

Árki Tamás
Konfárné Nagy Klára
Kovács István
Trembeczki Csaba
Urbán János

sokszínű
Matematika
FELADATGYŰJTEMÉNY
11-12

Letölthető megoldásokkal



ÉRETTSÉGI

*Gyakorló és
érettségire
felkészítő
feladatokkal*



Árki Tamás
Konfárné Nagy Klára
Kovács István
Trembeczki Csaba
Urbán János

s o k s z í n ű
Matematika
FELADATGYŰJTEMÉNY

**Gyakorló
és érettségire
felkészítő
feladatokkal**

11-12

Letölthető megoldásokkal

Tizedik kiadás

Mozaik Kiadó – Szeged, 2019

Tisztelt Olvasó!

A feladatgyűjtemény, amelyet a kezében tart, egyedülálló a középiskolai matematika feladatgyűjtemények között. A szokásos tematikus felépítésen túl ugyanis ebben a kötetben évfolyamonként, kisebb fejezetekre bontva találjuk a feladatokat.

A könyv felépítése pontosan követi a *Sokszínű matematika* tankönyvcsalád köteteinek szerkezetét, így akik ebből a tankönyvből tanulnak, közvetlenül alkalmazhatják az órai munka és az önálló gyakorlás, sőt az érettségi felkészülés során is.

Ugyanakkor – mivel a feladatgyűjtemény felépítése természetesen megfelel a tantárgy belső logikájának és az iskolákban általánosan alkalmazott kerettanterveknek – minden nehézség nélkül használhatják azok is, akik más tankönyvekből tanulják, illetve tanítják a matematikát.

A feladatok nagy száma és változatossága miatt a tanulók bőségesen találnak a maguk számára kitűzött szintnek megfelelő gyakorlási lehetőséget. Így a tankönyveket és a feladatgyűjteményt együtt használva kellő jártasságot szerezhetnek a feladatmegoldásban.

Az egyes fejezetek végén található *Vegyes feladatok* áttekintést adnak az adott fejezet anyagából, ezért jól segíthetik az átfogóbb számonkérés előtti felkészülést.

A feladatok nehézségének jelölése

Minden fejezetben három különböző szintre bontva találjuk a feladatokat:

3142 Gyakorló feladatok: olyan feladatok, amelyek – akár a tanórákon, akár házi feladatként – elősegítik a megtanult ismeretek elmélyítését. *(narancssárga színű feladatsorszám)*

3476 Középszintű feladatok: az adott témakörben más témákhoz is kapcsolódó problémák, melyek megoldása elősegíti a tantárgy komplex ismeretanyagának ismétlését, a matematikai kompetenciák elsajátítása mellett azok alkalmazását. *(kék színű feladatsorszám)*

3852 Emelt szintű feladatok: az emelt szintű érettségire való felkészülést segítő problémák, melyek nemcsak megoldásuk nehézségében különböznek az előzőektől, hanem felvillantják a matematika szépségét is. *(bordó színű feladatsorszám)*

A feladatok sorszámozása

A feladatgyűjtemények feladatainak sorszámozása a tankönyvcsalád egyes köteteire utal.

A 9. évfolyam feladatai az 1001-es, a 10. évfolyam feladatai a 2001-es, a 11. évfolyamé a 3001-es, a 12. évfolyamé pedig a 4001-es sorszámtól kezdődnek. A 12.-es kötetben a négy év anyagát áttekintő rendszerező összefoglalás feladatai az 5001-es sorszámtól indulnak, ezáltal segíti a feladatok közötti válogatást az érettségire történő felkészüléskor.

Megoldások

A feladatok megoldásai letölthetők a www.mozaik.info.hu/matematika oldalról. *(Részletes információ a könyv 287. oldalán olvasható.)*

A gyakorló feladatok esetén csak a végeredményt közöljük, más esetekben pedig annyira részletezzük a megoldásokat, amennyire azt pedagógiai szempontból szükségesnek tartottuk.

A kitűzött feladatok megoldásához jó munkát és jó tanulást kívánunk!

A szerzők



TARTALOMJEGYZÉK



Bevezető	5
A feladatgyűjteményben használt matematikai jelölések	10

A 11. évfolyam feladatai

11.1. *Kombinatorika, gráfok* (3001–3160)

Fibonacci-számok	12
Permutációk, variációk	12
Ismétlés nélküli kombinációk, Pascal-háromszög	14
Binomiális együtthatók, ismétléses kombináció	16
Vegyes összeszámlálási feladatok (kiegészítő anyag)	18
GRÁFOK – pontok, élek, fokszám	19
GRÁFOK – út, vonal, séta, kör, Euler-vonal (kiegészítő anyag)	22
Fagráfok (kiegészítő anyag)	24
A kombinatorika gyakorlati alkalmazásai	25
Vegyes feladatok	26



11.2. *Hatvány, gyök, logaritmus* (3161–3241)

Hatványozás és gyökvonás (emlékeztető)	29
Hatványfüggvények és gyökfüggvények	30
Törtkitevőjű hatvány	31
Irracionális kitevőjű hatvány, exponenciális függvény	32
Exponenciális egyenletek, egyenletrendszerek, egyenlőtlenségek	33
A logaritmus fogalma	37
A logaritmusfüggvény	38
A logaritmus azonosságai	40
Logaritmikus egyenletek, egyenletrendszerek, egyenlőtlenségek	41
Vegyes feladatok	44



11.3. *A trigonometria alkalmazásai* (3242–3459)

Vektorműveletek rendszerezése, alkalmazások (emlékeztető)	47
A skaláris szorzat	48
Skaláris szorzat a koordináta-rendszerben	50
A szinusztétel	52
A koszinusztétel	54
Trigonometrikus összefüggések alkalmazásai	55
Összegzési képletek	57



Az összegzési képletek alkalmazásai	58
Trigonometrikus egyenletek, egyenletrendszerek	60
Trigonometrikus egyenlőtlenségek	63
Vegyes feladatok	64

11.4. Függvények (3460–3554)

Az exponenciális és logaritmusfüggvény	67
Egyenletek és függvények	69
Trigonometrikus függvények	70
Trigonometrikus egyenletek, egyenlőtlenségek (kiegészítő anyag)	72
Vegyes feladatok	74
Inverz függvények (kiegészítő anyag)	77



11.5. Koordináta-geometria (3555–3776)

Vektorok a koordináta-rendszerben. Műveletek koordinátaikkal adott vektorokkal (emlékeztető)	78
Két pont távolsága. Két vektor hajlásszöge. Területszámítási alkalmazások	80
Szakasz osztópontjának koordinátái. A háromszög súlypontjának koordinátái	82
Az egyenest meghatározó adatok a koordináta-rendszerben	85
Az egyenes egyenletei	88
Két egyenes metszéspontja, távolsága, hajlásszöge	92
A kör egyenlete	94
A kör és az egyenes kölcsönös helyzete; két kör közös pontjai	97
A parabola	99
Vegyes feladatok	100



11.6. Valószínűség-számítás, statisztika (3777–3892)

Klasszikus valószínűségi modell	104
Visszatevése mintavétel	109
Mintavétel visszatevés nélkül (kiegészítő anyag)	111
Valószínűségi játékok gráfokon (kiegészítő anyag)	112
Valóság és statisztika	114
Vegyes feladatok	115





A 12. évfolyam feladatai

12.1. Logika, bizonyítási módszerek (4001–4067)

Logikai feladatok, kijelentések	118
Logikai műveletek – negáció, konjunkció, diszjunkció	121
Logikai műveletek – implikáció, ekvivalencia	123
Teljes indukció (emelt szintű tananyag)	125
Vegyes feladatok	126

12.2. Számsorozatok (4068–4165)

A sorozat fogalma, példák sorozatokra	128
Példák rekurzív sorozatokra	129
Számtani sorozatok	129
Mértani sorozatok	132
Kamatszámítás, törlesztőrészek kiszámítása	133
Vegyes feladatok	134

12.3. Téreometria (4166–4511)

Térelemek	137
Testek osztályozása, szabályos testek	141
A terület fogalma, a sokszögek területe	145
A kör és részeinek területe	149
A térfogat fogalma, a hasáb és a henger térfogata	152
A gúla és a kúp térfogata	157
A csonka gúla és a csonka kúp	160
A gömb térfogata és felszíne	163
Egymásba írt testek (kiegészítő anyag)	165
Vegyes feladatok I.	167
Vegyes feladatok II.	169

12.4. Valószínűség-számítás, statisztika (4512–4577)

Geometriai valószínűség	172
Várható érték (emelt szintű tananyag)	174
Statisztika	175
Vegyes feladatok	179





Készüljünk az érettségire!

