarabolhatunk háromszögekre, ezért területük meghatározása a háromszögek területének összegzésével elvégezhető. Vannak azonban olyan speciális esetek, amelyekben gyorsabban is meghatározhatjuk a terület nagyságát.

Könnyen adódik a következő tétel:

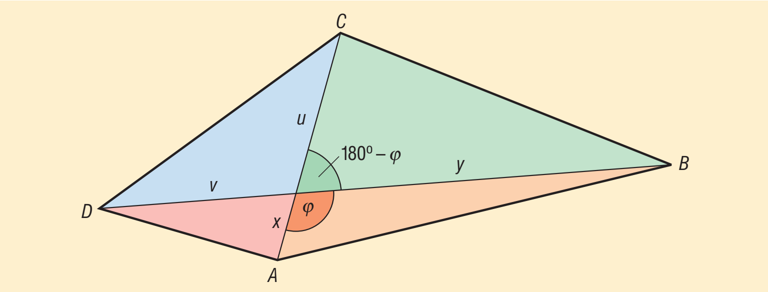
a konvex négyszög területe

TÉTEL: ***Tetszőleges konvex négyszög területe* egyenlő az átlók és a közbezárt szög szinusza szorzatának a felével:**

$$t = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f \cdot \sin\varphi.$$

Bizonyítás

Tekintsük a 32. ábrát, és használjuk annak jelöléseit.



32. ábra

Nyilvánvaló, hogy a négyszög területe a keletkező négy háromszög területének az összege, ezért:

$$t = \frac{1}{2} \cdot x \cdot y \cdot \sin\varphi + \frac{1}{2} \cdot y \cdot u \cdot \sin(180° - \varphi) +$$
$$+ \frac{1}{2} \cdot u \cdot v \cdot \sin\varphi + \frac{1}{2} \cdot v \cdot x \cdot \sin(180° - \varphi).$$

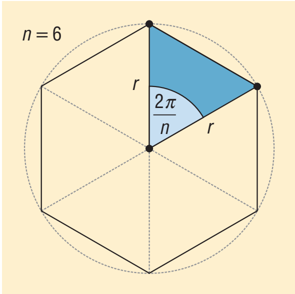
Felhasználva, hogy $\sin(180° - \varphi) = \sin\varphi$, a kifejezés kiemelésekkel átalakítható:

$$t = \frac{1}{2}\cdot[y\cdot\sin\varphi\cdot(x+u) + v\cdot\sin\varphi\cdot(x+u)] =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot(x+u)\cdot(y+v)\cdot\sin\varphi = \frac{1}{2}\cdot e\cdot f\cdot\sin\varphi.$$

Az eredményből adódik, hogy ha egy konvex négyszög átlói merőlegesek egymásra (ilyen négyszög például a deltoid), akkor területe az átlók szorzatának a felével egyenlő:

$$t = \frac{e\cdot f}{2}.$$



33. ábra

Szabályos sokszögek esetén célszerű a sokszöget olyan egyenlő szárú háromszögekre bontani, melyek akkor jönnek létre, ha a sokszög csúcsait a középpontjával összekötjük. Az így keletkező egybevágó háromszögek területének összege határozza meg a sokszög területét. ***(33. ábra)***

Egy n oldalú szabályos sokszög esetén a terület nagysága:

$$t = n\cdot\frac{r^2\cdot\sin\frac{2\pi}{n}}{2},$$

ahol r a sokszög köré írható kör sugarának hosszát jelöli.

Korábbi tanulmányaink során már igazoltuk, hogy addig, amíg az egybevágóság a sokszögek területét nem változtatja meg, egy k arányú hasonlóság esetén ez már nem teljesül.

A változás mértékét elegendő háromszögekre megvizsgálnunk. A hasonlóság egy a oldalú, m_a magasságú háromszög méreteit k-szorosára változtatja meg. Ezért a háromszög területe:

$$t = \frac{k\cdot a\cdot k\cdot m_a}{2} = k^2\cdot\frac{a\cdot m_a}{2}.$$

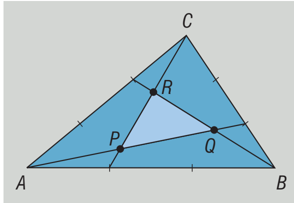
Ebből következik, hogy a k arányú hasonlóság a sokszögek területét k^2-szeresére változtatja.

