Árki Tamás
Konfárné Nagy Klára
Kovács István
Trembeczki Csaba
Urbán János

DIGITÁLIS VÁLTOZATBAN IS ELÉRHETŐ
Aktiváló kóddal

sokszínű

Matematika

FELADATGYŰJTEMÉNY

9–10

Letölthető megoldásokkal

ÉRETTSÉGI

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatokkal

MOZAIK

Árki Tamás
Konfárné Nagy Klára
Kovács István
Trembeczki Csaba
Urbán János

sokszínű Matematika

FELADATGYŰJTEMÉNY

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatokkal

9–10

Letölthető megoldásokkal

Tizenegyedik kiadás

Mozaik Kiadó – Szeged, 2019

Tisztelt Olvasó!

A feladatgyűjtemény, amelyet a kezében tart, egyedülálló a középiskolai matematika feladatgyűjtemények között. A szokásos tematikus felépítésen túl ugyanis ebben a kötetben évfolyamonként, kisebb fejezetekre bontva találjuk a feladatokat.

A könyv felépítése pontosan követi a *Sokszínű matematika* tankönyvcsalád köteteinek szerkezetét, így akik ebből a tankönyvből tanulnak, közvetlenül alkalmazhatják az órai munka és az önálló gyakorlás, sőt az érettségi felkészülés során is.

Ugyanakkor – mivel a feladatgyűjtemény felépítése természetesen megfelel a tantárgy belső logikájának és az iskolákban általánosan alkalmazott kerettanterveknek – minden nehézség nélkül használhatják azok is, akik más tankönyvekből tanulják, illetve tanítják a matematikát.

A feladatok nagy száma és változatossága miatt a tanulók bőségesen találnak a maguk számára kitűzött szintnek megfelelő gyakorlási lehetőséget. Így a tankönyveket és a feladatgyűjteményt együtt használva kellő jártasságot szerezhetnek a feladatmegoldásban.

Az egyes fejezetek végén található *Vegyes feladatok* áttekintést adnak az adott fejezet anyagából, ezért jól segíthetik az átfogóbb számonkérés előtti felkészülést.

A feladatok nehézségének jelölése

Minden fejezetben három különböző szintre bontva találjuk a feladatokat:

1198 **Gyakorló feladatok:** olyan feladatok, amelyek – akár a tanórákon, akár házi feladatként – elősegítik a megtanult ismeretek elmélyítését. *(narancssárga színű feladatsorszám)*

1430 **Középszintű feladatok:** az adott témakörben más témákhoz is kapcsolódó problémák, melyek megoldása elősegíti a tantárgy komplex ismeretanyagának ismétlését, a matematikai kompetenciák elsajátítása mellett azok alkalmazását. *(kék színű feladatsorszám)*

1758 **Emelt szintű feladatok:** az emelt szintű érettségire való felkészülést segítő problémák, melyek nemcsak megoldásuk nehézségében különböznek az előzőektől, hanem felvillantják a matematika szépségét is. *(bordó színű feladatsorszám)*

A feladatok sorszámozása

A feladatgyűjtemények feladatainak sorszámozása a tankönyvcsalád egyes köteteire utal.

A 9. évfolyam feladatai az 1001-es, a 10. évfolyam feladatai a 2001-es, a 11. évfolyamé a 3001-es, a 12. évfolyamé pedig a 4001-es sorszámtól kezdődnek. A 12.-es kötetben a négy év anyagát áttekintő rendszerező összefoglalás feladatai az 5001-es sorszámtól indulnak, ezáltal segíti a feladatok közötti válogatást az érettségire történő felkészüléskor.

Megoldások

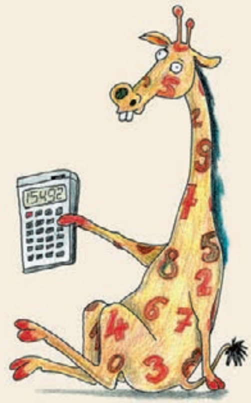
A feladatok megoldásai letölthetők a **www.mozaik.info.hu/matematika** oldalról. *(Részletes információ a könyv 191. oldalán olvasható.)*

A gyakorló feladatok esetén csak a végeredményt közöljük, más esetekben pedig annyira részletezzük a megoldásokat, amennyire azt pedagógiai szempontból szükségesnek tartottuk.

A kitűzött feladatok megoldásához jó munkát és jó tanulást kívánunk!

A szerzők

TARTALOMJEGYZÉK



9.5. *Egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek* (1475–1570)

9.6. *Egybevágósági transzformációk* (1571–1759)

9.7. *Statisztika* (1760–1807)

A feladatok megoldásai letölthetők a ***www.mozaik.info.hu/matematika*** *oldalról.*

A 10. évfolyam feladatai

10.1. *Gondolkodási módszerek* (2001–2091)

10.2. *A gyökvonás* (2092–2148)

10.3. *A másodfokú egyenlet* (2149–2248)

10.4. *Geometria* (2249–2632)

10.5. *Szögfüggvények* (2633–2730)

10.6. *Valószínűség-számítás* (2731–2814)

A feladatok megoldásai letölthetők a ***www.mozaik.info.hu/matematika*** *oldalról.*

A feladatgyűjteményben használt matematikai jelölések

Jelölés	Magyarázat
$\mathbb{N}$	a természetes számok halmaza
$\mathbb{Z}$	az egész számok halmaza
$\mathbb{Z}^+$; $\mathbb{Z}^-$	a pozitív egész számok halmaza; a negatív egész számok halmaza
$\mathbb{Q}$; $\mathbb{Q}^*$	a racionális számok halmaza; az irracionális számok halmaza
$\mathbb{Q}^+$; $\mathbb{Q}^-$	a pozitív racionális számok halmaza; a negatív racionális számok halmaza
$\mathbb{R}$	a valós számok halmaza
$\mathbb{R}^+$; $\mathbb{R}^-$	a pozitív valós számok halmaza; a negatív valós számok halmaza
$a \in A$; $b \notin A$	a eleme az A halmaznak; b nem eleme az A halmaznak
$A \subseteq B$	A halmaz részhalmaza B halmaznak
$C \subset D$	C halmaz valódi részhalmaza D halmaznak
$E \not\subset F$	E halmaz nem részhalmaza F halmaznak
$A \cup B$; $C \cap D$; $E \setminus F$	A és B halmaz uniója; C és D halmaz metszete; E és F halmaz különbsége
$\varnothing$, $\{\,\}$	üres halmaz
$\overline{A}$	az A halmaz komplementere
$\lvert A \rvert$	az A halmaz elemszáma
$A \Rightarrow B$; $C \Leftrightarrow D$	ha A, akkor B; C akkor és csak akkor, ha D
$[a; b]$	a, b zárt intervallum
$[a; b[$	a, b balról zárt, jobbról nyitott intervallum
$]a; b]$	a, b balról nyitott, jobbról zárt intervallum
$]a; b[$	a, b nyitott intervallum
$n!$	n faktoriális: $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$
$f: x \mapsto$	az f függvény hozzárendelési szabálya
$f(x_0)$	az f függvény helyettesítési értéke az x_0 helyen
$\lvert x \rvert$	az x szám abszolút értéke
$[x]$	az x szám egészrésze
$\{x\}$	az x szám törtrésze
$\sqrt{x}$	az x szám négyzetgyöke
$\sqrt[n]{x}$	az x szám n-edik gyöke
$a \mid b$	az a szám osztója a b számnak
(a, b)	az a és b szám legnagyobb közös osztója
$[a, b]$	az a és b szám legkisebb közös többszöröse
$\overrightarrow{AB}$	az A pontból B pontba mutató vektor
$\vec{a}$, $\vec{0}$	a vektor, nullvektor
$\sphericalangle$	szög

9. évfolyam

9.3. FÜGGVÉNYEK

A derékszögű koordináta-rendszer, ponthalmazok

1194 Adott a valós számok $\mathbb{R}$ halmazán értelmezett következő függvény:

$$f(x) = x^2 - 5x + 6.$$

Adjuk meg a függvény grafikonjának a következő x értékekhez tartozó pontjait:

$$x = -1, \quad 0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4.$$

1195 Adott a következő két ponthalmaz: $A = \{(x; y) \mid x, y \in \mathbb{R} \text{ és } y \geq 1\}$, $B = \{(x; y) \mid x, y \in \mathbb{R} \text{ és } x \geq 2\}$. Ábrázoljuk a következő ponthalmazokat:

a) $A \cap B$; *b)* $A \cup B$; *c)* $A \setminus B$.