12.5. Rendszerező összefoglalás (5001–5620)

Gondolkodási módszerek (5001–5113)

Halmazok	182
Kijelentések, események	185
Kombinatorika	186
Valószínűség-számítás	190



Algebra és számelmélet (5114–5277)

Számok és műveletek	196
Számelmélet, oszthatóság	197
Hatvány, gyök, logaritmus	200
Műveletek racionális kifejezésekkel	204
Egyenletek, egyenlőtlenségek	206
Egyenletrendszerek	214



Függvények (5278–5402)

A függvény fogalma, grafikonja, egyszerű tulajdonságai	217
Műveletek függvényekkel (kiegészítő anyag)	226
Függvénytulajdonságok	227

Geometria (5403–5620)

Alapvető fogalmak	235
Geometriai transzformációk	237
Vektorok. Szögfüggvények	243
Nevezetes síkidomok tulajdonságai	247
Koordináta-geometria	253



12.6. Érettségi gyakorló feladatsorok

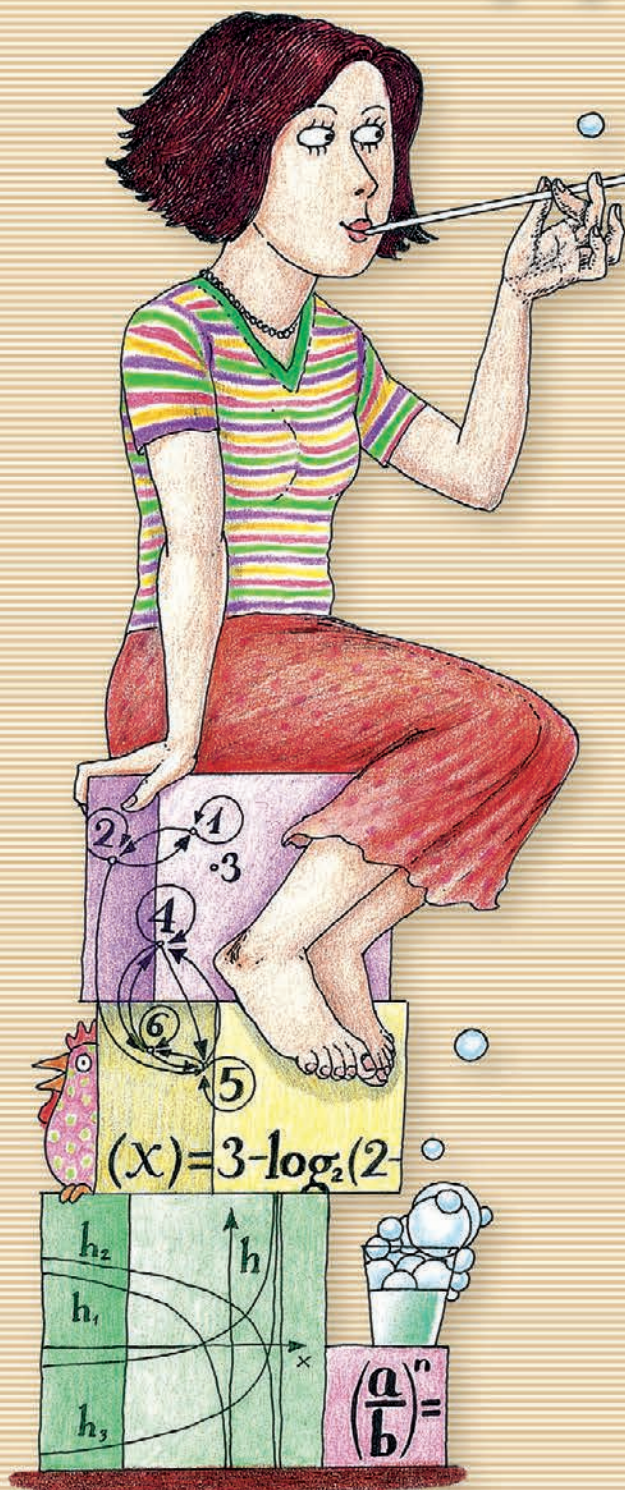
Középszintű feladatsorok	258
Emelt szintű feladatsorok	279



A feladatgyűjteményben használt matematikai jelölések

Jelölés	Magyarázat
$\mathbb{N}$	a természetes számok halmaza
$\mathbb{Z}$	az egész számok halmaza
$\mathbb{Z}^+; \mathbb{Z}^-$	a pozitív egész számok halmaza; a negatív egész számok halmaza
$\mathbb{Q}; \mathbb{Q}^*$	a racionális számok halmaza; az irracionális számok halmaza
$\mathbb{Q}^+; \mathbb{Q}^-$	a pozitív racionális számok halmaza; a negatív racionális számok halmaza
$\mathbb{R}$	a valós számok halmaza
$\mathbb{R}^+; \mathbb{R}^-$	a pozitív valós számok halmaza; a negatív valós számok halmaza
$a \in A; b \notin A$	a eleme az A halmaznak; b nem eleme az A halmaznak
$A \subseteq B$	A halmaz részhalmaza B halmaznak
$C \subset D$	C halmaz valódi részhalmaza D halmaznak
$E \not\subset F$	E halmaz nem részhalmaza F halmaznak
$A \cup B; C \cap D; E \setminus F$	A és B halmaz uniója; C és D halmaz metszete; E és F halmaz különbsége
$\emptyset, \{\}$	üres halmaz
$\bar{A}$	az A halmaz komplementere
$ A $	az A halmaz elemszáma
$A \Rightarrow B; C \Leftrightarrow D$	ha A , akkor B ; C akkor és csak akkor, ha D
$[a; b]$	a, b zárt intervallum
$[a; b[$	a, b balról zárt, jobbról nyitott intervallum
$]a; b]$	a, b balról nyitott, jobbról zárt intervallum
$]a; b[$	a, b nyitott intervallum
$n!$	n faktoriális: $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$
$f: x \mapsto$	az f függvény hozzárendelési szabálya
$f(x_0)$	az f függvény helyettesítési értéke az x_0 helyen
$ x $	az x szám abszolút értéke
$[x]$	az x szám egészrésze
$\{x\}$	az x szám törtrésze
$\sqrt{x}$	az x szám négyzetgyöke
$\sqrt[n]{x}$	az x szám n -edik gyöke
$a b$	az a szám osztója a b számnak
(a, b)	az a és b szám legnagyobb közös osztója
$[a, b]$	az a és b szám legkisebb közös többszöröse
$\overrightarrow{AB}$	az A pontból B pontba mutató vektor
$\vec{a}, \vec{0}$	a vektor, nullvektor
$\nless$	szög

11. évfolyam



**Kombinatorika,
gráfok** 12

**Hatvány, gyök
logaritmus** 29

**A trigonometria
alkalmazásai** 47

Függvények 67

**Koordináta-
geometria** 78

**Valószínűség-
számítás, 104
statisztika**

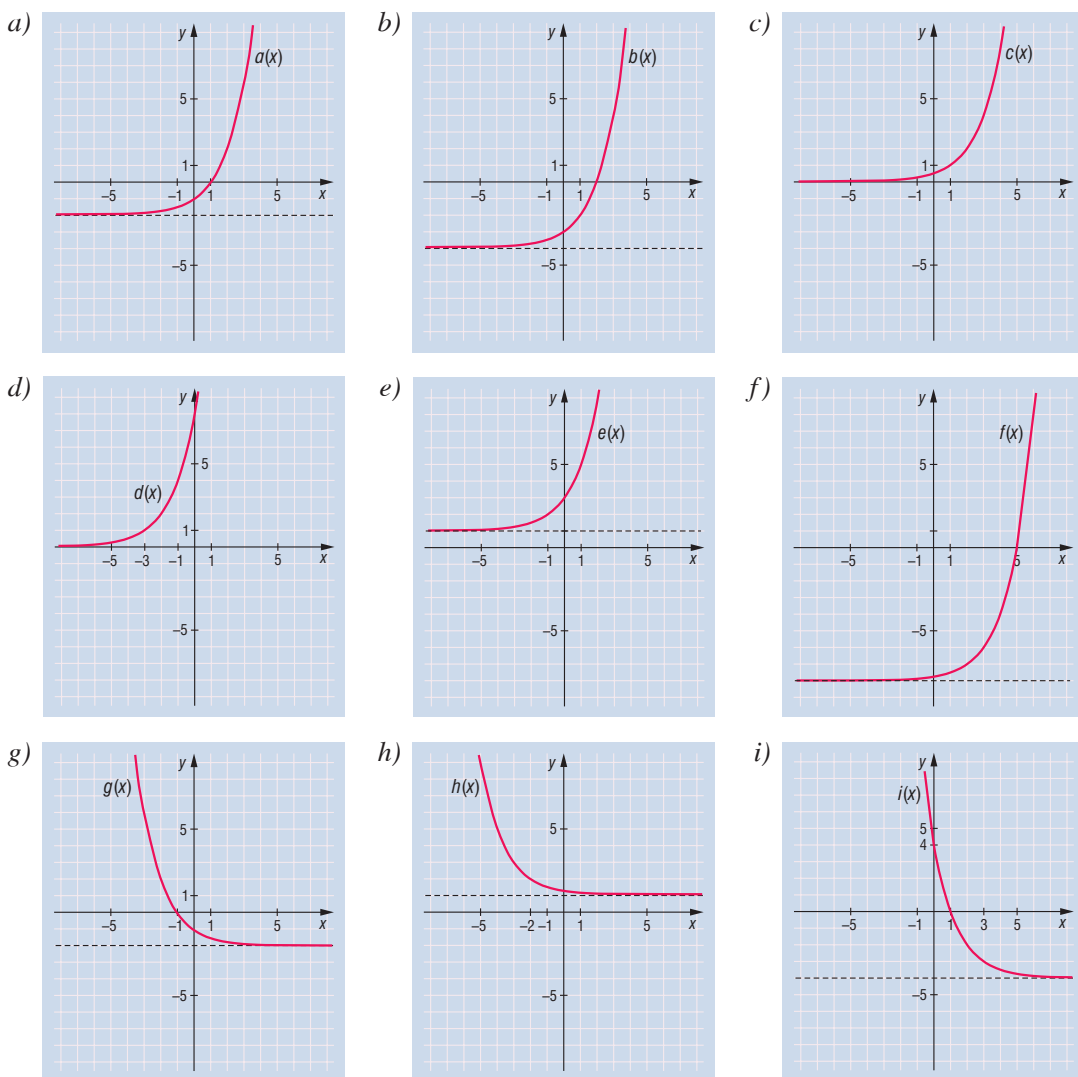


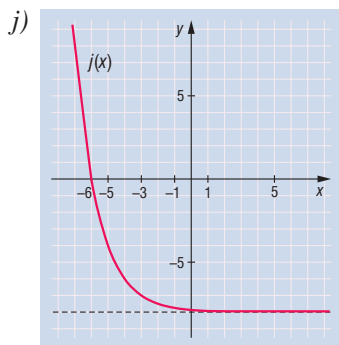
Irracionális kitevőjű hatvány, exponenciális függvény

3175 A következő függvények értelmezési tartománya a valós számok halmaza. Ábrázoljuk és jellemezzük (értékkészlet, növekedés, csökkenés, zérushely) a függvényeket.