Feladatok

1. Mekkora a területe az a oldalú szabályos háromszögnek?
2. Egy paralelogramma egyik oldala 7 cm, a hozzá tartozó magassága 6 cm, a másik oldalhoz tartozó magasság 3 cm. Határozzuk meg a másik oldal hosszát és a paralelogramma szögeit.
3. Határozzuk meg a paralelogramma átlóinak hosszát és a bezárt szög nagyságát, ha az oldalainak nagysága 6 cm és 10 cm, a területe pedig 40 cm^2.

4. Egy ABC háromszög mindegyik oldalát a hosszával meghosszabbítottuk, AB-t B-n, BC-t C-n, CA-t A-n túl. Így a PQR háromszöget kaptuk. Hányszorosa a PQR háromszög területe az ABC háromszög területének?

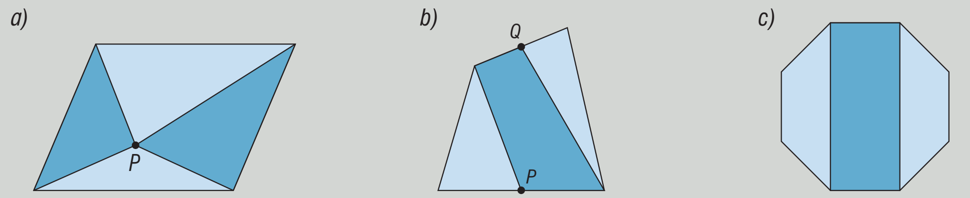
5. Egy háromszög oldalainak harmadolópontjait a csúcsokkal kötöttük össze az ábra szerint. Hányadrésze a keletkező PQR háromszög az eredeti ABC háromszögnek?



6. Adott ABC háromszöget osszunk két egyenlő területű részre az egyik csúcsán áthaladó egyenessel.

7. Egy szabályos ötszög oldala 10 cm. Mekkora a területe?

8. Igazoljuk, hogy a következő ábrákon látható sötétebb színű részek területösszege egyenlő a világosabb színű részek területének összegével.



a) paralelogramma, *P* tetszőleges

b) konvex négyszög, *P*, *Q* oldalfelező pontok

c) szabályos nyolcszög

9. Egy rombusz két átlója 2 és 4 egység hosszúságú. A rombuszt a középpontja körül 90º-kal elforgatjuk. Számítsuk ki az eredeti és az elforgatott rombusz közös részének a területét.

10. Létezik-e olyan egész oldalú téglalap, melynek kerülete és területének mérőszáma megegyezik?

11. Egy szabályos sokszög köré írható kör középpontját tükrözzük rendre a sokszög oldalaira. Legyen a sokszög területe T, a tükörképek által meghatározott sokszög területe T'.

a) Bizonyítsuk be, hogy $1 \le \dfrac{T'}{T} < 4$.

b) Mely sokszög esetén lesz $\dfrac{T'}{T}$ egész szám?

Rendszerező összefoglalás

A rendszerező összefoglalás fő célja az, hogy a 12. osztály végén segítse az érettségire való felkészülést. Az öt fejezet áttekinti a négyéves tananyag nagy részét, néhány helyen további kiegészítéseket, általánosításokat is tartalmaz.

Az egyes fejezetek némileg eltérő jellegűek. Az algebra és számelmélet fejezetben sok a kidolgozott példa, hiszen a tanult fogalmakat, tételeket, módszereket így lehet jól áttekinteni. A függvények és a geometria fejezetekben elsősorban a tanult fogalmak, tételek, eljárások összegyűjtésére, rendszerezésére törekedtünk. Ezekben a fejezetekben a példák főleg illusztráló jellegűek.

