Kovács István
Trembeczki Csaba

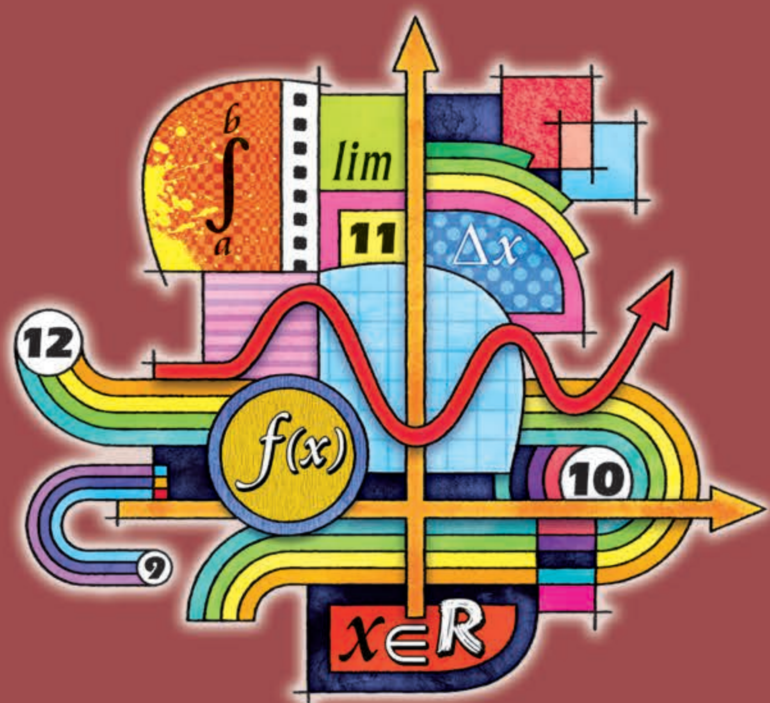
sokszínű

Matematika

FELADATGYŰJTEMÉNY

Az analízis elemei

ÉRETTSÉGI



Emelt szintű érettségire felkészítő feladatokkal

MOZAIK

Kovács István
Trembeczki Csaba

sokszínű

Matematika

FELADATGYŰJTEMÉNY

Az analízis elemei

11–12

EMELT SZINT

Hetedik, változatlan kiadás

Mozaik Kiadó – Szeged, 2019

Tisztelt Olvasó!

Feladatgyűjtemény-sorozatunk egyedülálló a középiskolai matematika feladatgyűjtemények között. A könyvek felépítése pontosan követi a *Sokszínű matematika* tankönyvcsalád köteteinek szerkezetét, így akik ezekből a tankönyvekből tanulnak, közvetlenül alkalmazhatják az órai munka és az önálló gyakorlás, sőt az érettségi felkészülés során is.

A feladatok nagy számának és változatosságának köszönhetően a tanulók bőségesen találnak a maguk számára kitűzött szintnek megfelelő gyakorlási lehetőséget. Így a tankönyveket és a feladatgyűjteményt együtt használva kellő jártasságot szerezhetnek a feladatmegoldásban.

Az egyes fejezetek végén található *Vegyes feladatok* áttekintést adnak az adott fejezet anyagából, ezért jól segíthetik az átfogóbb számonkérés előtti felkészülést.

A feladatok nehézségének jelölése

Minden fejezetben három különböző szintre bontva találjuk a feladatokat:

6028 **Gyakorló feladatok:** olyan feladatok, amelyek – akár a tanórákon, akár házi feladatként – elősegítik a megtanult ismeretek elmélyítését. *(narancssárga színű feladatsorszám)*

6135 **Emelt szintű feladatok:** az emelt szintű érettségire való felkészülést segítő problémák, melyek nemcsak megoldásuk nehézségében különböznek az előzőektől, hanem felvillantják a matematika szépségét is. *(bordó színű feladatsorszám)*

6204 **Kiegészítő feladatok:** az érettségi szintjét meghaladó feladatok. *(lila színű feladatsorszám)*

A feladatok sorszámozása

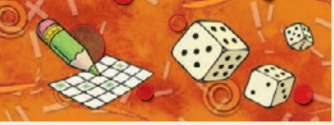
Könyvünk a *Sokszínű matematika 9–12. feladatgyűjtemények* sorozatának befejező tagja. A sorozathoz illeszkedik a feladatok számozása is, amely ebben a kötetben a 6001-es sorszámmal kezdődik.

Megoldások

A feladatgyűjtemény minden feladat megoldását tartalmazza. A gyakorló feladatok esetén csak a végeredményt közöljük, más esetekben pedig annyira részletezzük a megoldásokat, amennyire azt pedagógiai szempontból szükségesnek tartottuk.

A kitűzött feladatok megoldásához jó munkát és jó tanulást kívánunk!

A szerzők



TARTALOMJEGYZÉK – FELADATOK

Sorozatok (6001-6032)

A sorozat fogalma 10
A sorozatok tulajdonságai I. Korlátosság és monotonitás 10
A sorozatok tulajdonságai II. A határérték fogalma 11
A sorozatok tulajdonságai III. Konvergens sorozatok tulajdonságai 11
Nevezetes sorozatok határértékei I. 12
Nevezetes sorozatok határértékei II. Műveletek konvergens sorozatokkal 12
Vegyes feladatok 13

Függvények tulajdonságai (6033-6060)

Függvények, érdekes függvények, ábrázolásuk és alapvető tulajdonságaik 14
Függvények határértéke 15
Függvény folytonossága 17
Vegyes feladatok 18

Differenciálszámítás (6061-6122)

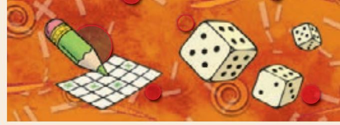
A differenciálhányados fogalma 19
Műveletek differenciálható függvényekkel 21
Néhány konkrét függvény deriváltfüggvénye 23
Miről informál a differenciálhányados? 23
Szélsőérték-feladatok 25
Derivált deriváltja. Miről informál a második derivált? 26
Differenciálható függvények vizsgálata 27
Vegyes feladatok 28

Integrálszámítás (6123-6182)

Primitív függvény 29
Függvénygörbe alatti terület meghatározása a kétoldali közelítés módszerével 30
A Newton–Leibniz-tétel 32
A határozott integrál alkalmazásai 34
Improprius integrálok 36
Vegyes feladatok 37

Valószínűség-számítás (6183-6224)

A valószínűség-számítás új megközelítése: valószínűségi változó 38
Vegyes feladatok 42



TARTALOMJEGYZÉK – MEGOLDÁSOK

Sorozatok (6001-6032)

A sorozat fogalma 44
A sorozatok tulajdonságai I. Korlátosság és monotonitás 44
A sorozatok tulajdonságai II. A határérték fogalma 47
A sorozatok tulajdonságai III. Konvergens sorozatok tulajdonságai 49
Nevezetes sorozatok határértékei I. 50
Nevezetes sorozatok határértékei II. Műveletek konvergens sorozatokkal 51
Vegyes feladatok 54

Függvények tulajdonságai (6033-6060)

Függvények, érdekes függvények, ábrázolásuk és alapvető tulajdonságaik 56
Függvények határértéke 68
Függvény folytonossága 72
Vegyes feladatok 75

Differenciálszámítás (6061-6122)

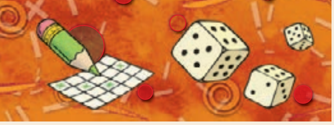
A differenciálhányados fogalma 77
Műveletek differenciálható függvényekkel 83
Néhány konkrét függvény deriváltfüggvénye 86
Miről informál a differenciálhányados? 86
Szélsőérték-feladatok 92
Derivált deriváltja. Miről informál a második derivált? 96
Differenciálható függvények vizsgálata 98
Vegyes feladatok 104

Integrálszámítás (6123-6182)

Primitív függvény 106
Függvénygörbe alatti terület meghatározása a kétoldali közelítés módszerével 112
A Newton–Leibniz-tétel 118
A határozott integrál alkalmazásai 123
Improprius integrálok 131
Vegyes feladatok 133

Valószínűség-számítás (6183-6224)

A valószínűség-számítás új megközelítése: valószínűségi változó 134
Vegyes feladatok 142