$a) a(x) = 2^x - 8;$ $b) b(x) = 2^x + 3;$ $c) c(x) = 3^x - 1;$ $d) d(x) = 3^x + 2;$
 $e) e(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 1;$ $f) f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x - 3;$ $g) g(x) = 2^{x-4};$ $h) h(x) = 3^{x-2};$
 $i) i(x) = 2^{x-3} - 2;$ $j) j(x) = 3^{x+1} + 1;$ $k) k(x) = 4^{x-1} - 1;$ $l) l(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^{x-2} - 1;$
 $m) m(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^{x+3} - 5;$ $n) n(x) = 3 \cdot 2^{x-1} - 3;$ $o) o(x) = \frac{3}{2} \cdot 3^{x-1} + 1;$ $p) p(x) = \frac{2^{x-1}}{4} - 3.$

3176 A következő ábrákon az $f(x) = 2^x$ függvényből kapott grafikonokat látunk. A grafikonok alapján adjuk meg az exponenciális függvények hozzárendelési szabályát.





- 3177** Az autóverseny pályákon óránként mérik az aszfalt hőmérsékletét. Egy nyári napon azt tapasztalták, hogy 0 órától délután 3 óráig az aszfalt hőmérséklete jó közelítéssel megadható a

$$t(x) = 22 \cdot 10^{\frac{x}{34}},$$

függvénnyel, ahol x a 0 órától eltelt időt jelenti órában mérve, a hőmérsékletet pedig °C-ban kapjuk.

- Mennyi volt az aszfalt hőmérséklete 0 órákor, illetve reggel 6 órákor?
- Délután háromkor elérte-e az aszfalt hőmérséklete a kritikus 60 °C-ot?
- Hány százalékkal nőtt az aszfalt hőmérséklete reggel 8 és déli 12 óra között?

- 3178** Ábrázoljuk a következő, valós számok halmazán értelmezett függvényeket:

- $f(x) = \operatorname{sgn}(3^x - 3)$;
- $g(x) = \operatorname{sgn}[(5^{x+1} - 1) \cdot (5^x - 25)]$;
- $h(x) = |2^{x-1} - 4|$;
- $i(x) = |2 \cdot 3^{x+1} - 18|$.

- 3179** Oldjuk meg grafikusán a következő egyenleteket:

- $2^{x+4} + 11 = 15 \cdot (x + 3)$;
- $2^{x+2} = -4x^2 + 3x + 9$.

Exponenciális egyenletek, egyenletrendszerek, egyenlőtlenségek

- 3180** Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

- $2^{4x-3} = 4$;
- $3^{3-2x} = 27$;
- $4^{4x-1} = \frac{1}{16}$;
- $5^{8x-7} = \frac{1}{125}$;
- $2^{x-3} \cdot 2^x = 16$;
- $3^x \cdot 3^{2x-1} = 9$;
- $5^{2x+3} \cdot 25 = 5^{3x-4}$;
- $49^x \cdot 7^{x-3} = 7^{4x-5}$;
- $\frac{2^{3x+5}}{2^x} = \frac{1}{8}$;
- $\frac{3^{x-2}}{3^{2x+3}} = \frac{1}{81}$;
- $\frac{11^{4x-1}}{121^{x+1}} = 11^{x-3}$;
- $\frac{125^{x+2}}{25^{x+1}} = 5^{3x-6}$;
- $\sqrt{2^{x+5}} = 4^2$;
- $\sqrt[3]{3^{x-1}} = \frac{1}{9}$;
- $\sqrt[4]{4^{2x-1}} = 64$;
- $\sqrt[6]{5^{5x+2}} = 25^{\frac{1}{4}}$;
- $13^{2x-7} = 1$;
- $7^{2x+5} - 1 = 0$;
- $10^x \cdot 100^{2x-3} - 1 = 0$;
- $121^{x-5} \cdot 11^{4-x} - 1 = 0$;
- $7^x = 12^x$.



3181 Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

$$\begin{array}{lll} a) 7^{2x-1} = 9^{4x-2}; & b) \left(\frac{1}{16}\right)^{4-2|x-3|} = 256; & c) 0,5^{x^2+2x-35} = 1; \\ d) 16^{|x|-2} = 4; & e) \left(\frac{5}{3}\right)^{3x+7} = \left(\frac{9}{25}\right)^{x-3}; & f) 100^x = 0,000001; \\ g) 49^x = -7; & h) \left(\frac{1}{0,3}\right)^{4+3x} = \left(\frac{100}{9}\right)^x; & i) 7^{2-4x} = \frac{1}{49^{7+6x}}. \end{array}$$

3182 Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

$$\begin{array}{ll} a) 125 \cdot 5^{3x} = 27 \cdot 27^x; & b) 3 \cdot 16^x = 2 \cdot 9^{2x}; \\ c) 9 \cdot 2^x \cdot 5^x = 100 \cdot 3^x; & d) 8^{x+1} + 4 \cdot 5^{3x+2} = 125^{x+1} + 2^{3x+2}; \\ e) 2^{2x+4} = 7 \cdot 4^x + 7 \cdot 3^x + 3^{x+2}; & f) 3^{2x+3} - 5 \cdot 2^{4x} = 11 \cdot 9^x + 4^{2x+1}. \end{array}$$

3183 Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

$$\begin{array}{ll} a) 2^{x+3} + 2^{x+1} = 10; & b) 5^{x+4} - 5^{x+2} = 24; \\ c) 2 \cdot 3^{x-1} + 3^{x+3} = 83; & d) 3^x - 3^{x-1} - 7 \cdot 3^{x-3} = 33; \\ e) 3 \cdot 2^{x+2} - 5 \cdot 2^x - 3 \cdot 2^{x-2} = 50; & f) 10^{x+1} - 4 \cdot 10^x - 3 \cdot 10^{x-1} = 570; \\ g) 5^x - 2 \cdot 5^{x-1} - 4 \cdot 5^{x-2} + 3 \cdot 5^{x-3} = 58; & \\ h) 5 \cdot 2^{x+1} - 3 \cdot 2^x - 7 \cdot 2^{x-1} + 3 \cdot 2^{x-3} - 9 \cdot 2^{x-2} = 26. \end{array}$$

3184 Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

$$\begin{array}{ll} a) 4^x - 3 \cdot 2^x + 2 = 0; & b) 9^x - 12 \cdot 3^x + 27 = 0; \\ c) 25^x - 30 \cdot 5^x + 125 = 0; & d) 2 \cdot 4^x - 17 \cdot 2^x + 8 = 0; \\ e) 9^{x+1} - 28 \cdot 3^x + 3 = 0; & f) 16^{x+1} - 65 \cdot 4^x + 4 = 0; \\ g) 3 \cdot 4^x - 94 \cdot 2^x - 64 = 0; & h) 9^{x+\frac{1}{2}} + 26 \cdot 3^x - 9 = 0; \\ i) 10^x + \frac{200}{10^x} = 30; & j) 0,2^x = \frac{24}{5} + 5^x; \\ k) 10^x + 10^{-x} = 2; & l) 9^{x+\frac{1}{2}} + 9 \cdot 3^{x-1} = \frac{4}{3}. \end{array}$$

3185 Oldjuk meg a valós számpárok halmazán a következő egyenletrendszereket:

$$\begin{array}{ll} a) \begin{cases} 2^x + 3^y = 7 \\ 5 \cdot 2^x - 3 \cdot 3^y = 11 \end{cases}; & b) \begin{cases} 7^x + 5 \cdot 2^y = 41 \\ 5 \cdot 7^x + 3 \cdot 2^y = 29 \end{cases}; \\ c) \begin{cases} 3 \cdot 4^x + 4 \cdot 3^y = 42 \\ 11 \cdot 4^x - 3^y = 13 \end{cases}; & d) \begin{cases} 2^{x+2} + 3^{y-1} = 17 \\ 3 \cdot 2^x + 4 \cdot 3^y = 24 \end{cases}; \\ e) \begin{cases} 10^{x-2} + 7^{y+1} = 8 \\ 10^x - 2 \cdot 7^{y+2} = 2 \end{cases}; & f) \begin{cases} 5^{x+2} - 5 \cdot 6^{y-1} = 120 \\ 100 \cdot 5^{x-2} + 12 \cdot 6^{y-2} = 22 \end{cases}; \\ g) \begin{cases} 7^{2x+y-1} = 49 \\ 2^{x+y+8} = 64 \end{cases}; & h) \begin{cases} 9 = 3^{x+2y} \\ 5^{4x-y} = 125 \cdot \sqrt{5} \end{cases}; \\ i) \begin{cases} 15^{3x+1} = 15^{2y+3} \\ 8^{x-y} = 2^{x-7} \end{cases}; & j) \begin{cases} 9^{x+y-5} = 3^{4-2x} \\ 16^{2x-y+1} = 8^{y+7} \end{cases}. \end{array}$$