A rendszerező összefoglalásban is apró betű, illetve a példa, feladat sorszáma melletti csillag jelzi, hogy a törzsanyagon túlmenő, kiegészítő anyagról van szó. Ezek az ismeretek a középszintű matematika érettségin nem szerepelnek, csak az emelt szintűn.

ALGEBRA ÉS SZÁMELMÉLET

1. Számok és műveletek

1. példa

Az 1; 2; 3; 4; 5 számjegyek közé, ezek sorrendjének megtartásával helyezzünk el alapműveleti jeleket, esetleg zárójeleket úgy, hogy eredményül *a)* a 0; *b)* az 1 természetes számot kapjuk.

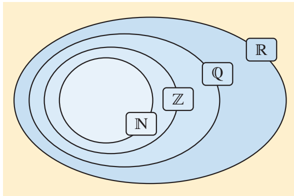
A természetes számok halmaza:

$\mathbb{N} = (0; 1; 2; 3; \ldots)$

Megoldás (a)

Néhány lehetséges megoldás:

$$(1+2)\cdot 3-4-5=0;$$
$$(1+2-3)\cdot 4\cdot 5=0;$$
$$(1+2-3)\cdot(4+5)=0.$$



1. ábra

Megoldás (b)

Néhány lehetséges megoldás:

$$1-2+3+4-5=1;$$
$$1+2-3-4+5=1;$$
$$1\cdot(2-3)\cdot 4+5=1.$$

Keressünk további megoldásokat!

2. példa

Adjunk meg olyan a, b pozitív egész számokat, amelyekre $a+b$, $a\cdot b$, $\frac{a}{b}$, valamint a és b mértani közepe is egész szám.

A pozitív egész számok halmaza:

$\mathbb{N}^+ = (1; 2; 3; 4; \ldots)$

Megoldás

Mivel bármely két egész szám összege és szorzata is egész szám, ezért az első két feltétel minden a, b pozitív egész számra teljesül.

$\frac{a}{b}$ egész, ha a többszöröse b-nek. Legyen $a=k\cdot b$, ahol k szintén pozitív egész szám. A mértani középük

$$\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{k\cdot b^2}$$

létezik, hiszen k pozitív,

$$\sqrt{k\cdot b^2}=|b|\cdot\sqrt{k}=b\cdot\sqrt{k},$$

mert b pozitív. Ez utóbbi kifejezés értéke akkor egész szám, ha k négyzetszám.

Tehát minden olyan a, b pozitív egész számpár megoldás, amelyre a és b hányadosa négyzetszám.

A mértani közép:

$\sqrt{a\cdot b}$; $a, b \geq 0$

a	*b*
8	2
12	3
27	3
48	3

3. példa

Milyen számjegy áll a $\frac{3}{7}$ tizedestört alakjában a tizedesvessző utáni 2004. helyen?

Megoldás

Végezzük el a maradékos osztást:

$$\begin{array}{l} 3:7=0{,}4285714\ldots \\ 30 \\ \ \ 20 \\ \ \ \ \ 60 \\ \ \ \ \ \ \ 40 \\ \ \ \ \ \ \ \ \ 50 \\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 10 \\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 30 \\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ldots \end{array}$$

A két egész szám hányadosaként felírható számokat racionális számoknak nevezzük:

$\mathbb{Q}=\left\{\frac{p}{q} \mid p,q\in\mathbb{Z};\ q\neq 0\right\}.$

$\frac{3}{7}=0{,}\dot{4}2857\dot{1}$, ami azt jelenti, hogy 6 számjegy ismétlődik a végtelen szakaszos tizedes törtben.

Mivel a 6 osztója 2004-nek, ezért a keresett számjegy az ismétlődő szakasz utolsó jegye: 1.

4. példa

a) Lehet-e két racionális szám számtani közepe irracionális szám?
b) Lehet-e két irracionális szám számtani közepe racionális szám?
c) Lehet-e két racionális szám mértani közepe irracionális szám?
d) Lehet-e két irracionális szám mértani közepe racionális szám?

A racionális számok tizedes tört alakja véges vagy végtelen szakaszos.