A feladatgyűjteményben használt matematikai jelölések

Jelölés	Magyarázat
$\mathbb{N}$	a természetes számok halmaza
$\mathbb{Z}$	az egész számok halmaza
$\mathbb{Z}^+$; $\mathbb{Z}^-$	a pozitív egész számok halmaza; a negatív egész számok halmaza
$\mathbb{Q}$; $\mathbb{Q}^*$	a racionális számok halmaza; az irracionális számok halmaza
$\mathbb{Q}^+$; $\mathbb{Q}^-$	a pozitív racionális számok halmaza; a negatív racionális számok halmaza
$\mathbb{R}$	a valós számok halmaza
$\mathbb{R}^+$; $\mathbb{R}^-$	a pozitív valós számok halmaza; a negatív valós számok halmaza
$a \in A$; $b \notin A$	a eleme az A halmaznak; b nem eleme az A halmaznak
$A \subseteq B$	A halmaz részhalmaza B halmaznak
$C \subset D$	C halmaz valódi részhalmaza D halmaznak
$E \not\subset F$	E halmaz nem részhalmaza F halmaznak
$A \cup B$; $C \cap D$; $E \setminus F$	A és B halmaz uniója; C és D halmaz metszete; E és F halmaz különbsége
$\emptyset$, $\{\,\}$	üres halmaz
$\bar{A}$	az A halmaz komplementere
$\lvert A \rvert$	az A halmaz elemszáma
$A \Rightarrow B$; $C \Leftrightarrow D$	ha A, akkor B; C akkor és csak akkor, ha D
$[a; b]$	a, b zárt intervallum
$[a; b[$	a, b balról zárt, jobbról nyitott intervallum
$]a; b]$	a, b balról nyitott, jobbról zárt intervallum
$]a; b[$	a, b nyitott intervallum
$n!$	n faktoriális: $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$
$f: x \mapsto$	az f függvény hozzárendelési szabálya
$f(x_0)$	az f függvény helyettesítési értéke az x_0 helyen
$\lvert x \rvert$	az x szám abszolút értéke
$[x]$	az x szám egészrésze
$\{x\}$	az x szám törtrésze
$\sqrt{x}$	az x szám négyzetgyöke
$\sqrt[n]{x}$	az x szám n-edik gyöke
$a \mid b$	az a szám osztója a b számnak
(a, b)	az a és b szám legnagyobb közös osztója
$[a, b]$	az a és b szám legkisebb közös többszöröse
$\overrightarrow{AB}$	az A pontból B pontba mutató vektor
$\vec{a}$, $\vec{0}$	a vektor, nullvektor
$\sphericalangle$	szög

Feladatok

Sorozatok 10

Függvények tulajdonságai 14

Differenciálszámítás 19

Integrálszámítás 29

Valószínűségszámítás 38

FÜGGVÉNYEK TULAJDONSÁGAI

Függvények, érdekes függvények, ábrázolásuk és alapvető tulajdonságaik

Az alábbi feladatokban p periódus alatt a lehető legkisebb pozitív p-t, az ún. alapperiódust értjük.

6033 Adjunk meg olyan függvényt, amely az értelmezési tartományán

a) páros és nem páratlan; *b)* páratlan és nem páros;
c) nem páros és nem páratlan; *d)* páros és páratlan.

6034 Bizonyítsuk be, hogy az $f(x)$ és $g(x)$ függvény értelmezési tartományának metszetén értelmezett $F(x) = f(x) \cdot g(x)$ szorzatfüggvény

a) páros, ha mindkettő páros vagy mindkettő páratlan;
b) páratlan, ha egyik páros, másik páratlan;
c) p szerint periodikus, ha mindkét függvény p szerint periodikus.
d) Igaz-e a fenti állítások megfordítása? Adjunk ellenpéldát, ha nem.
e) Tegyük fel, hogy $f(x)$ p szerint periodikus, és $F(x) = f(x) \cdot g(x)$ is az. Igaz-e, hogy ekkor $g(x)$ is p szerint periodikus? Mivel kell kiegészítenünk a feltételeket, hogy igaz legyen az állítás?

6035 Állapítsuk meg az alábbi függvények értelmezési tartományát és értékkészletét. Vizsgáljuk meg tulajdonságaikat (monotonitás, korlátosság, szélsőérték, periodikusság). Amennyiben lehetséges, vázoljuk a függvénygörbéket koordináta-rendszerben.

a) $a(x) = x + 2 \cdot |x|$; *b)* $b(x) = 2x + |x|$; *c)* $c(x) = x^2 - 2x - 3$;
d) $d(x) = |-2x^2 + 16x - 30|$; *e)* $e(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2 \cdot |x|$; *f)* $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 9}$;
g) $g(x) = \sqrt{|x|}$; *h)* $h(x) = \sqrt{|x|} \cdot \operatorname{sgn} x$; *i)* $i(x) = -\sqrt{3 - x}$;
j) $j(x) = \sqrt{9 - x^2}$; *k)* $k(x) = \frac{2}{x-1} + 1$; *l)* $l(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$;
m) $m(x) = \sin 2x$; *n)* $n(x) = 2\cos(x + \pi)$; *o)* $o(x) = \left|\lg |x|\right|$;
p) $p(x) = \lg(\sin x)$; *q)* $q(x) = 2^{\cos x}$; *r)* $r(x) = 2^{-|x|}$;
s) $s(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad x \in \left]2k; 2k+1\right], \quad k \in \mathbb{Z}, \\ 2, & \text{ha} \quad x \in \left]2k+1; 2k+2\right], \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$

6036 Állapítsuk meg, párosak vagy páratlanok az alábbi függvények. Vázoljuk grafikonjaikat.

a) $a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a(x) = -\frac{1}{2}x^2$; *b)* $b\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $b(x) = \frac{1}{3}x^3$;
c) $c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $c(x) = |x - 1| + |x + 1|$; *d)* $d\colon [-1; 1] \to \mathbb{R}$, $d(x) = \frac{x^2 - 3x}{x - 3}$;
e) $e\colon [-2; 1] \to \mathbb{R}$, $e(x) = \frac{x^2 - 3x}{x - 3}$; *f)* $f\colon [-2; 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3 - x^2}{x - 1}$;

g) $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = x \cdot \sin x;$ *h)* $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h(x) = x \cdot \cos x;$

i) $i\colon \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}, \quad i(x) = \dfrac{\cos x}{x}.$

6037 Állapítsuk meg a következő függvények értelmezési tartományát, értékkészletét és szélsőértékeit. Van-e a függvények között alulról, felülről korlátos? Ha igen, melyik? Vázoljuk a görbéket.

a) $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x^2};$ *b)* $g(x) = x + \dfrac{1}{x};$

c) $h(x) = x^n + \dfrac{1}{x^n} \quad (n \in \mathbb{Z});$ *d)* $i(x) = x + \dfrac{a}{x} \quad (a \in \mathbb{R}^+).$

6038 Határozzuk meg az alábbi függvények periódusát:

a) $f(x) = \cos\left(\dfrac{1}{2}x\right);$ *b)* $g(x) = \sin 3x;$

c) $h(x) = \{x\} + \{2x\};$ *d)* $i(x) = \sin\dfrac{x}{2} + \cos\dfrac{x}{3};$

e) $j(x) = \sin\dfrac{x}{a} + \cos\dfrac{x}{b} \quad (a, b \in \mathbb{Q}^+).$

6039 Vizsgáljuk meg a következő függvények értelmezési tartományát, értékkészletét, tulajdonságait, és vázoljuk a függvények grafikonját.

a) $a(x) = [x]^2;$ *b)* $b(x) = \{x\}^2;$ *c)* $c(x) = [x^2];$ *d)* $d(x) = \{x^2\};$

e) $e(x) = x \cdot [x];$ *f)* $f(x) = [x] \cdot \{x\};$ *g)* $g(x) = x \cdot \{x\}.$

6040 Adjuk meg a következő függvények értelmezési tartományát, értékkészletét, periódusát, és vázoljuk a függvények grafikonját.

a) $f(x) = [\sin x];$ *b)* $g(x) = \{\sin x\};$ *c)* $h(x) = \{2\sin x\}.$

6041 Korlátosak-e az alábbi függvények? Ha igen, adjunk meg alsó, felső korlátokat. Határozzuk meg szélsőértékeik helyét és értékét is.

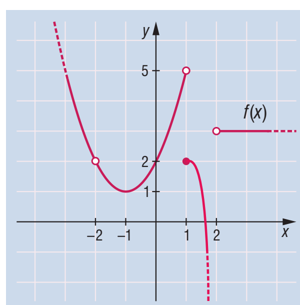
a) $f(x) = 3\sin x + 4\cos x;$ *b)* $g(x) = a\sin x + b\cos x \ (a, b \in \mathbb{R}).$

6042 Periodikusak-e az alábbi függvények? Amelyik az, annak állapítsuk meg a periódusát. Bizonyítsuk is állításunkat.

a) $f(x) = \sin\{x\};$ *b)* $g(x) = \sin[x];$ *c)* $h(x) = \{x\} + \sin x.$

Függvények határértéke

6043 Határozzuk meg az ábrán vázolt $f(x)$ függvény határértékeit az $x_1 = -2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$ és $x_4 = 2$ véges pontokban, illetve $+\infty$-ben és $-\infty$-ben. (A szaggatottal jelölt részek után a függvény menete már nem változik.)