3186 Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenségeket:

a) $3^{4x-5} < 27^x$;

b) $16^{x-1} \geq \frac{1}{4}$;

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{5x+3} \leq \frac{1}{64}$;

d) $\left(\frac{2}{3}\right)^{3x+4} > \frac{8}{27}$;

e) $5^{x-1} \cdot 25^{x+3} > \frac{1}{125}$;

f) $\sqrt[4]{7^{3x+1}} \leq \sqrt[3]{49}$;

g) $\sqrt{32^{x-1}} > \sqrt[5]{16^x}$;

h) $4^{x-1} \cdot 8^{x+3} \leq \left(\frac{1}{8}\right)^{x+3} \cdot 128^{x+2}$;

i) $\frac{81^{x+\frac{1}{4}}}{9^{x-1}} > 27^{2x-3} \cdot 3^{x+2}$;

j) $\left(\frac{1}{16}\right)^{x-1} \cdot \sqrt[4]{8^x} \cdot \sqrt[3]{4^x} < \sqrt{\frac{1}{32^x}} \cdot \sqrt[3]{16^{x+1}}$.

3187 Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

a) $2^{4x-1} \cdot 2^{x+2} = 4^{3x-1} \cdot 2^{x-3}$;

b) $9^{2-x} \cdot 3^{x+3} = \frac{27^{x-1}}{3^{x+2}}$;

c) $\frac{5^{4x-3}}{125^{x+1}} = 25^{x-4} \cdot 5^{2x-1}$;

d) $\frac{\left(\frac{1}{8}\right)^{x-1}}{16^{x+3}} = \frac{32^{x-1}}{2^{x-3}}$;

e) $\sqrt[3]{2^{x+1}} \cdot \sqrt[3]{2^{4x-4}} = \sqrt[3]{4^{x-3}} \cdot \frac{1}{8}$;

f) $\frac{\sqrt[4]{27^{x+5}}}{\sqrt{3^{x-2}}} = \sqrt[4]{9^{x+3}} \cdot \sqrt{3^{2x-1}}$;

g) $\sqrt{7^{x-1}} \cdot \sqrt[3]{7^{x-2}} \cdot \sqrt[4]{7^{x-3}} = \sqrt[4]{7}$;

h) $\sqrt{32^x} \cdot 16^{\frac{1}{5}-x} \cdot \sqrt[3]{4^{x-1}} = \frac{\sqrt{8^{x+1}}}{\sqrt[3]{16^{x-1}}} \cdot \sqrt[10]{8}$;

i) $2^{x+2} + 2^{1-x} = 9$;

j) $3^{4-x} + 3^{x+2} - 730 = 0$;

k) $2 \cdot 5^{x^2+1} \cdot 2^{x^2} = 0,01^x$;

l) $\left(\frac{3}{5}\right)^{3+x} : \frac{5^3}{27} = \left(\frac{25}{9}\right)^{x-4}$;

m) $\left(\frac{5}{12}\right)^{2x} \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^{2x-1} = 0,3^{-1}$;

n) $2 \cdot 64^{\frac{1}{2}x+1} + 3 \cdot 8^{x+1} - 15 \cdot 2^{3x-1} = 72,25$;

o) $\frac{1}{3} \cdot 3^{x+1} - 3^{x-2} + \frac{1}{9} \cdot 3^{x+3} = 35$;

p) $\left(\frac{8}{27}\right)^x \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{x+2} = \frac{64}{729}$.

3188 Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

a) $23^{x^2-9x+14} = 1$;

b) $19^{x^2-2x-14} = 19$;

c) $11^{|x|-1} = 121$;

d) $5^{|2x-5|} = 125$;

e) $4^{|x|-1} = 2^{|x|+3}$;

f) $2^{\sqrt{x}-5} = 8$;

g) $10^{\sqrt{4x-4}} = 100$;

h) $4^{\sqrt{x}-1} \cdot 8^{\sqrt{x}+2} = 16^{\sqrt{x}} \cdot 32$;

i) $12^{\cos x} = \frac{1}{12}$;

j) $100^{\sin x} = 0,1$;

k) $4^{(2^x)} = 16^{16}$;

l) $64 \cdot \sqrt[4]{2^{2x-6}} = \frac{1}{16}$;



$$m) \frac{1}{243} \cdot \sqrt{27^{x+3}} = 81$$

$$n) 7^x \cdot \sqrt[4]{4^{4x^2-16}} - \frac{7^x}{16} = 0;$$

$$o) \left(\frac{13}{8}\right)^x - 13^x \cdot (\sqrt[3]{2})^{3x^2-12} = 0;$$

$$p) \frac{1}{100^3} \cdot (100^{3-x})^2 = 25^{x^2} \cdot 4^{x^2}.$$

3189 Oldjuk meg a valós számpárok halmazán a következő egyenletrendszereket:

$$a) \begin{cases} 5 \cdot 3^{x+2} - 7 \cdot 2^{y-1} = 17 \\ 4 \cdot 3^{x+1} + 5 \cdot 2^{y-3} = 17 \end{cases};$$

$$b) \begin{cases} 9^{x-1} \cdot 3^y = \frac{1}{\sqrt[3]{9}} \\ 5^{x+3y-1} = \sqrt{5} \end{cases};$$

$$c) \begin{cases} (25^x)^y = 125 \\ 4^{x \cdot y} \cdot 2^x = 2 \cdot 8^{\frac{1}{y}} \end{cases};$$

$$d) \begin{cases} 8^{x \cdot y} = 4 \\ 3^{2x-y} = \sqrt[3]{5} \end{cases};$$

$$e) \begin{cases} 5 \cdot 6^x + 8 \cdot 5^y = 13 \\ \frac{5}{6^x} + \frac{8}{5^y} = 13 \end{cases};$$

$$f) \begin{cases} (1) & y + x = 1 \\ (2) & y^{x^2-7y-1} - 1 = 0 \end{cases};$$

3190 Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenségeket:

$$a) 7^{\frac{x+3}{x+2}} > 49;$$

$$b) 4^{\frac{2x-1}{3x+2}} \geq \frac{1}{8};$$

$$c) 3^{\frac{2x+3}{4x-1}} < \sqrt{3};$$

$$d) 2^{x^2-2x} > 256;$$

$$e) \frac{3^{x^2}}{3^{15}} < \left(\frac{1}{9}\right)^x;$$

$$f) 2^{x^2} \cdot 8 \geq \left(\frac{1}{64}\right)^{x+1};$$

$$g) 25^{|x|} \leq 25 \cdot 5^x;$$

$$h) 13^{|x-3|} > \sqrt{13^x};$$

$$i) 2^x + 2^{1-x} \geq 3;$$

$$j) 25 + 25^{x+\frac{1}{2}} \leq 126 \cdot 5^x;$$

$$k) 0,0625 < \left[(0,5)^x\right]^2 \quad (x \neq 0);$$

$$l) \left(\frac{1}{16}\right)^{2|x|-1} > \frac{1}{256}.$$

3191 Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

$$a) \left[5 \cdot (5^{\sqrt{x}+3})^{\frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}}\right]^{\frac{2}{\sqrt{x}-1}} = 25;$$

$$b) 1 - 6y - y^2 = 5^{-x} + 5^{x+2};$$

$$c) 4^{\lg^2 x} + 2^{\frac{1}{\cos^2 x}} - 80 = 0.$$

3192 Milyen p valós paraméter értékek esetén van két különböző valós megoldása az alábbi egyenletnek:

$$9^x + 2 \cdot (p-3) \cdot 3^x + p^2 - 4 = 0.$$

3193 Mely $(x; y)$ számpárok elégítik ki a következő egyenletrendszert:

$$\begin{cases} 64^x + 64^y = 12 \\ 2^{x+y} = \sqrt[6]{32} \end{cases};$$

3194 Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenségeket:

$$a) 4^{-x} - 3^{-x-\frac{1}{2}} > 3^{\frac{1}{2}-x} - 2^{-2x-1};$$

$$b) \left(\frac{1}{4}\right)^{3x} - \left(\frac{1}{8}\right)^{x-1} - 128 \leq 0.$$



11.4. FÜGGVÉNYEK

Az exponenciális és logaritmusfüggvény

3460 Van-e közös pontja a következő függvényeknek?

a) $a(x) = \log_2(x-1)$, $b(x) = \log_2 x - 1$; b) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$, $g(x) = 2^x - 2$.

3461 Vázoljuk az alábbi függvények grafikonját. Határozzuk meg az értelmezési tartományukat, érték-készletüket és tengelymetszeteiket.

a) $f(x) = \log_4(x+2)$; b) $g(x) = 3^x - 3$;
c) $h(x) = 2^{x+3} - 2$.

3462 Tekintsük a következő függvényt:

$$f: x \mapsto \log_3(x-2) + 3 \quad (x > 2).$$

Határozzuk meg az $f(11) + f(3)$ értékét.