Megoldás (a)

Minden racionális szám felírható két egész szám hányadosaként. Két tört összege is tört, és 2-vel osztva újra törtet kapunk. Tehát két racionális szám hányadosa nem lehet irracionális szám.

Irracionális számoknak nevezzük azokat a számokat, melyek tizedes tört alakja végtelen nem szakaszos.

Megoldás (b)

Lehet: például a $\sqrt{2}$ és az $1-\sqrt{2}$ irracionális számok, a számtani középük pedig $\frac{1}{2}$.

A számtani közép:

$\frac{a+b}{2}$

Megoldás (c)

Lehet: például az 1 és 2 mértani közepe $\sqrt{2}$.

A mértani közép:

$\sqrt{a\cdot b};\ a,b\geq 0$

Megoldás (d)

Keressünk például olyan irracionális számokat, amelyek egymás reciprokai. Megfelel pl. a $2-\sqrt{3}$ és $2+\sqrt{3}$, hiszen ezek szorzata:

$$\left(2-\sqrt{3}\right)\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)=4-\left(\sqrt{3}\right)^2=4-3=1.$$

Tehát két irracionális szám mértani közepe lehet racionális szám.

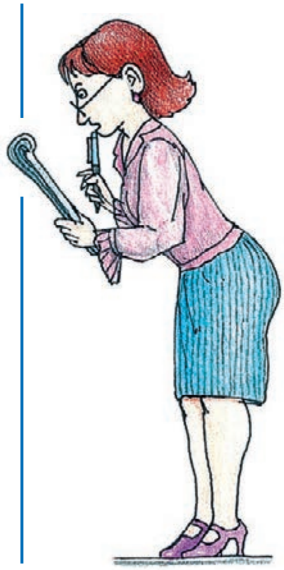
5. példa

Egy vállalat két üzemet működtet. Az elsőben 2400, a másodikban pedig 1500 darab terméket állítanak elő naponta. Hány százalékkal nő a vállalat termelése, ha az első üzem 15%-kal, a második pedig 10%-kal növeli a napi termelését?

Megoldás

Számítsuk ki, hogy az egyes üzemek mennyivel növelik a napi termelést. Az első üzem $2400 \cdot \frac{15}{100} = 360$ darabbal, a második üzem pedig $1500 \cdot \frac{10}{100} = 150$ darabbal gyárt többet naponta.

A vállalat termelése naponta $360 + 150 = 510$ darab termékkel növekszik. Ez az eredeti termelésnek $\frac{510}{3900} = 0{,}1308$-ed része. Tehát a vállalat termelése körülbelül 13%-kal nő.



Feladatok

1. Milyen számjegy áll a $\frac{8}{17}$ tizedes tört alakjában a tizedes vessző utáni 1960. helyen?
2. Igaz-e, hogy a $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ irracionális szám? Indokoljuk a választ.
3. Állítsunk elő olyan irracionális számokat, amelyek csak a 2 és a 3 számjegyeket tartalmazzák.
4. A turistatérképen a következő olvasható: 1 : 40 000. Mennyit kell még gyalogolnunk, ha a térképen 5 cm távolságra vagyunk a céltól?
5. Egy kabát árát év elején 20%-kal felemelik, majd szezon végi kiárusításkor 20%-kal csökkentik. Az eredeti ár hány %-át kell ekkor fizetni a kabátért?
6. Egy kereskedő 30%-os haszonra tesz szert, ha 10 920 Ft-ért elad egy árut. Mivel az áru nem fogyott, 10%-ot engedett az árból. Hány %-os haszonnal adta el ekkor az árut?
7. Egy élelmiszer csomagolásán az alábbi adatok olvashatók: bruttó tömeg 4 850 g, nettó tömeg 3 750 g. Hány százaléka a bruttó tömegnek a nettó? Hány százaléka a nettó tömegnek a csomagolás?
8. Egy osztályban a tanév során három kirándulást szerveztek. Az első kiránduláson az osztály 70%-a, a másodikon a 80%-a, a harmadikon a 90%-a vett részt. 12 tanuló mindhárom kiránduláson ott volt, a többiek pedig kétszer kirándultak. Hányan járnak az osztályba?