6044 Határozzuk meg a következő függvények határértékét a megadott véges pontban.

a) $\lim\limits_{x\to 3}(3x-2)$; *b)* $\lim\limits_{x\to -1}(x^2-5x+2)$; *c)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x-2}$; *d)* $\lim\limits_{x\to -5}\operatorname{sgn} x$;

e) $\lim\limits_{x\to 5}\sqrt{x+4}$; *f)* $\lim\limits_{x\to \pi}\sin x$.

6045 Határozzuk meg a következő függvények határértékét a megadott „töréspontban”.

a) $f(x)=\begin{cases}2x-1, & \text{ha} \quad x\ge 2,\\ 3, & \text{ha} \quad x<2;\end{cases}$ $x_0=2$; *b)* $g(x)=\begin{cases}x^2+3, & \text{ha} \quad x\ge 1,\\ 2x+2, & \text{ha} \quad x<1;\end{cases}$ $x_0=1$.

6046 Határozzuk meg a függvények határértékét az értelmezési tartományukon kívüli pontban.

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3-2x}{x}$; *b)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^5+3x^3+x}{x^3+x^2-2x}$; *c)* $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}$; *d)* $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x^2-4}$;

e) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$; *f)* $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^2+2x-8}{x^2+7x+12}$; *g)* $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{2}{1-x^2}\right)$.

6047 Vizsgáljuk meg az alábbi függvények jobb és bal oldali határértékét a kérdéses pontban.

a) $a(x)=\operatorname{sgn} x$; $x_0=0$; *b)* $b(x)=\begin{cases}x^2, & \text{ha} \quad x\le 1,\\ x+1, & \text{ha} \quad x>1;\end{cases}$ $x_0=1$;

c) $c(x)=\begin{cases}\lg x, & \text{ha} \quad x>0,\\ x^2, & \text{ha} \quad x\le 0;\end{cases}$ $x_0=0$; *d)* $d(x)=\dfrac{1}{x-2}$; $x_0=2$;

e) $e(x)=\dfrac{1}{(x+1)^2}$; $x_0=-1$; *f)* $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2-2x+1}$; $x_0=1$.

6048 A $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ nevezetes határérték segítségével adjuk meg az alábbi függvények adott pontbeli határértékét.

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}$; *b)* $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin(x-\pi)}{x-\pi}$; *c)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{3x}$;

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x}{2x}$; *e)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$; *f)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{1-\cos x}$;

g) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}$; *h)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-\cos 2x}}{x}$; *i)* $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin x}{x-\pi}$.

6049 Határozzuk meg a következő függvények végtelenben vett határértékét.

a) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x+1}{x-100}$; *b)* $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2x^2+500x}{x^2-10^7}$; *c)* $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\sqrt{x^2-10}}{x+1}$;

d) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\sqrt{x^2+2}-x\right)$; *e)* $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\sqrt{2x+1}-\sqrt{x-1}\right)$; *f)* $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{\sqrt{x^3-x^2}}{x+1}-x\right)$;

g) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{|\sin x|}{x}$.

INTEGRÁLSZÁMÍTÁS

Primitív függvény

Az integrálok kiszámítása után könnyen ellenőrizhetjük munkánkat: deriváljuk az eredményt! Ha jól számoltunk, akkor a kiindulási függvényt kapjuk vissza.

6123 Határozzuk meg az alábbi primitív függvényeket az értelmezési tartományukon.

a) $\int 6\,\mathrm{d}x$; *b)* $\int 2x\,\mathrm{d}x$; *c)* $-2\int x^{-3}\,\mathrm{d}x$; *d)* $\int 4x^3\,\mathrm{d}x$;

e) $\int nx^{n-1}\,\mathrm{d}x$; *f)* $\int x^5\,\mathrm{d}x$; *g)* $\int 2x^4\,\mathrm{d}x$; *h)* $\int \frac{x^{-3}}{5}\,\mathrm{d}x$;

i) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$; *j)* $\int \sqrt[3]{x^7}\,\mathrm{d}x$; *k)* $\int (4x^3+8x-3)\,\mathrm{d}x$; *l)* $\int (x-2)(2x+7)\,\mathrm{d}x$;

m) $\int \frac{x\cdot\sqrt{x^3}}{x^4}\,\mathrm{d}x$; *n)* $\int \frac{x+\sqrt{x^3}}{x^4}\,\mathrm{d}x$; *o)* $\int (x+2)^2\,\mathrm{d}x$; *p)* $\int (x-1)^3\,\mathrm{d}x$;

q) $\int \frac{x^2-1}{x+1}\,\mathrm{d}x$; *r)* $\int \frac{x^3-8}{x-2}\,\mathrm{d}x$; *s)* $\int \left(x+\frac{1}{x}\right)^2\mathrm{d}x$; *t)* $\int \frac{x-1}{\sqrt{x}+1}\,\mathrm{d}x$.

6124 Mi az alábbi függvények antideriváltja? (Az *e)–j)* feladatokat addíciós összefüggésekkel oldjuk meg!)

a) $2\sin x$; *b)* $\frac{\cos x}{5}$; *c)* $\frac{-3}{\sin^2 x}$; *d)* $\frac{5}{\cos^2 x}$;

e) $\sin x\cdot\cos x$; *f)* $\frac{4}{\sin^2(2x)}$; *g)* $\sqrt{1-\cos^2 x}$; *h)* $\operatorname{tg}^2 x$;

i) $\cos^2 x$; *j)* $\sin^2 x$.

6125 Határozzuk meg a következő határozatlan integrálokat.

a) $\int 3e^x\,\mathrm{d}x$; *b)* $\int \left(e^x\right)^2\mathrm{d}x$; *c)* $\int \frac{5}{x}\,\mathrm{d}x$; *d)* $\int \frac{x+e^{-x}}{x\cdot e^{-x}}\,\mathrm{d}x$;

e) $\int \left(\frac{2}{x^3}+\frac{7}{x^2}+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$.

6126 Integráljuk parciálisan a következő szorzatokat.

a) $\int x\cdot\sin x\,\mathrm{d}x$; *b)* $\int x\cdot\cos x\,\mathrm{d}x$; *c)* $\int x\cdot e^{x+2}\,\mathrm{d}x$; *d)* $\int x\cdot\ln x\,\mathrm{d}x$;

e) $\int \operatorname{arcctg} x\,\mathrm{d}x$; *f)* $\int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$; *g)* $\int \sin x\cdot\cos x\,\mathrm{d}x$; *h)* $\int e^x\cdot\sin x\,\mathrm{d}x$;

i) $\int e^x\cdot\cos x\,\mathrm{d}x$; *j)* $\int x^2\cdot e^x\,\mathrm{d}x$; *k)* $\int x^2\cdot\cos x\,\mathrm{d}x$; *l)* $\int x^2\cdot\sin x\,\mathrm{d}x$;

m) $\int x^4\cdot e^x\,\mathrm{d}x$.

6127 *a)* A 6126. feladat *g)* alpontjában parciálisan meghatároztuk $\int \sin x\cdot\cos x\,\mathrm{d}x$-et. Most határozzuk meg ismét parciálisan, de az előbbi megoldásunktól eltérően! Mit tapasztalunk?

b) Hasonlítsuk össze ezeket egymással és a 6124. feladat *e)* alpontjában addíciós összefüggésekből kapott eredményével. Mi az eltérés magyarázata?

6128 Határozzuk meg parciális törtre bontással a következő határozatlan integrálokat:

a) $\int \frac{2}{(x+1)(x+3)}\,\mathrm{d}x$; *b)* $\int \frac{1}{x^2-3x-10}\,\mathrm{d}x$; *c)* $\int \frac{10}{x^2+x-6}\,\mathrm{d}x$; *d)* $\int \frac{4x+8}{4x^2+8x+3}\,\mathrm{d}x$.

6129 Keressük meg a következő törtek antideriváltjait:

a) $\frac{x^5}{1+x^3}$; *b)* $\frac{x^7}{x^2+4}$; *c)* $\frac{x^8}{x^2+4}$.

6130 Az összetett függvény deriválási szabálya alapján (helyettesítéses módszerrel) keressük meg a következő primitív függvényeket:

a) $\int \frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$; *b)* $\int \operatorname{ctg} x\,\mathrm{d}x$; *c)* $\int \frac{x+1}{x^2+2x-1}\,\mathrm{d}x$; *d)* $\int 2x\cdot\cos\left(x^2\right)\mathrm{d}x$;

e) $\int 6x^2\cdot\sqrt{x^3+2}\,\mathrm{d}x$; *f)* $\int \frac{1}{x\cdot\ln x}\,\mathrm{d}x$; *g)* $\int \sin x\cdot\cos x\,\mathrm{d}x$; *h)* $\int \sin^{55} x\cdot\cos x\,\mathrm{d}x$;

i) $\int \frac{\sin^6 x}{\cos^8 x}\,\mathrm{d}x$; *j)* $\int \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$; *k)* $\int \sin x\cdot\cos x\cdot\frac{e^{\cos^2 x}}{e^{\sin^2 x}}\,\mathrm{d}x$.