3463 Fejezzük ki az $f(x) = 2^x$ függvény esetén az $f(a+1) - f(a-1)$ helyettesítési értékét, ha $a \in \mathbb{R}$.

3464 Toljuk el az $f(x) = \log_2 x$, $(x > 0)$ függvényt a $(-3; -2)$ vektorral.

- a) Írjuk fel az így kapott függvény hozzárendelési szabályát.
b) Hogyan változik ekkor az értelmezési tartomány, értékkészlet, zérushely?

3465 Ábrázoljuk a következő függvényeket:

a) $x \mapsto 2^{x+2}$, $x \in \mathbb{R}$; b) $x \mapsto 3^{x-1}$, $x \in \mathbb{R}$;
c) $x \mapsto 9^{\frac{x}{2}}$, $x \in \mathbb{R}$; d) $x \mapsto 4^{\frac{x-2}{2}}$, $x \in \mathbb{R}$;
e) $x \mapsto 2^{-x+2}$, $x \in \mathbb{R}$; f) $x \mapsto \log_2 2x$, $x \in \mathbb{R}^+$;
g) $x \mapsto \log_2(x-4)$, $x \in \mathbb{R}$, $x > 4$; h) $x \mapsto \log_2 4 \cdot |x-1|$, $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 1$.

3466 Ábrázoljuk a következő függvényeket:

a) $] -1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \log_2(x-1)$; b) $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 2^{1-x}$;
c) $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = 2^{|x-2|}$; d) $\mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$, $k(x) = \log_2 |x-2|$.

3467 Átalakítások után ábrázoljuk a következő függvényeket:

a) $x \mapsto (\sqrt[3]{3})^{3-3x}$; b) $x \mapsto \frac{2}{2^x}$;
c) $x \mapsto \frac{-3}{2^{-x}}$; d) $\sqrt{2^{2x-2}} - 2$;
e) $x \mapsto \frac{4}{4^{x-1}}$; f) $x \mapsto 3^{|2-x|}$;
g) $x \mapsto 2^{1-x} + \frac{3}{2^x}$; h) $x \mapsto \frac{1}{4} \cdot 2^{x+6} + 3$;
i) $x \mapsto 16^{\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}}$; j) $x \mapsto 1,5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-x}$.

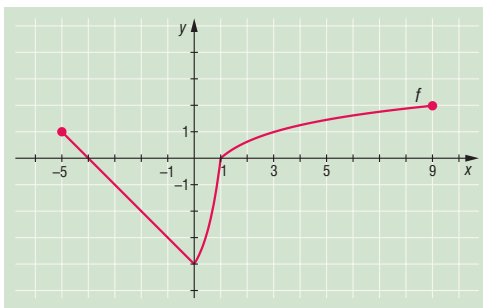


3468 Az alábbi ábrán $[-5; 9]$ -on értelmezett f függvény egy egyenes, egy exponenciális és egy logaritmusfüggvény íveiből tevődik össze, balról jobbra haladva az ábrán.

a) Adjuk meg az f függvényt az alábbi módon:

$$f: [-5; 9] \mapsto \mathbb{R};$$

$$f(x) = \begin{cases} \dots, & \text{ha } -5 \leq x < 0, \\ \dots, & \text{ha } 0 \leq x < 1, \\ \dots, & \text{ha } 1 \leq x \leq 9. \end{cases}$$



b) Határozzuk meg a függvény értékkészletét.

c) Határozzuk meg, hol negatív a függvény.

d) Milyen x -re teljesül az $f(x) \leq 1$ egyenlőtlenség?

e) Hol veszi fel a függvény a 0 értéket?

3469 A megfelelő azonosságok alkalmazásával alakítsuk át a függvényt értelmező kifejezést, majd ábrázoljuk a függvényt:

a) $x \mapsto 2^{\frac{x^2-4}{x-2}}, x \in \mathbb{R}, x \neq 2;$

b) $x \mapsto 1 - 3^{-x}, x \in \mathbb{R};$

c) $x \mapsto \frac{1}{4^{-\frac{x}{2}}}, x \in \mathbb{R};$

d) $x \mapsto \log_2 4x^2, x \in \mathbb{R}, x \neq 0;$

e) $x \mapsto \log_{0,5} 2x, x \in \mathbb{R}, x > 0;$

f) $x \mapsto \log_{0,5}(x-2)^2, x \in \mathbb{R}, x \neq 2.$

3470 Ábrázoljuk és jellemezzük a következő függvényeket:

a) $x \mapsto \log_2(x^2 - 2x + 1), x \in \mathbb{R}, x \neq 1;$

b) $x \mapsto \log_{\frac{1}{2}}|1-x|, x \in \mathbb{R}, x \neq 1;$

c) $x \mapsto 2^{x+|x|}, x \in \mathbb{R};$

d) $x \mapsto \frac{2^x + 2^{-x}}{2}, x \in \mathbb{R}.$

3471 Ábrázoljuk és jellemezzük a következő függvényeket:

a) $x \mapsto \lg \operatorname{tg} x + \lg \operatorname{ctg} x, 0 < x < \frac{\pi}{2};$

b) $f(x) = \begin{cases} 1 - \sqrt{1-x^2}, & \text{ha } |x| \leq 1, \\ 1 + \log_{\frac{1}{2}}|x|, & \text{ha } |x| > 1; \end{cases}$

c) $g(x) = \left| \log_{\frac{1}{4}} \left| \frac{x}{4} \right| \right|, x \in \mathbb{R}, x \neq 0;$

d) $h(x) = \begin{cases} \sqrt{|x|}, & \text{ha } x \leq 1, \\ \log_2 x + 1, & \text{ha } x > 1; \end{cases}$

e) $k(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1}, & \text{ha } x \geq 0, \\ 4^{-2x}, & \text{ha } x < 0; \end{cases}$

f) $l(x) = \begin{cases} \log_2(x+2), & \text{ha } -2 < x \leq 2, \\ 2^{x-1}, & \text{ha } 2 < x; \end{cases}$

g) $m(x) = \begin{cases} 3^{-x+1}, & \text{ha } x \leq 1, \\ 2x - x^2, & \text{ha } x > 1. \end{cases}$

3472 Ábrázoljuk és jellemezzük a következő függvényeket, majd rajzoljuk meg vázlatosan a grafikonjukat:

a) $x \mapsto \log_2 \sin x, 0 < x < \pi;$

b) $x \mapsto \log_2 \frac{x-1}{x+1}, x > 1;$

c) $x \mapsto \log_2(x^2 - 4), |x| > 2.$

12. évfolyam



**Logika,
bizonyítási
módszerek**

118

Számsorozatok

128

Térgeometria

137

**Valószínűség-
számítás,
statisztika**

172



12.2. SZÁMSOROZATOK

A sorozat fogalma, példák sorozatokra

4068 Számítsuk ki a következő sorozatok ötödik és huszadik elemét:

$$\begin{array}{lll} a) a_n = 2n - 12; & b) b_n = 100 - 5n; & c) c_n = 2n^2 - 30n; \\ d) d_n = n^3 - 15n + 3; & e) e_n = \sqrt{3n+4}; & f) f_n = \sqrt{4n+1} - n; \\ g) g_n = \frac{3n-15}{2n+1}; & h) h_n = \frac{n^2-3}{n-3}. \end{array}$$

4069 Folytassuk az alábbi sorozatokat, adjuk meg a sorozat általános tagját:

$$\begin{array}{lll} a) 5; 6; 7; 8; 9; \dots & b) -3; -1; 1; 3; 5; \dots & c) -1; -2; -4; -8; -16; \dots \\ d) 1; -1; 1; -1; 1; \dots & e) 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \dots & f) \sqrt{7}; \sqrt[3]{7}; \sqrt[4]{7}; \sqrt[5]{7}; \sqrt[6]{7}; \dots \\ g) 0; 1; \log_2 3; 2; \log_2 5; \dots & h) 1; 2; 3; 1; 2; \dots \end{array}$$

4070 Ábrázoljuk derékszögű koordináta-rendszerben és számegyenesen a következő sorozatok első hat tagját:

$$\begin{array}{lll} a) a_n = \frac{3n}{5}; & b) b_n = 2 - (-1)^n; & c) c_n = \frac{2n+3}{n+2}; \\ d) d_n = \frac{5-3n}{n+1}; & e) e_n = 3 - \frac{2}{n}; & f) f_n = 2 \cdot (-1)^{n+3}. \end{array}$$

4071 Határozzuk meg a következő sorozatok első hat tagját:

$$\begin{array}{lll} a) a_n = \frac{64}{4^n}; & b) b_n = 2010 - 4n; & c) c_n = \sqrt{4n-1}. \end{array}$$

4072 Határozzuk meg az $a_n = 3 - 2 \cdot (-1)^n$ sorozat 2010. tagját és az első 2010 tag összegét.

4073 Döntsük el, hogy melyik szám a nagyobb az alábbi esetekben:

$$\begin{array}{l} a) \text{ az } a_n = 9 + 3 \cdot (-1)^n \text{ sorozat 50. tagja vagy a } b_n = \sqrt{n} + 7 \text{ sorozat 25. tagja;} \\ b) \text{ az } a_n = \frac{5 \cdot n}{n+3} \text{ sorozat 12. tagja vagy a } b_n = (-1)^{n+6} + 5 \text{ sorozat 99. tagja;} \\ c) \text{ az } a_n = 1 \text{ sorozat 60. tagja vagy a } \frac{8}{7} \text{ tizedes tört alakjában a tizedes vessző utáni 67. jegy;} \\ d) \text{ az } a_n = \cos \frac{7 \cdot n \cdot \pi}{3} \text{ sorozat 43. tagja vagy a } b_n = \frac{7n-7}{12n+88} \text{ sorozat 101. tagja;} \\ e) \text{ Az } a_n = \lg(13n-1) \text{ sorozat 77. tagja vagy a } b_n = \sqrt[n+3]{146n+2} \text{ sorozat 7. tagja?} \end{array}$$