FÜGGVÉNYEK

1. A függvény fogalma, grafikonja, egyszerű tulajdonságai

A függvény a matematika egyik központi, egységesítő fogalma. A geometriai transzformációktól a hosszúság, terület, térfogat fogalmáig, a kombinatorikától a valószínűség-számításig találkozunk a függvényekkel.

a függvény

DEFINÍCIÓ: **Ha A és B nem üres halmazok, és adott egy hozzárendelés, amely A minden eleméhez B valamelyik elemét rendeli hozzá, akkor függvényről beszélünk. Ezt a három dolgot: A-t, B-t és a hozzárendelést együtt *függvénynek* nevezzük, és egy betűvel, pl. f-fel jelöljük.**

az értelmezési tartomány, az értékkészlet

Az A halmaz az f függvény *értelmezési tartománya,* a B az f függvény képhalmaza. Az A halmaz elemeihez rendelt B halmazbeli elemek halmazát gyakran röviden így jelöljük: $f(A)$, ez a halmaz *f értékkészlete.*

Ha $x \in A$, akkor az x-hez rendelt B-beli értéket így jelöljük: $f(x)$, és az x-hez rendelt, vagy másképpen az x helyen felvett függvényértéknek nevezzük. Szokásos jelölések még: $A = D_f$, $f(A) = R_f$. Az f függvényt röviden így is jelölik: $f\colon A \to B$.

Példák függvényekre

1. Legyen az A halmaz a sík négyzeteinek halmaza, B a valós számok halmaza, és rendeljük hozzá minden négyzethez a területét. Ezzel egy függvényt adtunk meg.
2. Legyen A is és B is a sík pontjainak halmaza, $\vec{v}$ pedig egy adott vektor a síkban. Rendeljük hozzá minden $P \in A$-hoz azt a $Q \in B$-t, amely P-ből a $\vec{v}$-vel való eltolással keletkezik.
3. Legyen $A = \{1, 2, \ldots, n\} = B$, és legyen $i_1, i_2, \ldots, i_n$ az $1, 2, \ldots, n$ számok egy permutációja. Rendeljük hozzá k-hoz i_k-t ($k = 1, 2, \ldots, n$). Az adott permutáció tehát egy olyan függvénnyel jellemezhető (azonosítható), amelynek értelmezési tartománya és értékkészlete is A, és a hozzárendelés kölcsönösen egyértelmű. Tudjuk már előző tanulmányainkból, hogy az ilyen tulajdonságú függvények száma $n!$.
4. Legyen az A egy szabályos dobókocka dobásakor adódó lehetséges eredmények halmaza, B pedig a $[0; 1]$ zárt intervallumbeli valós számok halmaza. Az A minden elemének feleltessük meg az $\frac{1}{6}$ számot (az illető esemény valószínűségét). Az így értelmezett függvényt a valószínűség-számításban **valószínűségi változónak** nevezik.

5. Legyen A és B is a valós számok halmaza. Rendeljük hozzá minden valós számhoz az egészrészét. A kapott függvényt jelöljük f-fel.
   $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = [x]$.
   f értékkészlete az egész számok $\mathbb{Z}$ halmaza.
6. Legyen $A = [0, 1]$, $B = \mathbb{R}$, és jelölje g a következő függvényt:
   $g\colon A \to \mathbb{R},\ g(x) = [x]$.
   g értékkészlete a $\{0; 1\}$ kételemű halmaz.

Az 5. és 6. példában szereplő f és g függvények különbözők, bár szoros kapcsolat van közöttük.

a függvény kiterjesztése és leszűkítése

*DEFINÍCIÓ: **Ha $f\colon A_1 \to B$ és $g\colon A_2 \to B$ két függvény, továbbá $A_2 \subseteq A_1$ és minden $x \in A_2$-re $f(x_2) = g(x_2)$, akkor azt mondjuk, hogy f *kiterjesztése* g-nek, illetve g *leszűkítése* f-nek.**

◆ ◆ ◆

Érdemes még megemlíteni a függvények következő speciális típusait, amelyek gyakran fontos szerepet játszanak.