1196 Adott a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ függvény. Adjuk meg a függvény grafikonjának a következő x értékekhez tartozó pontjait:

$$x = -1, \quad 0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4.$$

1197 Ábrázoljuk a síkon azokat a ponthalmazokat, amelyekhez tartozó pontok koordinátái kielégítik a megadott feltételt:

a) $\min(x; y) = 1$; *b)* $\max(x; y) = 1$; *c)* $\max(|x|; |y|) = 1$.

Lineáris függvények

1198 Ábrázoljuk a következő valós számokon értelmezett függvényeket a derékszögű koordináta-rendszerben:

a) $x \mapsto 2x - 1$; *b)* $x \mapsto -2x + 3$; *c)* $x \mapsto 3x - 6$;

d) $x \mapsto 4x - 2$; *e)* $x \mapsto 7 - 5x$; *f)* $x \mapsto \frac{1}{2} \cdot x + 2$;

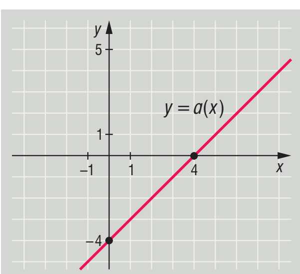
g) $x \mapsto \frac{1}{3} \cdot x - 1$; *h)* $x \mapsto \frac{2}{5} \cdot x$; *i)* $x \mapsto -\frac{3}{2} \cdot x + 6$;

j) $x \mapsto -\frac{2}{5} \cdot x + 4$; *k)* $x \mapsto \frac{1}{2} \cdot (x - 4) + 1$; *l)* $x \mapsto -\frac{1}{3} \cdot (x - 6) + 2$;

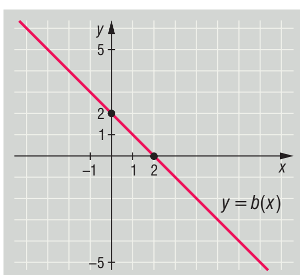
m) $x \mapsto 2 \cdot (x + 2) - 3 \cdot (x + 1)$.

1199 Az alábbi ábrákon lineáris függvények grafikonja látható. Adjuk meg a függvények hozzárendelési szabályát.

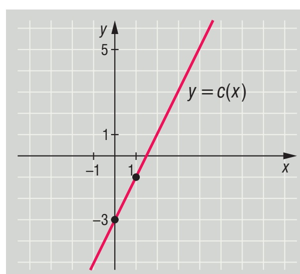
a)



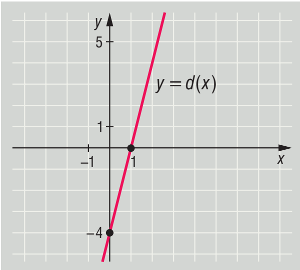
b)



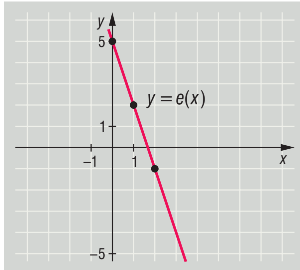
c)



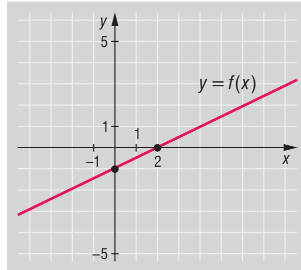
d)



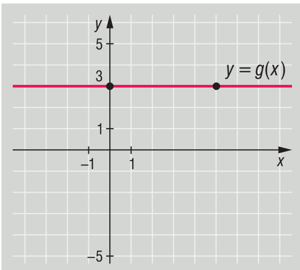
e)



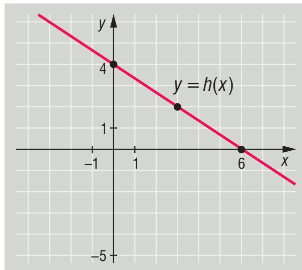
f)



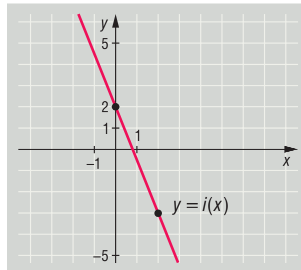
g)



h)



i)



1200 Döntsük el, hogy az adott pontok közül melyik illeszkedik a megadott egyenesekre:

$$P(0; -1), \quad Q(1; 1), \quad R(2; 5).$$

Az adott egyenesek a következő függvények képei:

a) $f(x) = 3x - 1$; *b)* $g(x) = 2x - 1$; *c)* $h(x) = 2x + 1$.

1201 Határozzuk meg annak a lineáris függvénynek a hozzárendelési szabályát, amelynek a grafikonja áthalad az adott $P(3; 3)$ és $Q(2; 0)$ pontokon. Adjuk meg a függvény meredekségét és azokat a pontokat, ahol a grafikon (egyenes) metszi az x és y tengelyeket.

1202 Az $f(x) = ax + b$, $x \in \mathbb{R}$ függvényről tudjuk, hogy a és b valós számok, valamint $f(-1) = 2$, $f(2) = 3$. Adjuk meg képlettel az f függvényt.

1203 Az *A* és *B* város távolsága 400 km. *A*-ból egy teherautó indul *B*-be, és 6 óra alatt ér oda. Ugyanakkor indul egy személyautó *B*-ből *A*-ba ugyanazon az útvonalon, és 4 óra alatt ér *A*-ba. Az indulás után hány óra múlva találkozik a két autó? Oldjuk meg a feladatot függvények segítségével.

1204 Két város, *A* és *B* közötti távolság 300 km. *A*-ból egy lassú jármű indul *B*-be, megállás nélkül 6 óra alatt ér oda. Ugyanakkor indul *B*-ből egy gyorsabb teherautó *A*-ba, az is megállás nélkül megy, és 4 óra alatt ér *A*-ba. Hol találkozott a két jármű útközben, és indulásuk után hány órával?

Az abszolútérték-függvény

1205 Ábrázoljuk a valós számok halmazán értelmezett következő függvényeket a derékszögű koordináta-rendszerben.

a) $x \mapsto |x| - 2$; *b)* $x \mapsto |x| + 1$; *c)* $x \mapsto |x - 3|$; *d)* $x \mapsto |x + 4|$;

e) $x \mapsto -|x| + 1$; *f)* $x \mapsto -|x - 1|$; *g)* $x \mapsto |x + 1| - 2$; *h)* $x \mapsto |x - 2| + 2$;

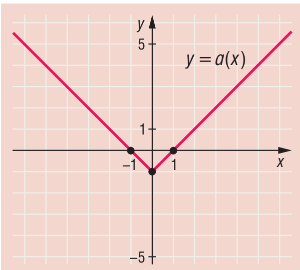
i) $x \mapsto |x - 4| - 3$; *j)* $x \mapsto 2 \cdot |x|$; *k)* $x \mapsto 2 \cdot |x - 1|$; *l)* $x \mapsto |2x - 3|$;

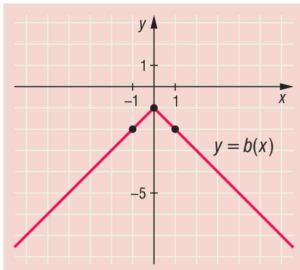
m) $x \mapsto -\dfrac{1}{2} \cdot |x + 2| + 2$.