4074 Hányadik tagja az alábbi sorozatoknak a 30?

$$\begin{array}{lll} a) a_n = 8n - 18; & b) b_n = \frac{10n+20}{3n-26}; & c) c_n = |47 - 7n|; \\ d) d_n = n^2 - 11n + 18; & e) e_n = \log_2 n; & f) f_n = 60 \cdot \sin \frac{n \cdot \pi}{6}. \end{array}$$



Példák rekurzív sorozatokra

4075 Egy számsorozat első eleme 5. Számítsuk ki a sorozat első öt tagját, ha a második tagtól kezdve igaz, hogy

a) $a_n = 2 \cdot a_{n-1} - 6$; b) $a_n = -3 \cdot a_{n-1} + 21$; c) $a_n = \frac{2}{3} \cdot a_{n-1} - 1$; d) $a_n = \frac{a_{n-1}}{n}$.

4076 Hányféleképpen juthatunk fel egy 10 lépcsőből álló lépcsősoron, ha egyszerre egyet, kettőt vagy három lépcsőfokot lépünk?

4077 Egy sorozat tagjaira a harmadiktól kezdve teljesül, hogy $a_n = 2 \cdot a_{n-1} - a_{n-2}$. Mennyi a sorozat 2010. eleme és az első 2010 elem összege, ha $a_1 = a_2 = 1$?

4078 Egy sorozat elemeire a harmadiktól kezdve teljesül, hogy $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$. Mennyi a sorozat 2009. eleme és az első 2009 tag összege, ha $a_1 = a_2 = 1$?

4079 Az a_n sorozatban $a_1 = p$, $a_2 = q$, adott pozitív számok, a sorozat tagjaira igaz, hogy:

$$a_{n+2} = \frac{a_{n+1} + 1}{a_n}.$$

Adjuk meg a sorozat 2014. tagját p és q segítségével.

4080 Egy sorozat elemei pozitív egész számok, a harmadiktól kezdve mindegyik elem az összes öt megelőző elem összege. A sorozat első eleme 1.

a) Lehet-e eleme a sorozatnak a 2010?

b) Mekkora lehet a sorozat második eleme, ha a sorozat n -edik eleme 1000, és n a lehető legnagyobb?

Számtani sorozatok

4081 Egy számtani sorozat első tagja -7 , differenciája 3. Adjuk meg a sorozat következő tagjait:

a) a_{11} ; b) a_{56} ; c) a_{237} ; d) a_{2010} .

4082 Egy számtani sorozat huszadik tagja 41, differenciája 5. Mennyi a sorozat

a) 21-edik; b) 30-adik; c) 1956-odik tagja?

4083 Egy számtani sorozat első tagja 1, differenciája $\frac{2}{3}$. Hányadik tagja a sorozatnak az

a) 1849; b) 2011; c) 3000?

4084 Egy számtani sorozat negyvenedik tagja 25-tel kevesebb, mint a tizenötödik tag. Mennyi a sorozat differenciája?

4085 Kvarc Laci 12 éve gyűjti az értékes ásványokat. Az első évben 17 darabot gyűjtött, majd a következő évek során minden évben 9-cel többet, mint az előző évben.

a) Hány darab ásványt gyűjtött Laci a 12. évben?

b) Mennyi ásványt gyűjtött a 12 év alatt összesen?





4086 A Menő Manók Társasága hétnapos gyalogtúrát szervezett. A túra első napján 23 km-t gyalogoltak, minden további napon pedig 5 km-rel többet, mint az előző napon.

a) Hány kilométer tettek meg a hatodik napon?

b) Hány kilométer volt a túra teljes hossza?

4087 Frédi részt vett a kőemelő-bajnokságon. Az első edzésen egy 7 kg-os követ emelt fel. Az edzések során napról napra 5 kg-mal sikerül emelnie a felemelt legnagyobb kő tömegét. Az edzések 30 napig tartottak.

A kőemelő-bajnokságon minden versenyző ötször próbálkozhat, az nyer, aki a legnehezebb követ felemeli.

Frédi első kísérletére 10 kg-mal kevesebbet emelt, mint a versenyt megelőző utolsó edzésen, de minden további emeléskor 4 kg-mal tudott többet emelni, mint az előző emeléskor. A versenyt Frédi világcsúccsal nyerte. Mekkora tömegű kő felemelése jelentette a világcsúcsot?

4088 Egy számtani sorozat harmadik tagja 13, hetedik tagja pedig 25.

a) Mennyi a sorozat első eleme és különbsége?

b) Mennyi a sorozat első negyven elemének összege?

4089 Egy számtani sorozat hatodik tagja 30, tizenegyedik tagja 10.

a) Számítsuk ki a sorozat első tagját és differenciáját.

b) Mennyi a sorozat első 50 tagjának összege?

4090 Van-e olyan számtani sorozat, amelynek első három eleme:

$$3 \cdot \sqrt{5} + 1; \quad \frac{11 \cdot \sqrt{5} - 1}{2}; \quad 8 \cdot \sqrt{5} - 2?$$

4091 Az a_n számtani sorozat esetén ismert a következő tagok összege:

$$a_3 + a_8 = 34 \quad \text{és} \quad a_2 + a_{11} = 46.$$

a) Mennyi a sorozat első eleme és differenciája?

b) Tagja-e a sorozatnak a 2012?

4092 Egy számtani sorozat első és negyedik tagjának összege 38, a hetedik és harmadik tag különbsége 16.

a) Mennyi a 40. és 17. tag különbsége?

b) Mennyi a sorozat 23. tagja?

c) Mennyi a sorozat első 60 tagjának összege?

4093 Egy számtani sorozat tagjaira teljesül, hogy $a_5 \cdot a_{10} = -25$ és $a_2 + a_8 = 10$. Adjuk meg a sorozat első tagját és differenciáját.

4094 Egy számtani sorozat első három tagjának összege -9 , a harmadik, negyedik és ötödik tag összege pedig 39. Melyik ez a sorozat?

4095 Egy számtani sorozat első nyolc tagjának összege 14, a hatodik, hetedik, nyolcadik és kilencedik tag összege pedig 1. Határozzuk meg a sorozatot.

4096 Egy számtani sorozat első négy tagjának összege harmada a következő négy tag összegének. Határozzuk meg az első tíz tag és a következő tíz tag arányát.

4097 Egy számtani sorozat ötödik tagja 10. Az első öt tag összege ötöde a következő öt tag összegének. Mennyi a sorozat differenciája?



- 4098** a) A Long Street páratlan oldalán egytől 2011-ig vannak számozva a házak. Egy napon a postás az utca páratlan oldalán végighaladva először a 3-as számú, majd minden negyedik házhoz kézbesített levelet.

Hány házhoz hozott levelet ezen a napon a postás az utca páratlan oldalán?

- b) A Long Street páros oldalán kettőtől 2010-ig vannak számozva a házak. Egy napon a postás az utca páros oldalán végighaladva először a 6-os számú, majd minden ötödik házhoz kézbesített levelet.

Hány házhoz hozott levelet ezen a napon a postás az utca páros oldalán?



- 4099** Az a_n számtani sorozatból ismert tagok: $a_1 = 18$ és $a_k = 99$. Mennyi a k értéke, ha az első k tag összege 1638?

- 4100** A 17-től kezdve a pozitív egész számok sorában összeadtunk minden tizedik számot. Hány darab számot adtunk össze, ha a kapott összeg 1472?

- 4101** Egy számtani sorozat differenciája 3. Az első n elem összege 5010, az első $n + 10$ elem összege pedig 6895. Mennyi a sorozat első tagjának és az n -nek az értéke?

- 4102** Egy diáknak 385 oldalas kötelező olvasmányt kell elolvasnia. Az első napon 22 oldalt olvas és úgy dönt, hogy minden nap 5 oldallal többet olvas el, mint az előző napon.

a) Hány nap alatt tudja befejezni a kötelező olvasmány elolvasását?

b) Hány oldal marad az utolsó napra?

- 4103** Egy nyomdában 30 papírlap közül néhányat 10 részre vágtak, majd az így kapott részek közül néhányat ismét 10 részre vágtak szét és így tovább. Egy ilyen munkaszakasz után valaki azt mondta: „Most 2010 papírdarabunk van.” Jól számolt-e az illető?

- 4104** Egy számtani sorozat első eleme 13, a sorozatra jellemző különbség pedig 17. Hány olyan tagja van a sorozatnak, amely ötjegyű szám?

- 4105** Egy derékszögű háromszög oldalainak mérőszáma egy számtani sorozat három szomszédos eleme. Mekkora a háromszög szögei?

- 4106** Egy háromszög oldalhosszai egy számtani sorozat szomszédos elemei. A háromszög kerülete 120 cm. A legrövidebb és leghosszabb oldal szorzata 1431 cm^2 . Adjuk meg a háromszög területét egy tizedesjegyre kerekítve.