Függvénygörbe alatti terület meghatározása a kétoldali közelítés módszerével

Az alábbi feladatokban az intervallumokat – vagy azok részintervallumait – az egyszerűség kedvéért mindig osszuk n egyenlő részre.

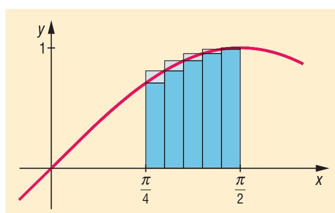
6131 Osszuk fel a feladatban megadott intervallumot négy egyenlő részre öt osztópont segítségével, majd számoljuk ki az alsó és felső közelítő téglalapösszegeket.

a) $f(x)=x^2+3,\quad I=[0;2]$; *b)* $g(x)=-2x^2,\quad I=[0;1]$.

6132 Osszuk fel a megadott intervallumot öt egyenlő részre, majd határozzuk meg a függvényhez tartozó alsó és felső közelítő összegeket.

a) $I=[0;1],\quad f(x)=2^x$;

b) $I=\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right],\quad g(x)=\sin x$. (➡)



6133 Határozzuk meg alsó és felső közelítő összegek segítségével az adott I intervallumon az $f(x)$ függvény görbéje és az x tengely közötti területet.

a) $f(x)=x^2,\quad I=[0;1]$; *b)* $g(x)=-x^2+4,\quad I=[0;2]$.

6134 Hány külön részre célszerű bontanunk az alábbi véges zárt intervallumokat, hogy meghatározzuk az adott függvény x tengellyel bezárt területét? Adjuk is meg a területet.

a) $I=[0;3],\quad f(x)=x^2-4x+5$; *b)* $I=[0;2],\quad g(x)=x^2-1$;

c) $I=[0;3],\quad h(x)=-(x-1)^2+1$.

6135 Legyenek $0 \le a < b$ tetszőlegesen rögzített valós számok. Bizonyítsuk be, hogy az $I = [a; b]$ intervallumon az $f(x) = \sqrt{x}$ függvény felső és alsó közelítő összegeinek különbsége 0-hoz tart.

6136 Legyenek $0 < a < b$ tetszőlegesen rögzített valós számok.

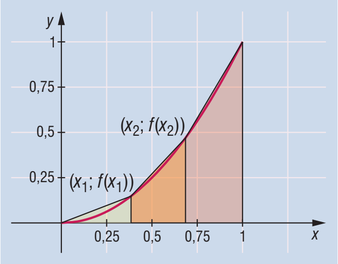
a) Bizonyítsuk be, hogy az $I = [a; b]$ intervallumon az $f(x) = \dfrac{1}{x}$ függvény felső és alsó közelítő összegeinek különbsége 0-hoz tart.

b) Adjuk meg az előző részfeladat alapján, hogy legalább hány osztáspont felvétele szükséges az $I = [1; 2]$ intervallum felett az $f(x)$ függvény görbéje és az x tengely által bezárt területet 0,01 pontossággal történő meghatározásához.

6137 Tekintsük az $I = [0; 1]$ intervallumot, osszuk fel x_i osztópontokkal n egyenlő részre ($i = 0, \ldots, n$), majd kössük össze a szomszédos $(x_i; f(x_i))$, $(x_i + 1; f(x_{i+1}))$ pontokat egymással és az $(x_i; 0)$, $(x_{i+1}; 0)$ pontokkal ($i = 0, \ldots, n - 1$) az ábrán látható módon. Adjuk össze minden n-re a kialakuló trapézok területeit, jelölje az összeget t_n. Mit tapasztalunk, ha $n \to \infty$?

a) $f(x) = x^2$;

b) $f(x) = -2x^2$.



6138 Magyarázzuk meg a példákban látott függvények tulajdonságai és a sorozatoknál tanult tételek segítségével, hogy a vizsgált esetekben miért működik a trapézmódszer.

A határozott integrál fogalma és tulajdonságai

6139 Számítsuk ki az $\int_0^1 x^2\,dx$ határozott integrált a határozott integrál meghatározása alapján!

6140 A határozott integrál meghatározása alapján számítsuk ki $\int_{-1}^{1} (x^3 + 1)\,dx$ értékét!

6141 Legalább mennyi osztópont felvételére van szükség, ha

a) $\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,dx$ értékét (negyed egységkör területe);

b) $\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx$ értékét

szeretnénk meghatározni egy tizedes pontossággal?

6142 Számítsuk ki $\int_2^3 \dfrac{1}{x}\,dx$ értékét fél tizedes pontossággal!

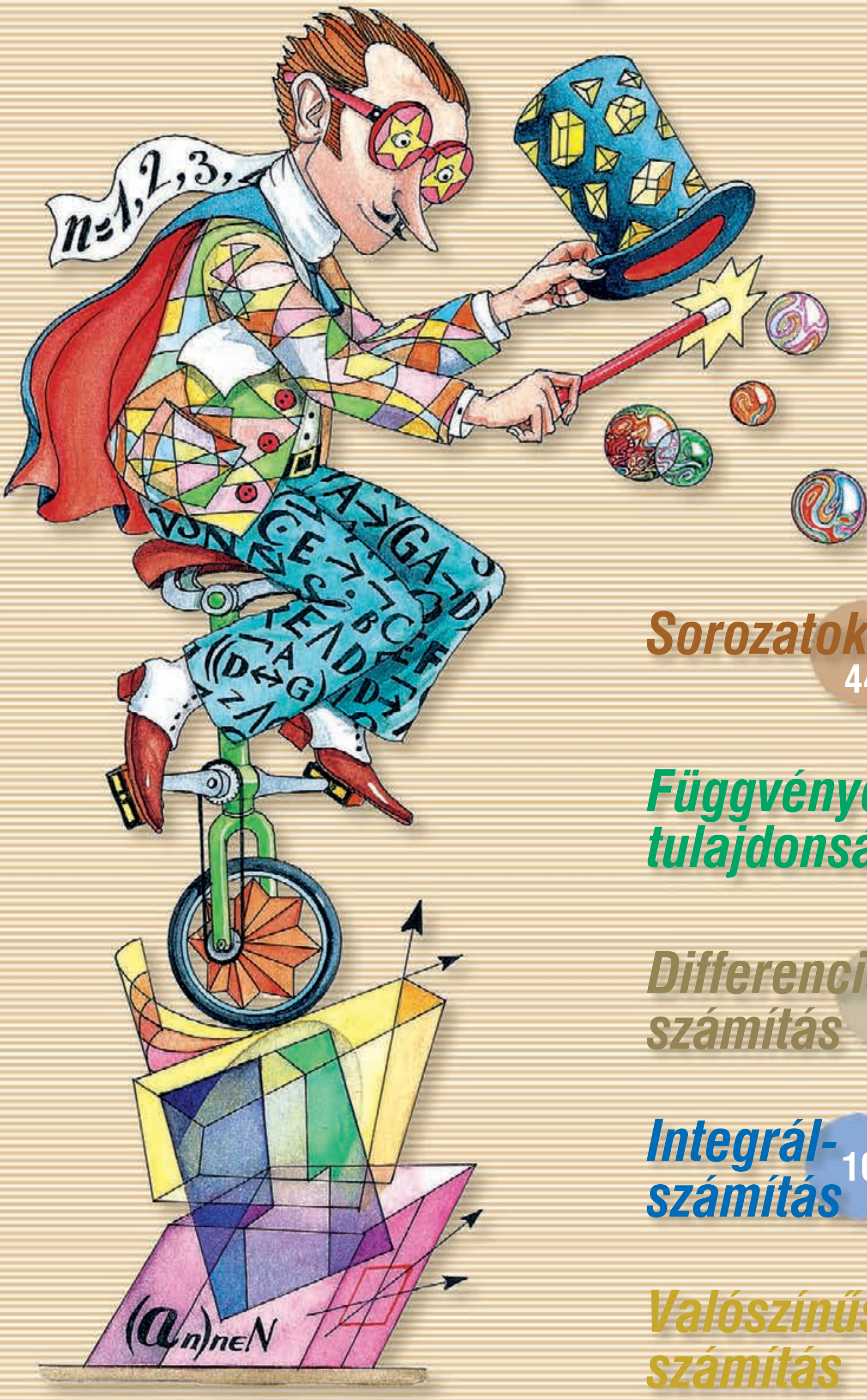
6143 *a)* Legyen az $f(x)$ páratlan függvény értelmezve, és legyen integrálható is a $[-a; a]$ intervallumon. Mivel egyenlő $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx$?

b) Mit mondhatunk, ha $f(x)$ páros?