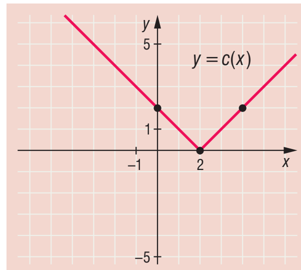
1206 Ábrázoljuk a következő intervallumokon értelmezett valós függvényeket:

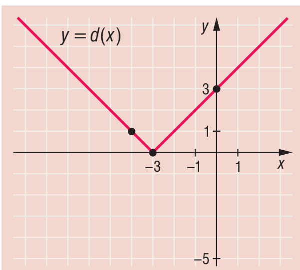
a) $x \mapsto \dfrac{|x+1|-|x-1|}{2}$, $x \in [-2; 2]$;
b) $x \mapsto \dfrac{x-1}{|x-1|}$, $x \neq 1$, $x \in [-3; 3]$;
c) $x \mapsto |x+2|-|x-1|$, $x \in [-3; 2]$;
d) $x \mapsto 2 \cdot |x+3|$, $x \in [-4; 2]$;
e) $x \mapsto x-1-2 \cdot |x-1|$, $x \in [-3; 3]$;
f) $x \mapsto |x+1|+|x-2|$, $x \in [-2; 3]$.

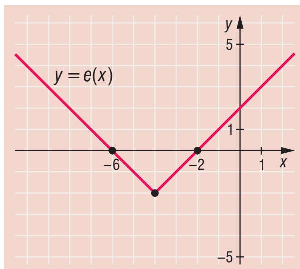
1207 Az alábbi ábrákon abszolútérték-függvények grafikonja látható. Adjuk meg a függvények hozzárendelési szabályát.

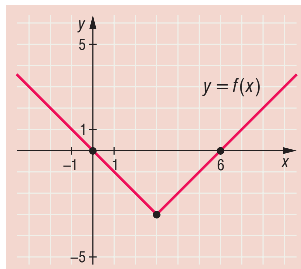
a)


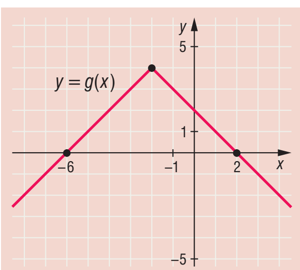
b)


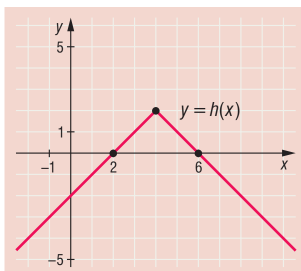
c)


d)


e)


f)


g)


h)


1208 Ábrázoljuk az alábbi függvényt ($x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$):

$$g(x) = \frac{-|x|}{x}.$$

1209 Ábrázoljuk a valós számok halmazán értelmezett következő függvényt:

$$f(x) = \Big|\big||x|-3\big|-2\Big|.$$

1210 Igazoljuk, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\left(\frac{x+|x|}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-|x|}{2}\right)^2 = x^2.$$

1211 Ábrázoljuk a síkon azoknak a $P(x;\, y)$ pontoknak a halmazát, amelyeknek koordinátái kielégítik a következő feltételt:

a) $|x| = 0$; *b)* $|x| = |y|$; *c)* $|x| + |y| \geq 1$; *d)* $|x| + |y| = 2$.

1212 Ábrázoljuk a síkon azoknak a $P(x;\, y)$ pontoknak a halmazát, amelyeknek koordinátái kielégítik a következő feltételeket:

a) $|x + y| + |y - x| \leq 4$; *b)* $|2x| = |y|$; *c)* $|y| - |x| = 1$.

A másodfokú függvény

1213 Ábrázoljuk és jellemezzük (értékkészlet, zérushely, menete, szélsőérték, paritás szempontjából) a következő, valós számok halmazán értelmezett függvényeket:

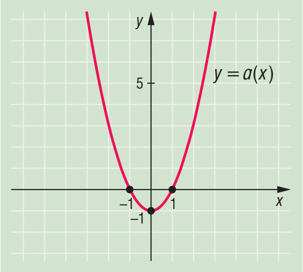
a) $x \mapsto x^2 + 2$; *b)* $x \mapsto (x + 2)^2$; *c)* $x \mapsto (x - 3)^2$;
d) $x \mapsto -x^2 + 4$; *e)* $x \mapsto -(x - 2)^2$; *f)* $x \mapsto -(x + 3)^2$;
g) $x \mapsto (x - 1)^2 - 4$; *h)* $x \mapsto 1 - (x + 2)^2$; *i)* $x \mapsto 2 \cdot (x - 4)^2 - 2$;
j) $x \mapsto \frac{1}{2} \cdot (x + 2)^2 + 1$; *k)* $x \mapsto x^2 - 4x + 3$; *l)* $x \mapsto x^2 + 2x - 3$.

1214 Ábrázoljuk és jellemezzük (értékkészlet, zérushely, menete, szélsőérték, paritás szempontjából) a következő függvényeket az adott intervallumon:

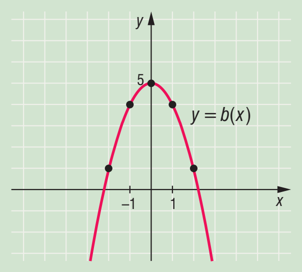
a) $x \mapsto x^2 - 4,\ x \in [-3;\, 3]$; *b)* $x \mapsto 2x - x^2,\ x \in [-2;\, 3]$;
c) $x \mapsto |4x - x^2|,\ x \in [-2;\, 2]$; *d)* $x \mapsto \left|2 \cdot |x| - x^2\right|,\ x \in [-3;\, 3]$;
e) $x \mapsto \left|2x^2 - 3x + |x - 1|\right|,\ x \in [-1;\, 2]$; *f)* $x \mapsto x \cdot |x|,\ x \in [-2;\, 2]$.

1215 Az alábbi ábrákon másodfokú függvények grafikonja látható. Adjuk meg a függvények hozzárendelési szabályát:

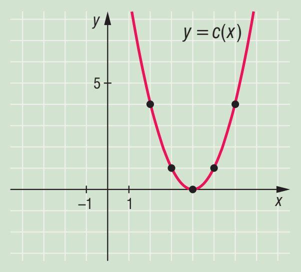
a)



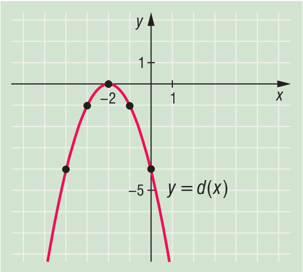
b)



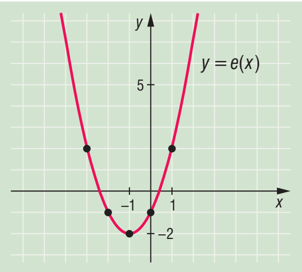
c)



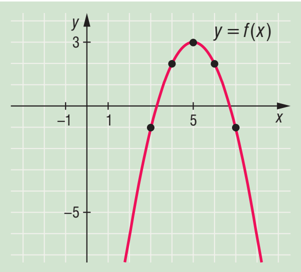
d)

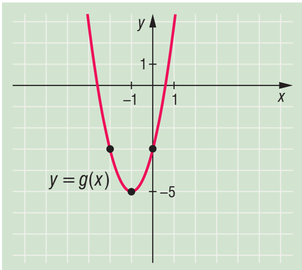


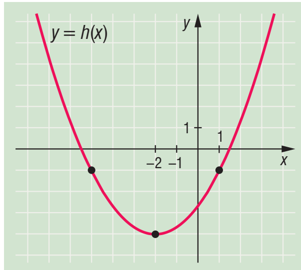
e)

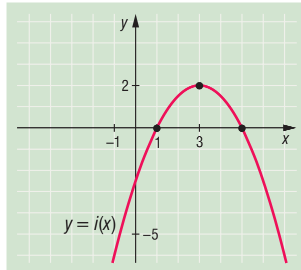


f)



g)


h)


i)


1216 Ábrázoljuk a következő intervallumokon értelmezett valós értékű függvényeket:
a) $x \mapsto x \cdot |x-3|,\ x \in [-2; 4]$; *b)* $x \mapsto x^2 - 2 \cdot |x+1| - 1,\ x \in [-2; 2]$;
c) $x \mapsto x \cdot |x| - 4x - 5,\ x \in [-3; 3]$; *d)* $x \mapsto \dfrac{|x-1|}{x-1} \cdot (x^2+3),\ x \neq 1, x \in [-2; 2]$.