- 4107** Egy konvex sokszög belső szögeinek mérőszámai egy számtani sorozat egymást követő elemei. Hány oldalú a sokszög, ha a legkisebb szög $142^\circ 30'$, a legnagyobb szög pedig $172^\circ 30'$?

- 4108** Az első 201 természetes szám összegében akárhánynak az előjelét megváltoztatjuk. El lehet-e érni, hogy a kapott összeg 2010 legyen?

- 4109** Adjunk meg különböző pozitív egész számokból álló számtani sorozatot, amelynek elemei között nincs négyzetszám.

- 4110** Egy számtani sorozat első három eleméről a következőket tudjuk: az első tag kétjegyű szám, a második tag az első jegyeinek felcserélésével jön létre, a harmadik pedig az elsőből úgy kapható, hogy a jegyei közé egy 0-t írunk. Határozzuk meg a számokat.



- 4111** Az a_n számtani sorozatról tudjuk, hogy $a_k = m$ és $a_m = k$ ($k \neq m$). Adjuk meg az a_n sorozatot k , m és n függvényeként.
- 4112** Az a_n számtani sorozat differenciája d . Első 5 elemének összege legyen b_1 , a következő öt elem összege b_2 , a következő öt elem összege b_3 , és így tovább. Igazoljuk, hogy b_n számtani sorozat. Adjuk meg a_1 -gyel és d -vel a b_n sorozat első tagját és differenciáját.

Mértani sorozatok

- 4113** Egy mértani sorozat első tagja -2 , hányadosa $q = -\frac{3}{8}$. Számítsuk ki a sorozat első hat tagját.
- 4114** Egy mértani sorozat negyedik tagja 5 , hányadosa -3 . Mennyi a sorozat első, hatodik, illetve kilencedik tagja?
- 4115** Egy mértani sorozat első tagja 20 , a negyedik tag $-2,5$. Mennyi a sorozat hányadosa? Adjuk meg a tizedik elemet és az első 10 tag összegét.
- 4116** Egy mértani sorozat első tagja -3 , az ötödik tag -48 . Adjuk meg a sorozat hányadosát, számítsuk ki a nyolcadik elemét, és az első nyolc tag összegét.
- 4117** Egy mértani sorozat hatodik eleme 28 , a nyolcadik eleme pedig 7 . Mennyi a sorozat első tagja? Számítsuk ki az első hat tag összegét.
- 4118** Egy mértani sorozat ötödik és nyolcadik tagja is 23 . Mennyi az első kilenc tag összege?
- 4119** Egy mértani sorozat hetedik tagja 17 , a tizedik tagja pedig -17 . Mennyi az első 100 tag összege?
- 4120** Az 1 , a 8 és a 22 számokhoz ugyanazt a valós számot adva egy mértani sorozat három szomszédos elemét kapjuk. Mennyi a mértani sorozat hányadosa?
- 4121** Egy lián hossza minden nap az előző napi hosszánál 25% -kal több. Az első napon 1 méteres volt. Hányadik napon éri el a 15 méteres hosszúságot?
- 4122** Egy mértani sorozat első eleme 3 , a hányadosa 5 . Hány ötjegyű tagja van a sorozatnak?
- 4123** Egy mértani sorozat harmadik és negyedik tagjának összege 80 , az ötödik és harmadik tag különbsége 240 . Melyik ez a sorozat?
- 4124** Egy-egy mértani sorozat tagjaira teljesülnek a következő összefüggések. Számítsuk ki az egyes sorozatok első tagját és hányadosát.
- $$a) \left. \begin{aligned} a_1 + a_2 &= 15 \\ a_3 + a_4 &= 60 \end{aligned} \right\}; \quad b) \left. \begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 &= 56 \\ a_2 &= 16 \end{aligned} \right\}; \quad c) \left. \begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 &= 57 \\ a_1 - a_3 &= 15 \end{aligned} \right\}; \quad d) \left. \begin{aligned} a_1 + a_2 &= 160 \\ a_6 + a_7 &= 1215 \end{aligned} \right\}.$$
- 4125** Egy mértani sorozat első négy tagjának összege 468 , az ötödik, hatodik, hetedik és nyolcadik tag összege $292\,500$. Melyik ez a sorozat?
- 4126** Igaz-e, hogy a következő számok egy mértani sorozat egymást követő tagjai:
- $$\frac{7 + 4 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1}; \quad \frac{\sqrt{3} + 2}{2 - \sqrt{3}}; \quad 5 + 3 \cdot \sqrt{3}?$$
- 4127** Egy számtani sorozat negyedik tagja 10 . A sorozat második, harmadik és hatodik eleme egy mértani sorozat három szomszédos tagja. Mennyi a számtani sorozat első tagja, a sorozatra jellemző differencia és a mértani sorozat hányadosa?



FÜGGVÉNYEK – ÖSSZEFOGLALÁS

A függvény fogalma, grafikonja, egyszerű tulajdonságai

5278 Rajzoljuk meg a következő lineáris függvények grafikonjait:

- a) $x \mapsto 2x - 3$; b) $x \mapsto -\frac{3}{2}x + 5$; c) $x \mapsto -\frac{1}{2}x$; d) $x \mapsto 7$;
e) $x \mapsto \frac{6 - 2x}{2}$; f) $x \mapsto -5 - x$.

5279 Válasszuk ki az előző feladat lineáris függvényei közül

- a) az egyenes arányosság; b) konstans;
c) egymással párhuzamos; d) nulladfokú
függvényeket.

5280 Írjuk fel annak a lineáris függvénynek a hozzárendelési szabályát, melynek képe illeszkedik az adott két pontra:

- a) $A(3; 1)$ és $B(-1; 3)$; b) $A(0; -2)$ és $B(2; 1)$;
c) $A(-5; 3)$ és $B(7; 3)$; d) $A(0; 0)$ és $B(1; -3)$.

Melyik függvény

- e) konstans; f) egyenes arányosság;
g) növekvő; h) szigorúan monoton csökkenő?

5281 Adjuk meg az f lineáris függvény hozzárendelési szabályát, ha

- a) $m = 5$ és illeszkedik a $P(1; 7)$ pontra; b) $m = -\frac{3}{4}$ és illeszkedik a $P(2; 0)$ pontra;
c) $m = -0,25$ és illeszkedik a $P(8; 2)$ pontra; d) $m = 0$ és illeszkedik a $P(7; 5)$ pontra.

5282 Ábrázoljuk a $[-3; 6]$ -on a következő lineáris függvényeket, és jellemezzük értékészlet, zérushely és monotonitás szerint.

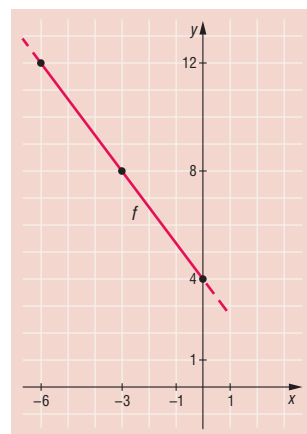
- a) $x \mapsto \frac{1}{3}x + 3$; b) $x \mapsto 1 - x$; c) $x \mapsto -3$; d) $x \mapsto \frac{2}{3}x$.

5283 Az alábbi ábrán egy f lineáris függvény grafikonjának részlete látható.

- a) Írjuk fel a függvény hozzárendelési szabályát.
b) Határozzuk meg a következő értéket:

$$\frac{f(-3) + f(-6)}{f(6)}.$$

- c) Számoljuk ki a függvény zérushelyét.





5284 Ábrázoljuk a következő függvényt:

$$f(x) = \frac{4x-6}{3}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Határozzuk meg a függvény tengelymetszeteit.

5285 Tekintsük az alábbi függvényeket:

$$f(x) = 2x - 3 \quad \text{és} \quad g(x) = -\frac{1}{2}x + 2.$$

A következő pontok közül melyek illeszkednek f , valamint g függvény grafikonjára?

$A(3; 3)$, $B(4; 0)$, $C(6; -1)$, $D(2; 1)$, $E(0; -3)$, $F(-2; 3)$.

5286 Ábrázoljuk a következő függvényeket a $]-4; 5[$ -on:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2}, \quad g(x) = \frac{x^2 - 16}{x - 4} \quad \text{és} \quad h(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x - 2}.$$

Adjuk meg az egyes függvényeknél, hol pozitívak az adott intervallumon.

5287 Határozzuk meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen az alábbi kifejezések értelmezhetők:

a) $\frac{2x^2 - 9x + 4}{x - 4}$; b) $2x - 1$.

Ábrázoljuk az ezen a halmazon értelmezett

c) $x \mapsto \frac{2x^2 - 9x + 4}{x - 4}$; d) $x \mapsto 2x - 1$

függvényt a $[-1; 5[$ -on. Állapítsuk meg a függvények értékkészletét.

5288 Rajzoljuk meg a következő függvények grafikonjait:

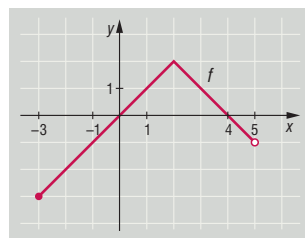
$$f(x) = \begin{cases} 2x - 3, & \text{ha } x \geq 2, \\ -\frac{1}{2}x + 2, & \text{ha } x < 2, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x + 2, & \text{ha } x \leq 0, \\ x, & \text{ha } x > 0. \end{cases}$$

5289 Ábrázoljuk a következő függvényeket a valós számok halmazán:

a) $x \mapsto -|x|$; b) $x \mapsto |x - 3| + 2$; c) $x \mapsto |2x - 1|$;
d) $x \mapsto -2|x - 1| + 3$; e) $x \mapsto 3 - |x + 3|$; f) $x \mapsto |-3x|$.