6144 Az ismert, hogy $\int_a^b c \cdot f(x)\,dx = c \cdot \int_a^b f(x)\,dx$. De mivel egyenlő $\int_{ca}^{cb} c \cdot f\left(\dfrac{x}{c}\right)dx$?

(Tételezzük fel, hogy $f(x)$ az $[a; b]$ és $[ca; cb]$ intervallumokon integrálható.)

Megoldások



Sorozatok 44

Függvények tulajdonságai 56

Differenciálszámítás 77

Integrálszámítás 106

Valószínűségszámítás 134

FÜGGVÉNYEK TULAJDONSÁGAI

Függvények, érdekes függvények, ábrázolásuk és alapvető tulajdonságaik – megoldások

6033 *a)* $f(x)=x^2$; *b)* $g(x)=x$; *c)* $h(x)=x-2$; *d)* $i(x)=0$.

6034 *a)* Ha f és g páros, akkor

$$F(-x)=f(-x)\cdot g(-x)=f(x)\cdot g(x)=F(x).$$

Ha f és g páratlan, akkor

$$F(-x)=f(-x)\cdot g(-x)=-f(x)\cdot(-g(x))=F(x).$$

b) Tegyük fel, hogy f páros és g páratlan:

$$F(-x)=f(-x)\cdot g(-x)=f(x)\cdot(-g(x))=-f(x)\cdot g(x)=-F(x).$$

c) Tegyük fel, hogy az f és g függvény p szerint periodikus:

$$F(x+p)=f(x+p)\cdot g(x+p)=f(x)\cdot g(x)=F(x).$$

d) Egyik állítás megfordítása sem igaz. Ha $F(x)=f(x)\cdot g(x)$ páros/páratlan/periodikus, abból nem következik, hogy f és g paritása azonos/különböző, illetve hogy periodikusak.

Például legyen

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{ha} \quad x\neq 1,\\ 1, & \text{ha} \quad x=1;\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}1, & \text{ha} \quad x\neq 1,\\ 0, & \text{ha} \quad x=1.\end{cases}$$

Ekkor $F(x)$ szorzatfüggvényük konstans 0, ami egyszerre páros, páratlan és periodikus is, bár sem f, sem g nem páros, nem páratlan és nem is periodikus.

e) Nem igaz. Ugyanis tegyük fel, hogy $F(x)=f(x)\cdot g(x)$, és $f(x)$ is p szerint periodikus, azaz

$$F(x)=F(x+p)=f(x+p)\cdot g(x+p)=f(x)\cdot g(x+p).$$

A fenti sor elejét és végét összevetve azt kapjuk, hogy

$$f(x)\cdot g(x+p)=f(x)\cdot g(x).$$

Ebből arra következtethetnénk, hogy leosztva $f(x)$-szel, $g(x+p)=g(x)$ adódik. Azonban tudjuk, hogy ismeretlen kifejezésekkel nem oszthatunk!

Például ha f az adott x pontban zérus, akkor az, hogy $x+p$-ben is periodikus, nem érdekes, ugyanis:

$$0\cdot g(x+p)=0\cdot g(x),$$

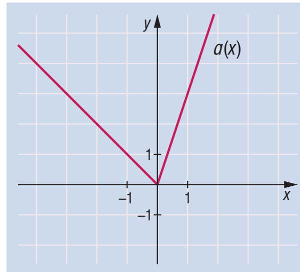
valóban teljesül, csakhogy $g(x)$ és $g(x+p)$ értékétől teljesen függetlenül! Tehát ezeken a helyeken g bárhogy viselkedhet, nem kell periodikusnak lennie. Lehetséges, hogy

$$g(x)\neq g(x+p).$$

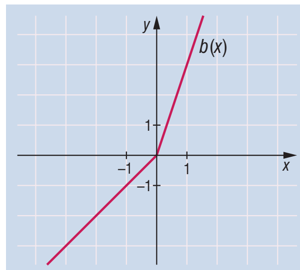
Mivel ez a probléma csak és kizárólag az $f(x)=0$ helyeken jelentkezik, elegendő azt kikötnünk, hogy pl. közös értelmezési tartományukon $f(x)$ sehol sem egyenlő 0-val. Így az osztás elvégezhető, és valóban: $g(x+p)=g(x)$, tehát g is p szerint periodikus.

6035 A feladatok során $k \in \mathbb{Z}$, h az alsó határt (legnagyobb alsó korlátot), H a felső határt (legkisebb felső korlátot) jelöli. A monotonitás az utolsó feladatot kivéve szigorú. A szélsőértékeknek először a helyét (x), majd az értékét (y) adjuk meg. Külön jelöljük, ha a szélsőérték helyi.

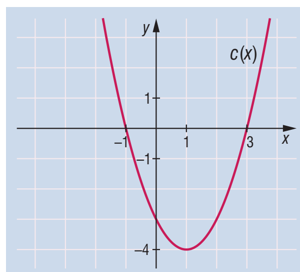
a) Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$;
értékkészlet: $y \in \mathbb{R}_0^+$;
zérushely: $x = 0$;
monoton csökkenő: $x \in \left]-\infty; 0\right]$;
monoton növő: $x \in \left[0; \infty\right[$;
korlátosság: csak alulról, $h = 0$;
minimum: $x = 0,\ y = 0$;
maximum: nincs;
periodikusság: nem.



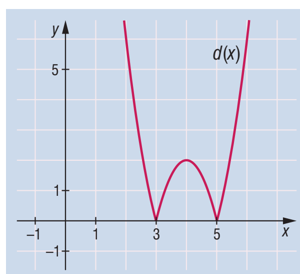
b) Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$;
értékkészlet: $y \in \mathbb{R}$;
zérushely: $x = 0$;
monoton csökkenő: nem;
monoton növő: $\mathbb{R}$;
korlátosság: nem;
minimum: nincs;
maximum: nincs;
periodikusság: nem.



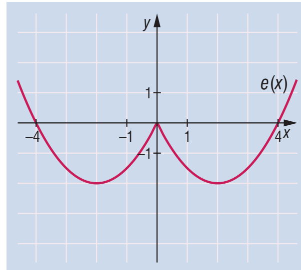
c) Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$;
értékkészlet: $y \in \left[-4; \infty\right[$;
zérushely: $x_1 = -1,\ x_2 = 3$;
monoton csökkenő: $x \in \left]-\infty; 1\right]$;
monoton növő: $x \in \left[1; \infty\right[$;
korlátosság: csak alulról, $h = -4$;
minimum: $x = 1,\ y = -4$;
maximum: nincs;
periodikusság: nem.



d) Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$;
értékkészlet: $y \in \mathbb{R}_0^+$;
zérushely: $x_1 = 3,\ x_2 = 5$;
monoton csökkenő: $x \in \left]-\infty; 3\right] \cup \left[4; 5\right]$;
monoton növő: $x \in \left[3; 4\right] \cup \left[5; \infty\right[$;
korlátosság: csak alulról, $h = 0$;
minimum: $x_1 = 3,\ y_1 = 0$ és $x_2 = 5,\ y_2 = 0$;
maximum: $x = 4,\ y = 2$ (helyi);
periodikusság: nem.



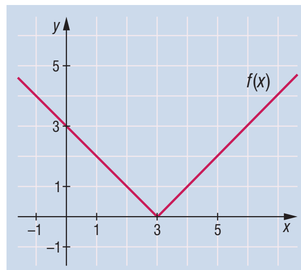
e) Átalakítás után:



$$e(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}x^2 - 2x, & \text{ha} \quad x \ge 0, \\ \dfrac{1}{2}x^2 + 2x, & \text{ha} \quad x < 0. \end{cases}$$

Értelmezési tartomány:	$x \in \mathbb{R}$;
értékkészlet:	$y \in [-2; \infty[$;
zérushely:	$x_1 = -4,\ x_2 = 0,\ x_3 = 4$;
monoton csökkenő:	$x \in]-\infty; -2] \cup [0; 2]$;
monoton növő:	$x \in [-2; 0] \cup [2; \infty[$;
korlátosság:	csak alulról, $h = -2$;
minimum:	$x_1 = -2,\ y_1 = -2$ és $x_2 = 2,\ y_2 = -2$;
maximum:	$x = 0,\ y = 0$ (helyi);
periodikusság:	nem.