1217 Oldjuk meg függvénygrafikonok alkalmazásával a következő egyenleteket, egyenlőtlenségeket:
a) $x^2 - 7x + 12 = 0$; *b)* $9x - 14 - x^2 > 0$; *c)* $x^2 - 5 \cdot |x| + 4 < 0$;
d) $|x^2 - 4x| > 0$; *e)* $2x^2 - 5 \cdot |x| + 3 \geq 0$.

1218 Oldjuk meg lineáris függvények segítségével az alábbi másodfokú egyenlőtlenségeket:
a) $(x-3) \cdot (x+2) \geq 0$; *b)* $\dfrac{(x-4) \cdot (x+1)}{(2-x) \cdot (x-1)} \leq 0$.

1219 Ábrázoljuk és jellemezzük a következő függvényt:
$$f\colon [-3; 3] \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 - |x| + 2.$$
Oldjuk meg grafikusan az $f(x) \geq 0$ egyenlőtlenséget.

1220 Az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény másodfokú, és $f(0) = 1$, $f(1) = 0$, $f(3) = 10$. Adjuk meg képlettel *f*-et.

1221 Egy labdát ferde hajítással felrúgnak, pályáját az idő (másodperc) függvényeként (méterben) az $f(x) = 10x - x^2$ függvény írja le. Mennyi idő múlva esik le a labda, és milyen magasra jut? Az elrúgás után hány másodperc múlva lesz a legmagasabban?

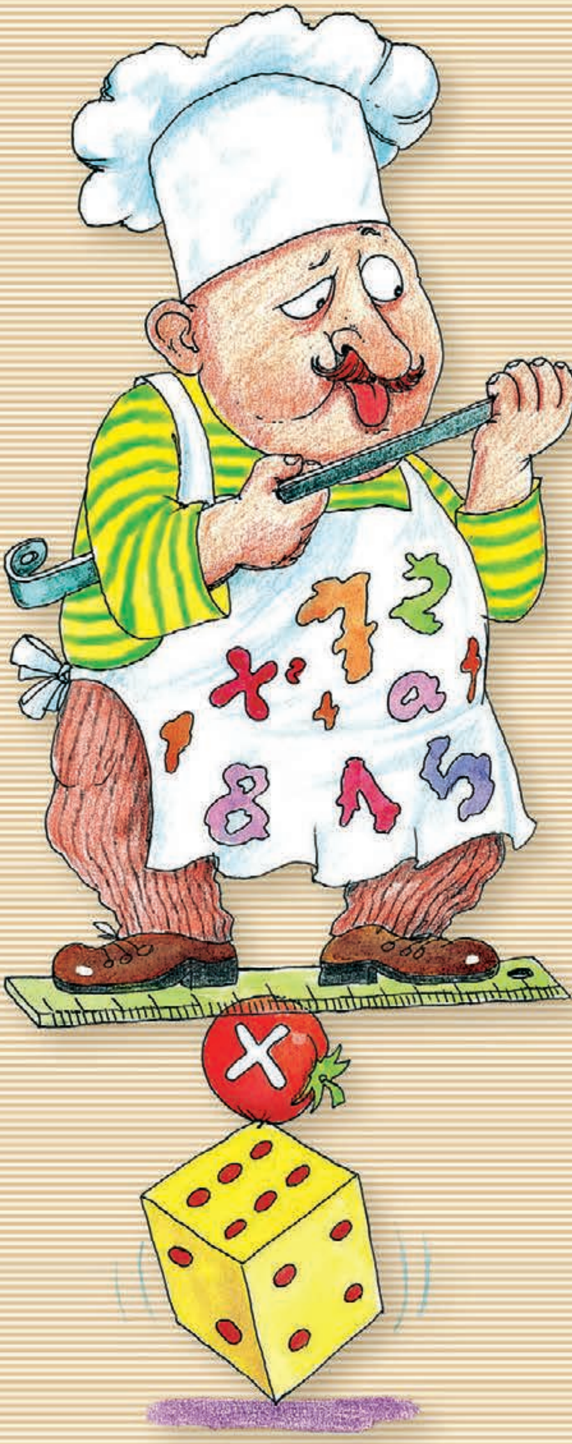
1222 Egy bárány egy 48 méter hosszú drótkerítéssel körülvett téglalap alakú telken legel. A telek egyik oldala közvetlenül egy ház falához csatlakozik. Hogyan válasszuk meg a téglalap oldalainak méretét, ha azt szeretnénk, hogy a bárány által lelegelhető kert területe maximális legyen?

1223 *a)* Bontsuk fel a 40-et két összeadandóra úgy, hogy a két adott rész szorzata maximális legyen.
b) Lássuk be, hogy az így kapott két rész az adott számtól függetlenül mindig a szám fele lesz.

1224 A *p* valós paraméter mely értékére igaz, hogy az
$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = px^2 + (p^2 - 40{,}5) \cdot x - 12$$
másodfokú függvénynek az $x = \dfrac{9}{4}$ helyen maximuma van? Mennyi ez a maximális érték?

1225 Adott a következő függvény:
$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 6x - 10.$$
Adjuk meg képlettel az alábbi függvényeket:
$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = \frac{1}{2} \cdot (f(x) + f(-x)), \quad h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ h(x) = \frac{1}{2} \cdot (f(x) - f(-x)).$$

10. évfolyam



10.2. A GYÖKVONÁS

Racionális számok, irracionális számok

2092 Írjuk fel tizedes tört alakban a következő számokat:

a) $\frac{21}{8}$; *b)* $\frac{37}{16}$; *c)* $\frac{29}{6}$; *d)* $\frac{7}{12}$; *e)* $\frac{5}{11}$; *f)* $\frac{10}{7}$;
g) $\frac{20}{13}$; *h)* $\frac{5}{17}$.

2093 Írjuk fel két egész szám hányadosaként a következő tizedes törteket:

a) $0{,}764$; *b)* $2{,}1973$; *c)* $2{,}\dot{5}$; *d)* $4{,}\dot{1}\dot{7}$; *e)* $0{,}\dot{7}6\dot{4}$; *f)* $0{,}76\dot{4}$;
g) $0{,}7\dot{6}\dot{4}$; *h)* $3{,}\dot{1}53\dot{4}$; *i)* $5{,}\dot{9}$.

2094 Bizonyítsuk be, hogy a következő számok irracionálisak:

a) $\sqrt{5}$; *b)* $\sqrt{3}+2$; *c)* $1+\sqrt{5}$; *d)* $3-\sqrt{3}$; *e)* $\sqrt{15}$.

2095 A számegyenesen szerkesszük meg a következő számok helyét:

a) $\sqrt{3}$; *b)* $\sqrt{5}$; *c)* $\sqrt{15}$; *d)* $\sqrt{24}$; *e)* $\sqrt{11}-2$; *f)* $3-\sqrt{3}$;
g) $2-\frac{\sqrt{7}}{2}$; *h)* $\sqrt{60}$; *i)* $\sqrt{2009}$.

2096 Adjunk meg négy olyan irracionális számot, amelyek csak az 1, 2 és 3 számjegyeket tartalmazzák és értékük:

a) 1 és 2 között van; *b)* 10 és 20 között van; *c)* nagyobb 30-nál.

2097 Számoljuk ki, hogy milyen számjegy áll a következő törtek tizedes tört alakjában a tizedes vessző után a 2009. helyen:

a) $\frac{41}{16}$; *b)* $\frac{11}{3}$; *c)* $\frac{13}{6}$; *d)* $\frac{5}{9}$; *e)* $\frac{25}{7}$; *f)* $\frac{12}{17}$.