5290 Az alábbi ábrán egy f abszolútérték-függvény grafikonja látható a $[-3; 5[$ -on ábrázolva.

- Adjuk meg a függvény hozzárendelési szabályát az adott intervallumon.
- Hol vesz fel a függvény negatív értékeket?
- Határozzuk meg, mely részeken növekszik a függvény.
- Hány zérushelye van a függvénynek az adott intervallumon? Adjuk meg ezek helyét is.





5291 Ábrázoljuk függvénytranszformáció segítségével az alábbi függvényeket ($x \in \mathbb{R}$):

- a) $x \mapsto -2x^2 + 1$; b) $x \mapsto -(x-2)^2 + 3$; c) $x \mapsto x^2 - 4x + 4$;
d) $x \mapsto x^2 + 4x + 6$.

5292 Rajzoljuk meg a következő függvény grafikonját a $[-2; 3]$ -on:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{ha } x \geq 0, \\ -2x^2, & \text{ha } x < 0. \end{cases}$$

Jellemezzük a függvényt értékkészlet, zérushely, monotonitás szempontok szerint.

5293 Ábrázoljuk a következő függvényeket:

$$f(x) = (x-4)^2 - 2 \quad \text{és} \quad g(x) = -(x+5)^2.$$

- a) Állapítsuk meg, hol veszik fel a függvények a -1 értéket.
b) Határozzuk meg, hogy az adott pontok közül melyek illeszkednek az f és melyek a g függvényre:
 $A(2; 2)$, $B(-3; -4)$, $C(1; 7)$, $D(6; 2)$, $E(-6; -1)$, $F(-1; -1)$.

5294 Ábrázoljuk függvénytranszformációval az alábbi hozzárendelési szabállyal megadott függvényeket:

- a) $x \mapsto \sqrt{x} - 3$; b) $x \mapsto \sqrt{x+4} - 2$; c) $x \mapsto -2 \cdot \sqrt{x}$;
d) $x \mapsto \sqrt{-x} - 4$; e) $x \mapsto \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3-x}$; f) $x \mapsto \sqrt{4 \cdot (x-1)}$.

5295 Ábrázoljuk a következő függvényeket:

- a) $f(x) = 2 \cdot \sqrt{x-3} - 2$; b) $g(x) = x \mapsto \sqrt{4-x} - 2$.

Adjuk meg azokat az x értékeket, melyekre $f(x) \geq 2$, illetve $g(x) < 0$.

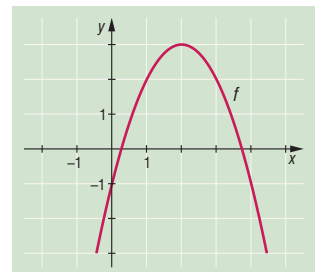
5296 Az alábbi függvények közül válasszuk ki, melyek a fordított arányosság hozzárendelési szabályai. Ábrázoljuk őket.

- a) $f(x) = \frac{3}{x}$; b) $g(x) = \frac{5-2x}{2}$; c) $h(x) = \frac{-1}{x-2} + 2$;
d) $i(x) = \frac{x^2-9}{x+3}$ ($x \neq -3$); e) $j(x) = \frac{2x-4}{3x-6}$ ($x \neq 2$).

Milyen függvények hozzárendelési szabályát látjuk még? Nevezzük meg őket.

5297 Válasszuk ki, melyik hozzárendelési szabály tartozik a grafikonhoz. Adjuk meg a függvény szélsőértékét.

- a) (1) $x \mapsto x^2 + 3$;
(2) $x \mapsto -(x+2)^2 + 3$;
(3) $x \mapsto (x-2)^2 - 3$;
(4) $x \mapsto -(x-2)^2 + 3$.



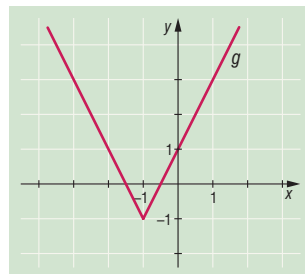


b) (1) $x \mapsto \frac{1}{2}|x-1|-1$;

(2) $x \mapsto 2|x-1|-1$;

(3) $x \mapsto 2|x-1|+1$;

(4) $x \mapsto 2|x+1|-1$.

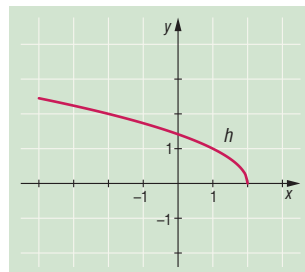


c) (1) $x \mapsto \sqrt{x}+2$;

(2) $x \mapsto -\sqrt{x}+2$;

(3) $x \mapsto \sqrt{2-x}$;

(4) $x \mapsto \sqrt{x}+2$.



5298 Adjunk meg 3 olyan értékpárt, amely eleget tesz a hozzárendelésnek:

a) $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}, x \mapsto -\frac{2}{3}x$;

b) $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, x \mapsto \frac{3x}{x-1} \quad (x \neq 1)$;

c) $h: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}, x \mapsto \frac{5}{7}x+1$;

d) $i: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}, x \mapsto \sqrt{x-3} \quad (x \geq 3)$.

5299 Adjuk meg a következő függvények grafikonjairól kijelölt pontok hiányzó koordinátáit, és rajzoljuk meg a grafikonokat.

a) $f(x) = \frac{2}{3}x - \frac{4}{5}, A\left(\frac{1}{5}; \square\right), B\left(-\frac{6}{5}; \square\right), C(\square; 0)$;

b) $g(x) = (x-2)^2 - \frac{7}{4}, A\left(\square; \frac{1}{2}\right), B\left(\square; \frac{9}{4}\right), C(-1; \square)$;

c) $h(x) = |3-2x|+1, A\left(-\frac{1}{2}; \square\right), B(\square; 5), C(\square; 1)$;

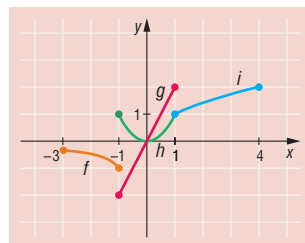
d) $i(x) = -2 \cdot \sqrt{2x-5}, A\left(\frac{1}{2}; \square\right), B(7; \square), C(\square; -4)$.

5300 A következő függvényeket ábrázoltuk az ábrán:

a) $x \mapsto 2x, x \in [-1; 1]$; b) $x \mapsto \sqrt{x}, x \in [1; 4]$;

c) $x \mapsto x^2, x \in [-1; 1]$; d) $x \mapsto \frac{1}{x}, x \in [-3; 1]$.

Az ábrán ezeket így neveztük el: f, g, h, i . Állapítsuk meg, melyik név melyik függvényhez tartozik.





FELADATOK MEGOLDÁSAI

A kötet feladatainak megoldásai letölthetők pdf-ben a **www.mozaik.info.hu/matematika** oldalról. A letölthető állományok megegyeznek a feladatgyűjtemény korábbi kiadásaihoz mellékelt CD-n lévő tartalommal.

A megoldások megtekintéséhez az *Acrobat Reader* program használata szükséges. A program ingyenesen letölthető az internetről. (Pl. www.adobe.com).



MEGOLDÁSOK – 11. ÉVFOLYAM

Az összes 11. évfolyamos feladat megoldását az alábbi állomány tartalmazza:

3001_3892_11_evfolym.pdf

Az egyes fejezetek külön-külön (kisebb méretű) állományban is elérhetők (a feladatsorszáma és a fejezetre utaló elnevezéssel):

3001-3160_kombinatorika-grafok.pdf

3161-3241_hatvany-gyok-logaritmus.pdf

3242-3459_trigonometria.pdf

3460-3554_fuggvenyek.pdf

3555-3776_koordinata-geometria.pdf

3777-3892_valoszinuseg-szamitas-statisztika.pdf

MEGOLDÁSOK – 12. ÉVFOLYAM

Az összes 12. évfolyamos feladat és a rendszerező összefoglalás megoldásait az alábbi állomány tartalmazza:

4001_5620_12_evfolym.pdf

Az egyes fejezetek külön-külön (kisebb méretű) állományban is elérhetők (a feladatsorszáma és a fejezetre utaló elnevezéssel):

4001-4067_logika-bizonyitasi-modszerek.pdf

4068-4165_szamsorozatok.pdf

4166-4511_tergeometria.pdf

4512-4577_valoszinuseg-szamitas-statisztika.pdf

5001-5620_rendszerezo-osszefoglalas.pdf

_kozepszintu-feladatsorok.pdf

_emelt-szintu-feladatsorok.pdf

EGY KONKRÉT FELADAT MEGOLDÁSÁNAK KERESÉSE

A pdf állományokban a **kereső funkciót** (Ctrl+f) használva az „*x*+feladatsorszám” begépelésével közvetlenül az adott sorszámu feladat megoldásához ugorhatunk (pl. az *x*4318 szöveg keresésével a 4318-as feladat megoldásához).