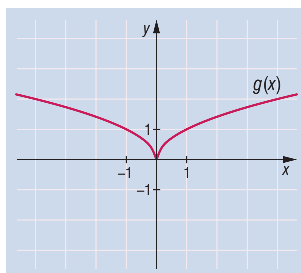
f) Átalakítás után:



$$f(x) = \sqrt{(x-3)^2} = |x - 3|.$$

Értelmezési tartomány:	$x \in \mathbb{R}$;
értékkészlet:	$y \in \mathbb{R}_0^+$;
zérushely:	$x = 3$;
monoton csökkenő:	$x \in]-\infty; 3]$;
monoton növő:	$x \in [3; \infty[$;
korlátosság:	csak alulról, $h = 0$;
minimum:	$x = 3,\ y = 0$;
maximum:	nincs;
periodikusság:	nem.

g) Átalakítás után:

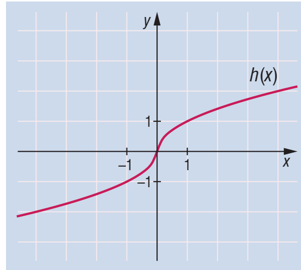


$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{ha} \quad x \ge 0, \\ \sqrt{-x}, & \text{ha} \quad x < 0. \end{cases}$$

Értelmezési tartomány:	$x \in \mathbb{R}$;
értékkészlet:	$y \in \mathbb{R}_0^+$;
zérushely:	$x = 0$;
monoton csökkenő:	$x \in]-\infty; 0]$;
monoton növő:	$x \in [0; \infty[$;
korlátosság:	csak alulról, $h = 0$;
minimum:	$x = 0,\ y = 0$;
maximum:	nincs;
periodikusság:	nem.

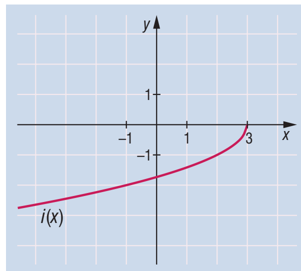
h) Átalakítás után:

$$h(x)=\begin{cases}\sqrt{|x|}=\sqrt{x}, & \text{ha} \quad x\ge 0,\\ -\sqrt{|x|}=-\sqrt{-x}, & \text{ha} \quad x<0.\end{cases}$$



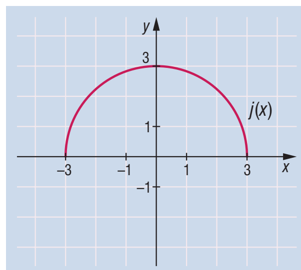
Értelmezési tartomány:	$x\in\mathbb{R}$;
értékkészlet:	$y\in\mathbb{R}$;
zérushely:	$x=0$;
monoton csökkenő:	nem;
monoton növő:	$x\in\mathbb{R}$;
korlátosság:	nem;
minimum:	nincs;
maximum:	nincs;
periodikusság:	nem.

i)



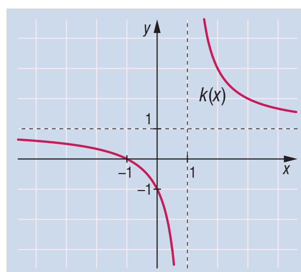
Értelmezési tartomány:	$x\in\left]-\infty;\,3\right]$;
értékkészlet:	$y\in\mathbb{R}_0^-$;
zérushely:	$x=3$;
monoton csökkenő:	nem;
monoton növő:	$x\in\left]-\infty;\,3\right]$;
korlátosság:	csak felülről, $H=0$;
minimum:	nincs;
maximum:	$x=3,\ y=0$;
periodikusság:	nem.

j)



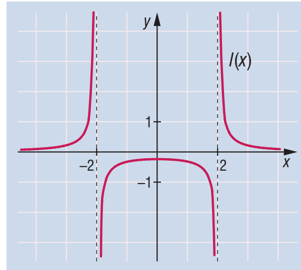
Értelmezési tartomány:	$x\in[-3;\,3]$;
értékkészlet:	$y\in[0;\,3]$;
zérushely:	$x_1=-3,\ x_2=3$;
monoton csökkenő:	$x\in[0;\,3]$;
monoton növő:	$x\in[-3;\,0]$;
korlátosság:	igen, $h=0,\ H=3$;
minimum:	$x_1=-3,\ y_1=0,\ x_2=3,\ y_2=0$;
maximum:	$x=0,\ y=3$;
periodikusság:	nem.

k)

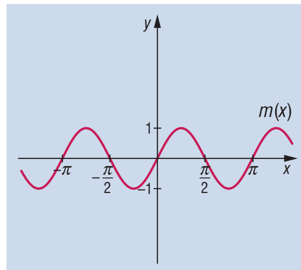


Értelmezési tartomány:	$x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$;
értékkészlet:	$y\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$;
zérushely:	$x=-1$;
monoton csökkenő:	$x\in\left]-\infty;\,1\right[\cup\left]1;\,\infty\right[$;
monoton növő:	nem;
korlátosság:	nem;
minimum:	nincs;
maximum:	nincs;
periodikusság:	nem.

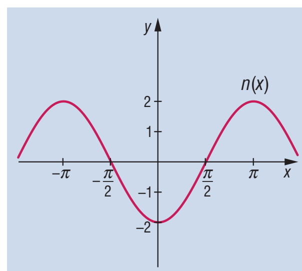
l) Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$;
értékkészlet: $y \in \mathbb{R} \setminus \left]-0{,}25; 0\right]$;
zérushely: nincs;
monoton csökkenő: $x \in \left[0; 2\right[\cup \left]2; \infty\right]$;
monoton növő: $x \in \left]-\infty; -2\right[\cup \left]-2; 0\right]$;
korlátosság: nem;
minimum: nincs;
maximum: $x = 0,\ y = -0{,}25$ (helyi);
periodikusság: nem.



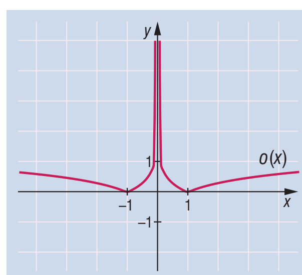
m) Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$;
értékkészlet: $y \in [-1; 1]$;
zérushely: $x = k \cdot \frac{\pi}{2}$;
monoton csökkenő: $x \in \left[\frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{3\pi}{4} + k\pi\right]$;
monoton növő: $x \in \left[-\frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{\pi}{4} + k\pi\right]$;
korlátosság: igen, $h = -1,\ H = 1$;
minimum: $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi,\ y = -1$;
maximum: $x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ y = 1$;
periodikusság: igen, $p = \pi$.



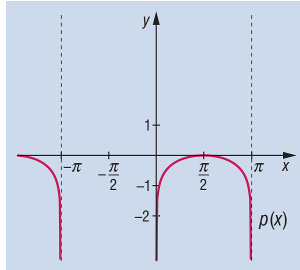
n) Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$;
értékkészlet: $y \in [-2; 2]$;
zérushely: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$;
monoton csökkenő: $x \in [\pi + 2k\pi; 2\pi + 2k\pi]$;
monoton növő: $x \in [2k\pi; \pi + 2k\pi]$;
korlátosság: igen, $h = -2,\ H = 2$;
minimum: $x = 2k\pi,\ y = -2$;
maximum: $x = \pi + 2k\pi,\ y = 2$;
periodikusság: igen, $p = 2\pi$.



o) Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;
értékkészlet: $y \in \mathbb{R}_0^+$;
zérushely: $x_1 = -1,\ x_2 = 1$;
monoton csökkenő: $x \in \left]-\infty; -1\right] \cup \left]0; 1\right]$;
monoton növő: $x \in \left[-1; 0\right[\cup \left[1; \infty\right[$;
korlátosság: csak alulról, $h = 0$;
minimum: $x_1 = -1,\ y_1 = 0,\ x_2 = 1,\ y_2 = 0$;
maximum: nincs;
periodikusság: nem.



p) Értelmezési tartomány: $x \in \left]2k\pi;\ \pi + 2k\pi\right[$;



értékkészlet: $y \in \left]-\infty;\ 0\right]$;

zérushely: $x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$;

monoton csökkenő: $x \in \left[\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi;\ \pi + 2k\pi\right[$;

monoton növő: $x \in \left]2k\pi;\ \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$;

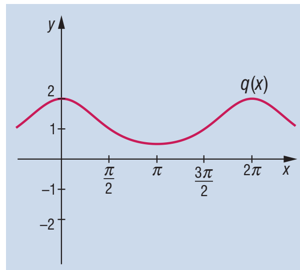
korlátosság: csak felülről, $H = 0$;

minimum: nincs;

maximum: $x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi,\ y = 0$;

periodikusság: igen, $p = 2\pi$.

q) Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$;



értékkészlet: $y \in [0{,}5;\ 2]$;

zérushely: nincs;

monoton csökkenő: $x \in [2k\pi;\ \pi + 2k\pi]$;

monoton növő: $x \in [\pi + 2k\pi;\ 2\pi + 2k\pi]$;