2098 Adjunk meg három racionális és két irracionális számot, amelyek 5,99 és 6 között vannak.

2099 Döntsük el, hogy mely állítások igazak és melyek hamisak.

a) Két racionális szám összege mindig racionális.
b) Két irracionális szám összege mindig irracionális.
c) Két racionális szám szorzata mindig racionális.
d) Két racionális szám szorzata lehet egész szám.
e) Két irracionális szám szorzata mindig irracionális.
f) Van két olyan irracionális szám, melyek szorzata egész szám.
g) Egy racionális és egy irracionális szám összege mindig irracionális.
h) Van olyan racionális szám, melynek reciproka irracionális.
i) Van olyan irracionális szám, amelynek tizedes tört alakjában egy jegytől kezdve csak nullák állnak.

A négyzetgyökvonás azonosságai, alkalmazásaik

2100 Adjuk meg a valós számoknak azt a legbővebb részhalmazát, melyen az alábbi kifejezések értelmezhetők:

a) $\sqrt{2x-1}$; *b)* $\sqrt{2x}-1$; *c)* $\sqrt{-x}$; *d)* $\sqrt{6-4x}$;

e) $\sqrt{6}-4x$; *f)* $\sqrt{2x-3}+\sqrt{1-x}$; *g)* $\sqrt{\dfrac{5x-1}{x+3}}$; *h)* $\dfrac{\sqrt{5x-1}}{\sqrt{x+3}}$;

i) $\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{x+3}$; *j)* $\sqrt{(x-2)\cdot(x+3)}$; *k)* $\sqrt{x^2-1}\cdot\sqrt{x^2+5}$.

2101 Végezzük el a következő műveleteket:

a) $\sqrt{18}\cdot\sqrt{2}$; *b)* $\dfrac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}$; *c)* $\sqrt{7}\cdot\sqrt{28}$; *d)* $\dfrac{\sqrt{28}}{\sqrt{7}}$;

e) $\dfrac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}}$; *f)* $\sqrt{75}\cdot\sqrt{3}$; *g)* $\dfrac{\sqrt{45}}{\sqrt{5}}$; *h)* $\sqrt{45}\cdot\sqrt{5}$;

i) $\dfrac{\sqrt{3^3}}{\sqrt{3}}$; *j)* $\sqrt{5}\cdot\sqrt{5^3}$; *k)* $\sqrt{2^5}\cdot\sqrt{2^3}$; *l)* $\dfrac{\sqrt{7^3}}{\sqrt{7^5}}$;

m) $\sqrt{7^3}\cdot\sqrt{7^5}$; *n)* $\left(\sqrt{11}\right)^3\cdot\sqrt{11}$; *o)* $\dfrac{\left(\sqrt{3}\right)^7}{\left(\sqrt{3}\right)^3}$; *p)* $\sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{8}-\sqrt{2}\right)$;

q) $\sqrt{3}\cdot\left(\sqrt{27}+\sqrt{3}\right)$.

2102 A műveletek elvégzésével döntsük el, hogy melyik szám a nagyobb:

a) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}$ vagy $\sqrt{15}\cdot\sqrt{3}$; *b)* $\sqrt{11}\cdot\sqrt{7}$ vagy $\sqrt{6}\cdot\sqrt{13}$;

c) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{10}$ vagy $\dfrac{\sqrt{40}}{\sqrt{2}}$; *d)* $\dfrac{\sqrt{140}}{\sqrt{7}}$ vagy $\sqrt{3}\cdot\sqrt{7}$;

e) $\dfrac{\sqrt{65}}{\sqrt{5}}$ vagy $\sqrt{7}\cdot\sqrt{2}$; *f)* $\dfrac{\sqrt{180}}{\sqrt{6}}$ vagy $\dfrac{\sqrt{150}}{\sqrt{5}}$;

g) $\dfrac{\sqrt{184}}{\sqrt{8}}$ vagy $\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{60}}{\sqrt{5}}$; *h)* $\dfrac{\left(\sqrt{3}\right)^5}{\sqrt{6}}\cdot\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ vagy $\sqrt{\dfrac{18}{5}}\cdot\dfrac{\sqrt{5^3}}{\sqrt{15}}$;

i) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{27}}\cdot\sqrt{\dfrac{6^3}{128}}\cdot\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{10}}$ vagy $\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{5}}\cdot\sqrt{\dfrac{15^3}{135}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{125}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3^3}}$.

2103 Végezzük el a következő műveleteket:

a) $\sqrt{5-\sqrt{21}}\cdot\sqrt{5+\sqrt{21}}$; *b)* $\sqrt{\sqrt{29}+2}\cdot\sqrt{\sqrt{29}-2}$;

c) $\sqrt{7+\sqrt{24}}\cdot\sqrt{7-\sqrt{24}}$; *d)* $\sqrt{\sqrt{19}-\sqrt{3}}\cdot\sqrt{\sqrt{19}+\sqrt{3}}$;

e) $\sqrt{\sqrt{31}-\sqrt{6}}\cdot\sqrt{\sqrt{31}+\sqrt{6}}$; *f)* $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}+\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^2$;

g) $\left(\sqrt{8-\sqrt{15}}+\sqrt{8+\sqrt{15}}\right)^2$; *h)* $\left(\sqrt{11+\sqrt{21}}-\sqrt{11-\sqrt{21}}\right)^2$;

i) $\left(\sqrt{15-\sqrt{56}}+\sqrt{\sqrt{56}+15}\right)^2$; *j)* $\left(\sqrt{\sqrt{89}-\sqrt{8}}-\sqrt{\sqrt{89}+\sqrt{8}}\right)^2$;

k) $\left(\sqrt{\sqrt{41}-\sqrt{5}}-\sqrt{\sqrt{41}+\sqrt{5}}\right)^2$.

2104 Végezzük el a következő műveleteket:

a) $(\sqrt{6}+3)\cdot(2+3\cdot\sqrt{6})$;
b) $(2\cdot\sqrt{2}-1)\cdot(3+\sqrt{2})$;
c) $(\sqrt{10}+3)\cdot(\sqrt{10}-3)$;
d) $(\sqrt{13}-1)\cdot(\sqrt{13}+1)$;
e) $(\sqrt{17}-\sqrt{3})\cdot(\sqrt{17}+\sqrt{3})$;
f) $(4\cdot\sqrt{2}+2\cdot\sqrt{7})\cdot(4\cdot\sqrt{2}-2\cdot\sqrt{7})$;
g) $(3\cdot\sqrt{2}-4)^2$;
h) $(6+2\cdot\sqrt{3})^2$;
i) $(5-2\cdot\sqrt{5})^2$;
j) $(\sqrt{7}+2\cdot\sqrt{3})^2$.

2105 A kifejezések átalakításával döntsük el, hogy melyik szám a nagyobb:

a) $5\cdot\sqrt{3}$ vagy $6\cdot\sqrt{2}$;
b) $6\cdot\sqrt{3}$ vagy $7\cdot\sqrt{2}$;
c) $10\cdot\sqrt{5}$ vagy $9\cdot\sqrt{6}$;
d) $3\cdot\sqrt{11}$ vagy $2\cdot\sqrt{23}$;
e) $3\cdot\sqrt{8}$ vagy $6\cdot\sqrt{2}$;
f) $8\cdot\sqrt{7}$ vagy $15\cdot\sqrt{2}$;
g) $\dfrac{\sqrt{72}}{6}$ vagy $\dfrac{\sqrt{200}}{10}$;
h) $\dfrac{\sqrt{120}}{4}$ vagy $\dfrac{\sqrt{190}}{5}$;
i) $\dfrac{\sqrt{70}}{10}$ vagy $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$;
j) $\dfrac{\sqrt{21}}{3}$ vagy $\dfrac{2\cdot\sqrt{15}}{5}$.