Ha az $f\colon A \to B$ függvényre teljesül, hogy minden $b \in B$-hez van olyan $a \in A$, hogy $f(a) = b$, akkor f **szürjektív.**

Ha az $f\colon A \to B$ függvényre teljesül, hogy minden $a_1 \neq a_2$, $a_1, a_2 \in A$ esetén $f(a_1) \neq f(a_2)$, akkor f **injektív.**

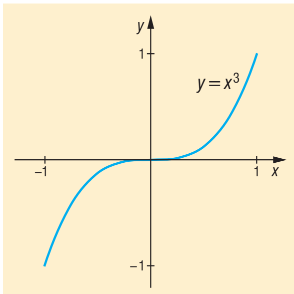
Ha egy f függvény injektív is és szürjektív is, akkor a függvényt **bijektívnek** nevezzük. Egy bijektív függvény kölcsönösen egyértelmű hozzárendelést jelent az A és B halmaz elemei között. Ha $A = B$, akkor egy bijektív leképezést szokás az A egy permutációjának is nevezni.

Például az

1. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+,\ f(x) = x^2$ függvény szürjektív, (de nem injektív);
2. $g\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R},\ g(x) = x^2$ függvény injektív (de nem szürjektív);
3. $h\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+,\ h(x) = x^2$ függvény bijektív.

◆ ◆ ◆

A következőkben – hacsak kivételesen mást nem mondunk – olyan függvényekkel foglalkozunk, amelyek a valós számok egy részhalmazából képeznek a valós számok egy részhalmazába, azaz olyan $f\colon A \to B$ függvényekkel, amelyekre $A, B \subseteq \mathbb{R}$.



1. ábra

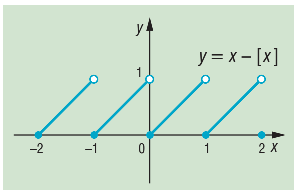
a függvény grafikonja

DEFINÍCIÓ: **Ha adott az $f\colon A \to B$ függvény, akkor az**

$$\{(x; f(x)) \mid x \in A\}$$

ponthalmazt a *függvény grafikonjának* nevezzük.

2. ábra



Például az $f\colon [-1; 1] \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3$ függvény grafikonját az 1. ábrán rajzoltuk meg.

A $g\colon [-2; 2] \to \mathbb{R},\ g(x) = x - [x]$ függvény grafikonját a 2. ábrán rajzoltuk meg.

Feladatok

1. Rajzoljuk meg a következő függvények grafikonjait:

a) $f\colon [-2\pi;\,2\pi] \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin x;$

b) $g\colon [0{,}1;\,10] \to \mathbb{R},\ g(x) = \lg x;$

c) $h\colon \mathbb{R}\setminus]-1;\,1[\to \mathbb{R},\ h(x) = \dfrac{1}{x};$

d) $j\colon [-\frac{\pi}{4};\,\frac{\pi}{4}] \to \mathbb{R},\ j(x) = \operatorname{tg} x;$

e) $k\colon [1;\,9] \to \mathbb{R},\ k(x) = \sqrt{x};$

f) $l\colon [-1;\,1] \to \mathbb{R},\ l(x) = \begin{cases} 1, \text{ ha } x \text{ racionális,} \\ 0, \text{ ha } x \text{ irracionális.} \end{cases}$

2. Döntsük el, hogy a következő függvények közül melyek szürjektívek, injektívek, illetve bijektívek, és melyek nem tartoznak egyik típusba sem!

a) $f\colon [-\frac{\pi}{2};\,\frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin x;$

b) $g\colon [-3;\,3] \to \mathbb{R},\ g(x) = |x|;$

c) $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ h(x) = \dfrac{2x}{1+x^2};$

d) $j\colon \mathbb{R} \to \mathbb{Z},\ j(x) = [x];$

e) $k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ k(x) = -2x + 1;$

f) $l\colon \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R},\ l(x) = x.$