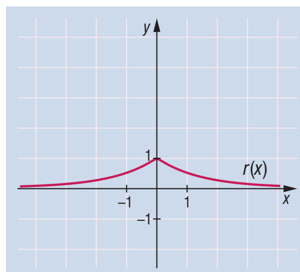
korlátosság: igen, $h = 0{,}5,\ H = 2$;

minimum: $x = \pi + 2k\pi,\ y = 0{,}5$;

maximum: $x = 2k\pi,\ y = 2$;

periodikusság: igen, $p = 2\pi$.

r) Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$;



értékkészlet: $y \in \left]0;\ 1\right]$;

zérushely: nincs;

monoton csökkenő: $x \in \left[0;\ \infty\right[$;

monoton növő: $x \in \left]-\infty;\ 0\right]$;

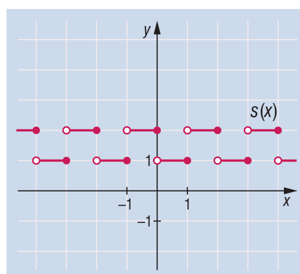
korlátosság: igen, $h = 0,\ H = 1$;

minimum: nincs;

maximum: $x = 0,\ y = 1$;

periodikusság: nem.

s) Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$;



értékkészlet: $y \in \{1;\ 2\}$;

zérushely: nincs;

monoton csökkenő: $x \in \left]2k;\ 2k+1\right] \cup \left]2k+1;\ 2k+2\right]$;

monoton növő: $x \in \left]2k;\ 2k+1\right] \cup \left]2k+1;\ 2k+2\right]$;

korlátosság: igen, $h = 1,\ H = 2$;

minimum: $x \in \left]2k;\ 2k+1\right],\ y = 1$;

maximum: $x \in \left]2k+1;\ 2k+2\right],\ y = 2$;

periodikusság: igen, $p = 2$.

INTEGRÁLSZÁMÍTÁS

Primitív függvény – megoldások

6123 A szorzatokat érdemes kifejteni, a törteket egyszerűsíteni és átírni negatív kitevőre, a gyököket átírni törtkitevőre (a megoldást mindkét formában közöljük). Az *o)*–*t)* részfeladatokban nevezetes szorzatokkal dolgozunk.

a) $6x + c$; *b)* $x^2 + c$; *c)* $x^{-2} + c$;

d) $x^4 + c$; *e)* $x^n + c$; *f)* $\frac{x^6}{6} + c$;

g) $\frac{2x^5}{5} + c$; *h)* $-\frac{x^{-2}}{10} + c = -\frac{1}{10x^2} + c$; *i)* $2\sqrt{x} + c = 2x^{\frac{1}{2}} + c$;

j) $\frac{3\cdot\sqrt[3]{x^{10}}}{10} + c = \frac{3x^{\frac{10}{3}}}{10} + c$; *k)* $x^4 + 4x^2 - 3x + c$; *l)* $\frac{2x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 14x + c$;

m) $-\frac{2}{\sqrt{x}} + c$; *n)* $-\frac{1}{2x^2} - \frac{2}{3\sqrt{x^3}} + c$; *o)* $\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 4x + c$;

p) $\frac{x^4}{4} - x^3 + \frac{3x^2}{2} - x + c$; *q)* $\frac{x^2}{2} - x + c$; *r)* $\frac{x^3}{3} + x^2 + 4x + c$;

s) $\frac{x^3}{3} + 2x - x^{-1} + c$; *t)* $\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} - x + c$.

6124 Az *a)* – *d)* részfeladatokban gondoljunk a trigonometrikus függvények deriváltjaira!

a) $-2\cos x + c$; *b)* $\frac{\sin x}{5} + c$; *c)* $3\operatorname{ctg} x + c$; *d)* $5\operatorname{tg} x + c$.

e) Alkalmazzuk a kétszeres szög szinuszára vonatkozó addíciós tételt:

$$\int \sin x \cdot \cos x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int 2\sin x \cdot \cos x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \sin 2x \,\mathrm{d}x = -\frac{\cos 2x}{4} + c;$$

f) Nagyon hasonlít *c)*-re, de $2x$ van az argumentumban, és előjele pozitív:

$$\int \frac{4}{\sin^2 2x}\,\mathrm{d}x = -2\operatorname{ctg} 2x + c;$$

g) Átalakításokkal:

$$\int \sqrt{1-\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \int |\sin x|\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \int \sin x\,\mathrm{d}x, & \text{ha} \quad x \in [2k\pi; (2k+1)\pi], \\ \int -\sin x\,\mathrm{d}x, & \text{ha} \quad x \in [(2k-1)\pi; 2k\pi], \end{cases}$$

bármely k egészre. Így

$$\int |\sin x|\,\mathrm{d}x = \begin{cases} -\cos x + c, & \text{ha} \quad x \in [2k\pi; (2k+1)\pi], \\ \cos x + c, & \text{ha} \quad x \in [(2k-1)\pi; 2k\pi]. \end{cases}$$

Megjegyzés: Mivel a koszinusz nem ott vált előjelet, ahol a szinusz, a végeredményben nem alkalmazhatunk abszolútértékjelet.

h) A tangenst átírhatjuk szinuszra és koszinuszra, majd a szinuszt koszinuszra:

$$\int \operatorname{tg}^2 x \,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x - \int 1\,\mathrm{d}x = \operatorname{tg} x - x + c.$$

i) Alkalmazzuk a $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$ addíciós összefüggést:

$$\int \cos^2 x \,\mathrm{d}x = \int \frac{1+\cos 2x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x + \frac{\sin 2x}{4} + c.$$

j) Hasonlóan *i)*-hez, $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$.

$$\int \sin^2 x \,\mathrm{d}x = \int \frac{1-\cos 2x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int (1-\cos 2x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x - \frac{\sin 2x}{4} + c.$$

6125 *a)* $3e^x + c$; *b)* $\dfrac{e^{2x}}{2} + c$; *c)* $5\ln|x| + c$;

d) $e^x + \ln|x| + c$; *e)* $-\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{7}{x} + \ln|x| + c.$

6126 A megoldásokban $f(x)$ helyett egyszerűen f-et, $g(x)$ helyett g-t, deriváltjaikra f'-t és g'-t írunk. Ez a rövidítés nem fog zavart okozni.

a) Érdemes x-et f-nek, $\sin x$-et g'-nek választani, mert így $f' = 1$ és $g = -\cos x$. $\int f' \cdot g \,\mathrm{d}x$-et könnyen megkapjuk:

$$\int x \cdot \sin x \,\mathrm{d}x = -x\cdot\cos x + \int 1\cdot \cos x \,\mathrm{d}x = -x\cdot\cos x + \sin x + c.$$

b) Hasonlóan az előzőhöz, csak most $f = x$ és $g' = \cos x$, $f' = 1$ és $g = \sin x$:

$$\int x\cdot\cos x\,\mathrm{d}x = x\cdot\sin x - \int 1\cdot\sin x\,\mathrm{d}x = x\cdot\sin x + \cos x + c.$$

c) Az ötlet ugyanaz. $f = x$, $g' = e^{x+2}$ (mindegy, hogy derivált vagy nem), $f' = 1$ és $g = e^{x+2}$:

$$\int x\cdot e^{x+2}\,\mathrm{d}x = x\cdot e^{x+2} - \int 1\cdot e^{x+2}\,\mathrm{d}x = x\cdot e^{x+2} - e^{x+2} + c =$$

$$= e^{x+2}\cdot(x-1) + c.$$

d) Ebben a példában egy ügyes fogást alkalmazunk. Bár itt is szerepel x, mellette viszont $\ln x$ van – utóbbinak egyrészt nem tudjuk még az antideriváltját (az a következő feladat), másrészt $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

Az $f'\cdot g$ szorzat a fordított kiosztással lesz könnyen kezelhető.

Tehát $f = \ln x$, $g' = x$, $f' = \dfrac{1}{x}$ és $g = \dfrac{x^2}{2}$:

$$\int x\cdot\ln x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2\cdot\ln x}{2} - \int \frac{1}{x}\cdot\frac{x^2}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2\cdot\ln x}{2} - \frac{1}{2}\int x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2\cdot\ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + c =$$

$$= \frac{x^2}{4}\cdot(2\ln x - 1) + c.$$

e) Az ilyen kérdések általában nagyon nehezen kitalálhatók, ha csak a függvényt látjuk, és nem ismerjük a „szorozzunk eggyel" trükköt. Így felírva viszont könnyen kezelhető, hiszen nincs más választásunk, mint $g' = 1$. (Próbáljuk ki, hogy $f = 1$ választással nem jutunk előbbre!)