2106 Végezzük el a következő műveleteket:

a) $\sqrt{72}-\sqrt{32}-\sqrt{8}$;
b) $\sqrt{48}-\sqrt{27}+\sqrt{75}$;
c) $\sqrt{125}-\sqrt{45}-\sqrt{20}$;
d) $\sqrt{18}+\sqrt{50}-\sqrt{98}$;
e) $\sqrt{12}+\sqrt{108}-\sqrt{147}$;
f) $(\sqrt{27}+\sqrt{2}-\sqrt{12})\cdot(\sqrt{8}+\sqrt{3}-\sqrt{18})$;
g) $(\sqrt{80}-\sqrt{3}-\sqrt{45})\cdot(\sqrt{75}+\sqrt{5}-\sqrt{48})$;
h) $(\sqrt{98}+\sqrt{108}-\sqrt{8}-\sqrt{147})\cdot(\sqrt{32}-\sqrt{48}+\sqrt{75}+\sqrt{2})$;
i) $(\sqrt{180}+\sqrt{112}-\sqrt{45}-\sqrt{28})\cdot(\sqrt{63}-\sqrt{20}-\sqrt{175}+\sqrt{125})$;
j) $(4\cdot\sqrt{a}-6\cdot\sqrt{9a}+7\cdot\sqrt{a}+5\cdot\sqrt{4a})$, $a\ge 0$;
k) $(5\cdot\sqrt{12y}-2\cdot\sqrt{300y}+3\cdot\sqrt{75y}-5\cdot\sqrt{3y})$, $y\ge 0$;
l) $(2\cdot\sqrt{50x}+\sqrt{18x}+3\cdot\sqrt{2x}-\sqrt{8x})$, $x\ge 0$.

2107 Gyöktelenítsük a következő törtek nevezőjét:

a) $\dfrac{4}{\sqrt{5}}$;
b) $\dfrac{9}{\sqrt{2}}$;
c) $\dfrac{12}{\sqrt{3}}$;
d) $\dfrac{21}{\sqrt{7}}$;
e) $\dfrac{3}{2\cdot\sqrt{6}}$;
f) $\dfrac{6}{5\cdot\sqrt{3}}$;
g) $\dfrac{14}{3\cdot\sqrt{7}}$;
h) $\dfrac{13}{3\cdot\sqrt{10}}$;
i) $\dfrac{y}{\sqrt{x}}$;
j) $\dfrac{5x}{2\cdot\sqrt{x}}$;
k) $\dfrac{a}{3\cdot\sqrt{y}}$;
l) $\dfrac{y}{5\cdot\sqrt{y}}$.

2108 Gyöktelenítsük a következő törtek nevezőjét:

a) $\dfrac{8}{\sqrt{5}+2}$;
b) $\dfrac{12}{\sqrt{3}-1}$;
c) $\dfrac{15}{2-\sqrt{7}}$;
d) $\dfrac{10}{\sqrt{6}+1}$;
e) $\dfrac{22}{2\cdot\sqrt{3}-1}$;
f) $\dfrac{11}{3\cdot\sqrt{2}-\sqrt{17}}$;
g) $\dfrac{10}{4\cdot\sqrt{2}+3\cdot\sqrt{3}}$;
h) $\dfrac{67}{5\cdot\sqrt{7}-6\cdot\sqrt{3}}$;
i) $\dfrac{2\cdot\sqrt{5}+3\cdot\sqrt{2}}{2\cdot\sqrt{5}-3\cdot\sqrt{2}}$;
j) $\dfrac{5}{\sqrt{x}+1}$;
k) $\dfrac{a}{\sqrt{a}-1}$;
l) $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$.

2109 Végezzük el a következő műveleteket:

a) $\dfrac{3\cdot\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}-\dfrac{5+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$; *b)* $\dfrac{5+4\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}}-\dfrac{2-2\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$;

c) $\dfrac{4-2\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{5}}+\dfrac{3\cdot\sqrt{5}-1}{2\cdot\sqrt{5}}$; *d)* $\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}\cdot\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$;

e) $\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}-\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$; *f)* $\dfrac{3\cdot\sqrt{2}+4}{3\cdot\sqrt{2}-4}+\dfrac{3\cdot\sqrt{2}-4}{3\cdot\sqrt{2}+4}$;

g) $\dfrac{4+\sqrt{5}}{2\cdot\sqrt{5}+3}+\dfrac{\sqrt{5}-4}{2\cdot\sqrt{5}-3}$; *h)* $\dfrac{2}{\sqrt{a}-1}+\dfrac{1}{\sqrt{a}+1}$;

i) $\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{3}{\sqrt{x}-1}+\dfrac{5}{\sqrt{x}+1}$; *j)* $\dfrac{3\cdot\sqrt{y}-2}{\sqrt{y}+1}-\dfrac{y+1}{y-1}-\dfrac{2\cdot\sqrt{y}-4}{\sqrt{y}-1}$.

2110 A négyzetgyök alá vitellel írjuk egyszerűbb alakba a következő kifejezéseket. (A változók pozitívak.)

a) $3\cdot\sqrt{\dfrac{5}{9}}$; *b)* $5\cdot\sqrt{\dfrac{3}{5}}$; *c)* $0{,}1\cdot\sqrt{10}$; *d)* $(\sqrt{7}-1)\cdot\sqrt{\dfrac{\sqrt{7}+1}{\sqrt{7}-1}}$;

e) $x\cdot\sqrt{x}$; *f)* $y^2\cdot\sqrt{y}$; *g)* $2a^2\cdot\sqrt{3ab}$; *h)* $b\cdot\sqrt{\dfrac{a}{b}}$;

i) $\dfrac{b^2}{a}\cdot\sqrt{\dfrac{a^2}{b}}$.

2111 Melyik szám a nagyobb?

a) $\dfrac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}$ vagy $2\cdot\sqrt{6}$; *b)* $3\cdot\sqrt{3}$ vagy $\dfrac{7}{\sqrt{12}-\sqrt{5}}$.

2112 Végezzük el a következő műveleteket:

a) $\dfrac{(\sqrt{7}+\sqrt{3})\cdot(20-2\cdot\sqrt{84})}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$; *b)* $\left(\dfrac{6}{\sqrt{5}+2}+\dfrac{2}{\sqrt{20}-4}\right)\cdot(10+7\cdot\sqrt{5})$.

2113 Számítsuk ki a következő kifejezések értékét, ha $x=\dfrac{1}{5}$:

a) $\dfrac{\sqrt{x}+2}{3+\sqrt{x}}+\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3}$; *b)* $\dfrac{3\cdot\sqrt{x}+1}{2\cdot\sqrt{x}-5}+\dfrac{3\cdot\sqrt{x}-1}{5+2\cdot\sqrt{x}}$.

2114 Bizonyítsuk be a következő egyenlőséget:

$$\frac{125+51\cdot\sqrt{6}}{5-\sqrt{6}}=\left(\frac{1}{5-2\cdot\sqrt{6}}\right)^2.$$

2115 Mely valós x értékek esetén igaz, hogy:

a) $\sqrt{4x^2-12x+9}=2x-3$; *b)* $\sqrt{4x^2-12x+9}=3-2x$.

2116 Egy derékszögű háromszög befogóinak hossza $\sqrt{2x+1}$ és $\sqrt{2x\cdot(2x+1)}$, ahol $x\in\mathbb{N}^+$.

a) Mekkorák a háromszög oldalai, ha $x=4$?

b) Mekkora a háromszög átfogója, ha $x=7$?

c) Bizonyítsuk be, hogy a háromszög átfogójának hossza mindig pozitív egész szám lesz.

2117 Közelítő értékek alkalmazása nélkül állapítsuk meg, hogy az A, illetve B szám közül melyik a nagyobb, ha:

a) $A = \dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ és $B = \dfrac{\sqrt{20}-\sqrt{8}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$; *b)* $A = \sqrt{50}-\sqrt{12}$ és $B = \dfrac{20-\sqrt{96}}{\sqrt{8}}$;

c) $A = \sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{3}}$ és $B = \sqrt{2+\sqrt{3}}$.

2118 Átalakításokkal mutassuk meg, hogy:

$$\sqrt{35+2\cdot\sqrt{34}}-\sqrt{35-2\cdot\sqrt{34}}=2.$$

2119 Számítsuk ki a kifejezések helyettesítési értékét a változók adott értéke esetén:

a) $\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{1}{b+1}$, ha $a=\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$ és $b=\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$;

b) $\dfrac{1+a}{1+\sqrt{1+a}}+\dfrac{1-a}{1-\sqrt{1-a}}$, ha $a=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

2120 A változók mely értékei esetén értelmezettek a következő kifejezések? Hozzuk egyszerűbb alakra a kifejezéseket.

a) $\dfrac{a^2\cdot b\cdot\sqrt{b}-\sqrt{a^2\cdot b^5}}{a\cdot(b-a)^2\cdot\sqrt{b^3}}$; *b)* $\dfrac{a-\sqrt{a}-2}{a-5\cdot\sqrt{a}+6}$;

c) $\dfrac{\dfrac{a\cdot\sqrt{a}+b\cdot\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}}{a-b}+\dfrac{2\cdot\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$; *d)* $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-a^2}}\cdot\left(\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x-a^2}}{\sqrt{x}+\sqrt{x-a^2}}-\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{x-a^2}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-a^2}}\right)$.

2121 Zsebszámológép használata nélkül végezzük el a következő gyökvonást:

$$\sqrt{1+2006\cdot\sqrt{1+2007\cdot\sqrt{1+2008\cdot\sqrt{1+2009\cdot 2011}}}}.$$

2122 Fejezzük ki a-val és b-vel az:

a) $f(x)=\sqrt{x-3}+\sqrt{x-7}$ kifejezést, ha $x=\dfrac{a^4+20a^2+16}{4a^2}$ és $0<a\le 2$;

b) $g(x)=\dfrac{b}{x}-\sqrt{1-\dfrac{a^2}{x^2}}$ kifejezést, ha $x=\dfrac{a^2+b^2}{2b}$ és $a>0$, $b>0$;

c) $h(x)=\dfrac{2\cdot\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}$ kifejezést, ha $x=\dfrac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{a}+\dfrac{1}{\sqrt{a}}\right)$ és $a>0$.

2123 Mely pozitív egész n értékekre teljesül:

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}=9.$$

2124 Hány olyan x valós szám van, amelyre a valós számok halmazán értelmezett alábbi függvény értéke egész szám?

$$f(x)=\sqrt{x^2+100}-\sqrt{x^2+1}.$$

Számok *n*-edik gyöke, a gyökvonás azonosságai

2125 Mennyi a következő gyökvonások eredménye?

a) $\sqrt[3]{27}$; *b)* $\sqrt[7]{-1}$; *c)* $\sqrt[5]{-32}$; *d)* $\sqrt[3]{-64}$;
e) $\sqrt[4]{81}$; *f)* $\sqrt[4]{625}$; *g)* $\sqrt[4]{10\,000}$; *h)* $\sqrt[3]{343}$;
i) $\sqrt[3]{-343}$; *j)* $\sqrt[6]{1\,000\,000}$; *k)* $\sqrt[3]{-1\,000\,000}$; *l)* $\sqrt[8]{256}$;
m) $\sqrt[4]{256}$; *n)* $\sqrt[10]{1024}$; *o)* $\sqrt[5]{-1024}$; *p)* $\sqrt[4]{4096}$;
q) $\sqrt[3]{-\frac{27}{64}}$; *r)* $\sqrt[5]{-\frac{32}{243}}$; *s)* $\sqrt[3]{-0{,}001}$; *t)* $\sqrt[6]{\frac{1}{64}}$;
u) $\sqrt[3]{0{,}027}$; *v)* $\sqrt[4]{\frac{625}{16}}$; *w)* $\sqrt[4]{\frac{16}{81}}$.

2126 Végezzük el a következő műveleteket:

a) $\sqrt[3]{x^3}$; *b)* $\sqrt[6]{a^6}$; *c)* $\sqrt[7]{b^7}$; *d)* $\sqrt[3]{(-x)^3}$;
e) $\sqrt[4]{(-x)^4}$; *f)* $\sqrt[3]{x^6}$; *g)* $\sqrt[3]{x^{21}}$; *h)* $\sqrt[5]{x^{15}}$;
i) $\sqrt[6]{x^{24}}$; *j)* $\sqrt[8]{a^{16}}$; *k)* $\sqrt[4]{x^{20}}$; *l)* $\sqrt[6]{x^{30}}$;
m) $\sqrt[3]{-64x^{15}}$; *n)* $\sqrt[9]{(3x)^{27}}$; *o)* $\sqrt[4]{\sqrt[25]{x^{100}}}$.

2127 Zsebszámológép használata nélkül végezzük el a következő műveleteket ($x, y, a, b > 0$):

a) $\sqrt[3]{45\cdot 75}$; *b)* $\sqrt[5]{972}\cdot\sqrt[5]{8}$; *c)* $\sqrt[4]{8\cdot 36}\cdot\sqrt[4]{36\cdot 2}$; *d)* $\sqrt[6]{5^4\cdot 3^3}\cdot\sqrt[6]{5^2\cdot 3^3}$;
e) $\sqrt[3]{\frac{ab}{3}}\cdot\sqrt[3]{\frac{24b^2}{a}}$; *f)* $\sqrt[5]{\frac{x^2y}{2}}\cdot\sqrt[5]{\frac{x^3y^4}{16}}$; *g)* $\sqrt[5]{64}:\sqrt[5]{2}$; *h)* $\sqrt[3]{\frac{8}{3}}:\sqrt[3]{\frac{9}{8}}$;
i) $\sqrt[3]{16x^4}:\sqrt[3]{2x}$; *j)* $\sqrt[4]{\frac{4x^7}{9y^3}}:\sqrt[4]{\frac{3x^2}{4y^7}}$.

2128 Zsebszámológép használata nélkül végezzük el a következő számításokat:

a) $\sqrt[3]{7+\sqrt{22}}\cdot\sqrt[3]{7-\sqrt{22}}$; *b)* $\sqrt[3]{9+\sqrt{17}}\cdot\sqrt[3]{9-\sqrt{17}}$;
c) $\sqrt[3]{\sqrt{131}-\sqrt{6}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{131}+\sqrt{6}}$; *d)* $\sqrt[3]{\sqrt{41}-7}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{41}+7}$;
e) $\sqrt[4]{6-\sqrt{20}}\cdot\sqrt[4]{6+\sqrt{20}}$; *f)* $\sqrt[4]{\sqrt{90}-3}\cdot\sqrt[4]{\sqrt{90}+3}$;
g) $\sqrt[5]{\sqrt{68}-10}\cdot\sqrt[5]{10+\sqrt{68}}$; *h)* $\sqrt[11]{9+4\cdot\sqrt{5}}\cdot\sqrt[11]{4\cdot\sqrt{5}-9}$.

2129 Döntsük el, hogy melyik szám a nagyobb:

a) $2\cdot\sqrt[3]{23}$ vagy $3\cdot\sqrt[3]{7}$; *b)* $3\cdot\sqrt[3]{5}$ vagy $2\cdot\sqrt[3]{17}$;
c) $3\cdot\sqrt[3]{51}$ vagy $5\cdot\sqrt[3]{11}$; *d)* $3\cdot\sqrt[4]{5}$ vagy $2\cdot\sqrt[4]{25}$;
e) $4\cdot\sqrt[4]{4}$ vagy $3\cdot\sqrt[4]{13}$; *f)* $3\cdot\sqrt[5]{13}$ vagy $2\cdot\sqrt[5]{99}$.