$f = \operatorname{arcctg} x,\ \ g' = 1,\ \ f' = -\dfrac{1}{1+x^2}$ és $g = x$:

$$\int 1 \cdot \operatorname{arcctg} x \,\mathrm{d}x = x \cdot \operatorname{arcctg} x + \int \frac{1}{1+x^2} \cdot x \,\mathrm{d}x = x \cdot \operatorname{arcctg} x + \frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right| + c.$$

f) Látszólag itt nem szorzat, hanem hányados van, de a hányadost könnyű felírni $\ln x$ és x reciprokának szorzataként. Legyen $f = \ln x,\ \ g' = \dfrac{1}{x},\ \ f' = \dfrac{1}{x},\ \ g = \ln x$:

$$\int \frac{1}{x} \cdot \ln x \,\mathrm{d}x = \ln^2 x - \int \frac{1}{x} \cdot \ln x \,\mathrm{d}x.$$

Tekintsük ezt mint egyenletet, adjuk mindkét oldalhoz az integrált:

$$2\int \frac{1}{x} \cdot \ln x \,\mathrm{d}x = \ln^2 x \quad \text{és} \quad \int \frac{1}{x} \cdot \ln x \,\mathrm{d}x = \frac{\ln^2 x}{2} + c;$$

g) Ha $f = \sin x,\ \ g' = \cos x,$ akkor $f' = \cos x,\ \ g = \sin x$:

$$\int \sin x \cdot \cos x \,\mathrm{d}x = \sin^2 x - \int \sin x \cdot \cos x \,\mathrm{d}x.$$

Fejezzük ki az integrált:

$$\int \sin x \cdot \cos x \,\mathrm{d}x = \frac{\sin^2 x}{2} + c;$$

h) Ha $f = \sin x,\ \ g' = e^x,$ akkor $f' = \cos x,\ \ g = e^x.$

$$\int e^x \cdot \sin x \,\mathrm{d}x = e^x \cdot \sin x - \int e^x \cdot \cos x \,\mathrm{d}x.$$

Ezzel nem jutottunk közelebb a megoldáshoz. Próbáljuk megoldani a következő feladatot, hátha az könnyebb!

i) $f = \cos x,\ \ g' = e^x,\ \ f' = -\sin x,\ \ g = e^x$:

$$\int e^x \cdot \cos x \,\mathrm{d}x = e^x \cdot \cos x + \int e^x \cdot \sin x \,\mathrm{d}x.$$

Ez a feladat sem tűnik annak. Próbáljunk összerakni a kettőből egyet!

$$\int e^x \cdot \sin x \,\mathrm{d}x = e^x \cdot \sin x - \int e^x \cdot \cos x \,\mathrm{d}x = e^x \cdot \sin x - \left(e^x \cdot \cos x + \int e^x \cdot \sin x \,\mathrm{d}x\right) =$$
$$= e^x \cdot (\sin x - \cos x) - \int e^x \cdot \sin x \,\mathrm{d}x.$$

Ismét egyenletként tekintve a sor elejét és végét, rendezzük az integrálra:

$$\int e^x \cdot \sin x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} e^x \cdot (\sin x - \cos x) + c.$$

Hasonlóan adódik:

$$\int e^x \cdot \cos x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} e^x \cdot (\sin x + \cos x) + c.$$

j) A feladat nagyon hasonlít a *c)* részhez annyi különbséggel, hogy ott x első hatványon szerepel. Próbáljuk ki az ottani trükköt: $f = x^2,\ \ g' = e^x,\ \ f' = 2x,\ \ g = e^x.$

$$\int x^2 \cdot e^x \,\mathrm{d}x = x^2 \cdot e^x - 2\int x \cdot e^x \,\mathrm{d}x = x^2 \cdot e^x - 2e^x \cdot x + 2e^x + c = e^x \cdot (x^2 - 2x + 2) + c.$$

Látjuk, hogy x kitevőjének csökkentésével célba érünk.

k) Legyen most $f = x^2$, $g' = \cos x$, $f' = 2x$, $g = \sin x$.

$$\int x^2 \cdot \cos x \,\mathrm{d}x = x^2 \cdot \sin x - 2\int x \cdot \sin x \,\mathrm{d}x = x^2 \cdot \sin x + 2x \cdot \cos x - 2\sin x + c.$$

l) Hasonlóan: $f = x^2$, $g' = \sin x$, $f' = 2x$, $g = -\cos x$.

$$\int x^2 \cdot \sin x \,\mathrm{d}x = -x^2 \cdot \cos x + 2\int x \cdot \cos x \,\mathrm{d}x = -x^2 \cdot \cos x + 2x \cdot \sin x + 2\cos x + c.$$

m) Első lépés: $f = x^4$, $g' = e^x$, $f' = 4x^3$, $g = e^x$.

$$\int x^4 \cdot e^x \,\mathrm{d}x = x^4 \cdot e^x - 4\int x^3 \cdot e^x \,\mathrm{d}x.$$

Második lépés: $f = x^3$, $g' = e^x$, $f' = 3x^2$, $g = e^x$.

$$\int x^4 \cdot e^x \,\mathrm{d}x = x^4 \cdot e^x - 4\int x^3 \cdot e^x \,\mathrm{d}x = x^4 \cdot e^x - 4\left(x^3 \cdot e^x - 3\int x^2 \cdot e^x \,\mathrm{d}x\right).$$

Harmadik lépés: $f = x^2$, $g' = e^x$, $f' = 2x$, $g = e^x$.

$$\int x^4 \cdot e^x \,\mathrm{d}x = x^4 \cdot e^x - 4\int x^3 \cdot e^x \,\mathrm{d}x = x^4 \cdot e^x - 4\left(x^3 \cdot e^x - 3\left[x^2 \cdot e^x - 2\int x \cdot e^x \,\mathrm{d}x\right]\right).$$

Negyedik lépés: $f = x$, $g' = e^x$, $f' = 1$, $g = e^x$.

$$\int x^4 \cdot e^x \,\mathrm{d}x = x^4 \cdot e^x - 4\int x^3 \cdot e^x \,\mathrm{d}x = x^4 \cdot e^x - 4\left(x^3 \cdot e^x - 3\left[x^2 \cdot e^x - 2\left(x \cdot e^x - \int e^x \,\mathrm{d}x\right)\right]\right).$$

Ha most integráljuk az utolsó tagot is, és kifejtjük a zárójeleket, ezt kapjuk:

$$\int x^4 \cdot e^x \,\mathrm{d}x = e^x \cdot (x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 24) + c.$$

Megjegyzés: Bár nem könnyű, formulát is készíthetünk általában $\int x^n \cdot e^x \,\mathrm{d}x$, $\int x^n \cdot \cos x \,\mathrm{d}x$, $\int x^n \cdot \sin x \,\mathrm{d}x$ vagy az itt elő nem került $\int x^n \cdot \ln x \,\mathrm{d}x$ felírására.

6127 *a)* Mi a megoldásban az $f = \sin x$, $g' = \cos x$, $f' = \cos x$, $g = \sin x$ kiosztást választottuk. Ekkor

$$\int \sin x \cdot \cos x \,\mathrm{d}x = \frac{\sin^2 x}{2} + c.$$

Fordítsuk most meg a kiosztást! Legyen $f = \cos x$, $g' = \sin x$, $f' = -\sin x$, $g = -\cos x$:

$$\int \sin x \cdot \cos x \,\mathrm{d}x = -\cos^2 x - \int \sin x \cdot \cos x \,\mathrm{d}x, \quad \text{innen} \quad \int \sin x \cdot \cos x \,\mathrm{d}x = -\frac{\cos^2 x}{2} + c.$$

Látszólag két különböző eredményünk született.

b) Korábbi eredményünk az alábbi volt:

$$\int \sin x \cdot \cos x \,\mathrm{d}x = -\frac{\cos 2x}{4} + c.$$

Hogyan egyeztethető össze ez a három, látszólag különböző eredmény? A titok az, hogy minden esetben csak a konstans értéke más (jelöljük őket a fenti sorrendben rendre c, c', c''-vel). Alakítsuk át a kifejezéseket:

$$\frac{\sin^2 x}{2} + c = \frac{1 - \cos^2 x}{2} + c = -\frac{\cos^2 x}{2} + \frac{1}{2} + c = -\frac{\cos^2 x}{2} + c'.$$

$$-\frac{\cos^2 x}{2} + c' = -\frac{2\cos^2 x}{4} + c' = -\frac{\cos^2 x + 1 - \sin^2 x}{4} + c' =$$

$$= -\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{4} - \frac{1}{4} + c' = -\frac{\cos 2x}{4} + c''.$$

Vagyis $c'' = c' - 0{,}25 = c + 0{,}25$ és $c' = c + 0{,}5$. A három eredmény ugyanazt a függvénysereget adja meg.