2130 Végezzük el a következő összevonásokat:

a) $\sqrt[3]{54}+\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{250}$; *b)* $\sqrt[3]{40}-\sqrt[3]{625}+\sqrt[3]{135}$;
c) $\sqrt[4]{1875}-\sqrt[4]{243}-\sqrt[4]{48}$; *d)* $\sqrt[4]{162}+\sqrt[4]{512}-\sqrt[4]{32}$;
e) $\sqrt[3]{27x^4}+\sqrt[3]{8x^4}-\sqrt[3]{x^4}$; *f)* $\sqrt[4]{16x^7}+\sqrt[4]{81x^7}-\sqrt[4]{x^7}$ $(x>0)$;
g) $\sqrt[5]{a^6}+\sqrt[5]{32a^6}+\sqrt[5]{243a^6}$; *h)* $\sqrt[3]{a^{10}}-\sqrt[3]{8a^{10}}+\sqrt[3]{64a^{10}}+\sqrt[3]{27a^{10}}$.

2131 Adjuk meg a valós számoknak azt a legbővebb részhalmazát, melyen a következő kifejezések értelmezhetők. Írjuk fel egyetlen gyökjellel a kifejezéseket.

a) $\sqrt[3]{7}\cdot\sqrt[4]{7}$; *b)* $\sqrt[3]{7\cdot\sqrt[4]{7}}$; *c)* $\sqrt[5]{3\cdot\sqrt{3}}$; *d)* $\sqrt{2\cdot\sqrt{2\cdot\sqrt{2}}}$;

e) $\sqrt{a\cdot\sqrt[3]{a^5}}$; *f)* $\sqrt[3]{b^2\cdot\sqrt[3]{b}}$; *g)* $\sqrt[7]{x^3\cdot\sqrt[5]{x}}$; *h)* $\sqrt{x\cdot\sqrt{x\cdot\sqrt[3]{x}}}$;

i) $\sqrt[5]{x^3\cdot\sqrt[3]{x\cdot\sqrt[5]{x^4}}}$; *j)* $\sqrt[3]{x^2}\cdot\sqrt{x^3}$; *k)* $\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[4]{x^3}}$; *l)* $\dfrac{\sqrt[5]{x^2}\cdot\sqrt{x^3}}{\sqrt[4]{x}}$;

m) $\dfrac{\sqrt[4]{x^3}\cdot\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[5]{x^2}\cdot\sqrt{x}}$.

2132 Gyöktelenítsük a következő törtek nevezőit:

a) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{5}}$; *b)* $\dfrac{6}{\sqrt[4]{3}}$; *c)* $\dfrac{15}{\sqrt[5]{5}}$; *d)* $\dfrac{15}{\sqrt[4]{3^3}}$; *e)* $\dfrac{25}{\sqrt[5]{5^2}}$; *f)* $\dfrac{12}{\sqrt[6]{2}}$;

g) $\dfrac{5a}{3\cdot\sqrt[3]{a}}$; *h)* $\dfrac{3a}{2\cdot\sqrt[3]{a^2}}$; *i)* $\dfrac{7}{6\cdot\sqrt[5]{a^3}}$.

2133 Írjuk fel kisebb kitevőjű gyök segítségével a következő kifejezéseket:

a) $\sqrt[9]{8}$; *b)* $\sqrt[10]{32}$; *c)* $\sqrt[6]{3^2}$; *d)* $\sqrt[10]{100000}$;

e) $\sqrt[6]{8x^6y^{27}z^9}$; *f)* $\sqrt[25]{a^{10}b^{15}c^{20}}$; *g)* $\sqrt[4]{4a^8b^{12}c^6}$.

2134 Rendezzük nagyság szerint növekvő sorrendbe a következő számokat:

$$\sqrt{2};\quad \sqrt[3]{3};\quad \sqrt[4]{4};\quad \sqrt[5]{5}.$$

2135 Döntsük el, hogy mely egyenlőségek igazak és melyek hamisak:

a) $\sqrt[3]{(-11)^3}=-11$; *b)* $\sqrt[4]{(-11)^4}=-11$; *c)* $\sqrt[5]{a^{15}}=a$; *d)* $\sqrt[3]{(-a)^{12}}=-a^4$.

2136 Mely valós számok esetén igaz a következő egyenlőség:

a) $\sqrt[3]{x^3-3x^2+3x-1}+\sqrt{x^2}+\sqrt{4-4x+x^2}=x+1$;

b) $\sqrt[3]{x^3-3x^2+3x-1}+\sqrt{x^2}+\sqrt{4-4x+x^2}=3x-3$;

c) $\sqrt[3]{x^3-3x^2+3x-1}+\sqrt{x^2}+\sqrt{4-4x+x^2}=1-x$.

2137 A változók mely értékei esetén vannak értelmezve a következő kifejezések? Hozzuk egyszerűbb alakra a kifejezéseket:

a) $\left(\dfrac{a\cdot\sqrt{a+x}}{\sqrt{a-x}}-\dfrac{x\cdot\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}}-\dfrac{2x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\right):\sqrt[4]{(a-x)\cdot(a^2-x^2)}$;

b) $\dfrac{x\cdot\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x^2}-1}+3\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-1}{x\cdot\sqrt[3]{x}-1}$; *c)* $\dfrac{a-x}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}-\left(\dfrac{a+\sqrt[4]{ax^3}}{\sqrt{a}+\sqrt[4]{ax}}-\sqrt[4]{ax}\right)$;

d) $\dfrac{\left(\dfrac{\sqrt[4]{bx^3}+\sqrt[4]{a^2bx}}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}+\sqrt[4]{bx}\right)^2+bx+3}{\sqrt{bx}+3}$.

2138 *a)* Mutassuk meg, hogy a $\sqrt[4]{17+12\cdot\sqrt{2}}-\sqrt[4]{17-12\cdot\sqrt{2}}$ egész szám.

b) Az a, b és c pozitív egész számokra igaz, hogy $a^2-c\cdot b^2=1$. Bizonyítsuk be, hogy ha a $\sqrt[4]{a+b\cdot\sqrt{c}}-\sqrt[4]{a-b\cdot\sqrt{c}}$ különbség értéke egész szám, akkor az a szám 16-tal osztva 1 maradékot ad.

A FELADATOK MEGOLDÁSAI

A kötet feladatainak megoldásai letölthetők pdf-ben a **www.mozaik.info.hu/matematika** oldalról. A letölthető állományok megegyeznek a feladatgyűjtemény korábbi kiadásaihoz mellékelt CD-n lévő tartalommal.

A megoldások megtekintéséhez az *Acrobat Reader* program használata szükséges. A program ingyenesen letölthető az internetről. (Pl. www.adobe.com).

MEGOLDÁSOK – 9. ÉVFOLYAM

Az összes 9. évfolyamos feladat megoldását az alábbi állomány tartalmazza:
_1001_1807_09_evfolyam.pdf

Az egyes fejezetek külön-külön (kisebb méretű) állományban is elérhetők (a feladatsorszámra és a fejezetre utaló elnevezéssel):

1001-1106_kombinatorika.pdf
1107-1193_algebra.pdf
1194-1282_fuggvenyek.pdf
1283-1474_haromszogek-negyszogek-sokszogek.pdf
1475-1570_egyenletek.pdf
1571-1759_egybevagosagi-transzformaciok.pdf
1760-1807_statisztika.pdf

MEGOLDÁSOK – 10. ÉVFOLYAM

Az összes 10. évfolyamos feladat megoldását az alábbi állomány tartalmazza:
_2001_2814_10_evfolyam.pdf

Az egyes fejezetek külön-külön (kisebb méretű) állományban is elérhetők (a feladatsorszámra és a fejezetre utaló elnevezéssel):

2001-2091_gondolkodas.pdf
2092-2148_gyokvonas.pdf
2149-2248_masodfoku.pdf
2249-2632_geometria.pdf
2633-2730_szogfuggvenyek.pdf
2731-2814_valoszinuseg-szamitas.pdf

EGY KONKRÉT FELADAT MEGOLDÁSÁNAK KERESÉSE

A pdf állományokban a **kereső funkciót** (Ctrl+f) használva az „*x+feladatsorszám*” begépelésével közvetlenül az adott sorszámú feladat megoldásához ugorhatunk (pl. az *x1567* szöveg keresésével az 1567-es feladat megoldásához).