

Árki Tamás
Konfárné Nagy Klára
Kovács István
Trembeczki Csaba
Urbán János

sokszínű
Matematika
FELADATGYŰJTEMÉNY
9-10

*Gyakorló- és érettségire
felkészítő feladatokkal*



2024-től

érvényes
követelmények

A könyvet írta: Árki Tamás · középiskolai tanár
Konfárné Nagy Klára · középiskolai tanár
Kovács István · középiskolai tanár
Trembeczki Csaba · középiskolai tanár
Dr. Urbán János · középiskolai tanár

Lektorálta: Biróné Füle Zsuzsanna · középiskolai tanár
Kunovszki István · középiskolai tanár
Tóthné Bertalan Éva · középiskolai tanár

Felelős szerkesztő: Tóth Katalin
Borítóterv, tipográfia: Reményfy Tamás
Ábrák: Becsei György, Horváth Péter
Fotók: Mozaik Archívum
Műszaki szerkesztő: Horváth Péter

A feladatgyűjtemény átdolgozása a NAT2020 és a 2024-től érvényes érettségi vizsgakövetelmények alapján készült.

Minden jog fenntartva, beleértve a sokszorosítás, a mű bővített, ill. rövidített változat kiadásának jogát is. A kiadó írásbeli hozzájárulása nélkül sem a teljes mű, sem annak része semmiféle formában (fotokópia, mikrofilm vagy más hordozó) nem sokszorosítható.

ISBN 978 963 670 015 7

Copyright: Mozaik Kiadó – Szeged, 2009, 2025

Tisztelt Olvasó!

Ez a kötet a szabad tankönyvválasztás idején legszínvonalasabbnak tartott és legnépszerűbb *Sokszínű matematika 9–10. feladatgyűjteménynek* a NAT 2020 tanterv és a 2024-ben életbe lépett érettségi követelmények alapján átdolgozott változata.

A feladatgyűjtemény 2009-es első kiadása a Mozaik Kiadó *Sokszínű matematika* tankönyvcsaládjához készült, annak szemléletét követte. Az átdolgozás során igyekeztünk ennek értékeit megőrizni, ezért a több mint 1800, jól felépített feladatsorokba rendezett feladaton csak akkor módosítottunk, ha azt a tanterv és az érettségi követelményrendszer megváltozása indokolta.

A feladatok nagy száma és változatossága miatt a kötetben mindenki bőségesen találhat a maga számára kitűzött szintnek megfelelő gyakorlási lehetőséget. Így a feladatgyűjtemény akár tankönyv nélkül is alkalmas lehet órai használatra és a tananyag feldolgozására, gyakorlásra és megfelelő feladatmegoldási jártasság kialakítására.

A feladatok nehézségének jelölése

Segíti az eligazodást, hogy a feladatok sorszámaának színezése utal azok nehézségi szintjére:

- 1196 Gyakorlófeladatok:** olyan feladatok, amelyek – akár a tanórákon, akár házi feladatként – elősegítik a megtanult ismeretek elmélyítését. A középszintű érettségi I. részében található „villámkérdésekhez” hasonlóan könnyen megoldhatók. *(narancssárga színű feladatsorszám)*
- 1423 Középszintű feladatok:** az adott témakörben más témákhoz is kapcsolódó problémák, melyek megoldása elősegíti a tantárgy komplex ismeretanyagának ismételését, a matematikai kompetenciák elsajátítása mellett azok alkalmazását. *(kék színű feladatsorszám)*
- 1758 Emelt szintű feladatok:** az emelt szintű érettségire való felkészülést segítő problémák, melyek nemcsak megoldásuk nehézségében különböznek az előzőektől, hanem felvillantják a matematika szépségét is. *(bordó színű feladatsorszám)*
- 1625 Kiegészítő feladatok:** az új alaptantervben már nem tárgyalt, de matematika irányú továbbtanulás esetén hasznos ismereteket tartalmazó feladatok. *(lila színű feladatsorszám)*

A feladatok sorszámozása

A *Sokszínű matematika* feladatgyűjtemény köteteiben a 9. évfolyam feladatai az 1001., a 10. évfolyam feladatai a 2001., a 11. évfolyamé a 3001., a 12. évfolyamé pedig a 4001. sorszámmal kezdődnek.

A 12.-es kötet második részében található *Rendszerező összefoglalás* már célzottan az érettségi felkészülés szempontjai szerint tekinti át a négy év tananyagát. Ennek feladatai az 5001. sorszámmal indulnak.

Megoldások

A feladatok megoldásai letölthetők a www.mozaik.info.hu/matematika oldalról. *(Részletes információ a könyv 199. oldalán olvasható.)*

A gyakorlófeladatok esetén csak a végeredményt közöljük, más esetekben pedig annyira részletezzük a megoldásokat, amennyire azt pedagógiai szempontból szükségesnek tartottuk.

A kitűzött feladatok megoldásához jó munkát és jó tanulást kívánunk!

A szerzők



TARTALOMJEGYZÉK



Bevezető	5
A feladatgyűjteményben használt matematikai jelölések	10

A 9. évfolyam feladatai

9.1. Kombinatorika, halmazok (1001–1106)

Számoljuk össze!	12
Halmazok	14
Halmazműveletek	17
Halmazok elemszáma, logikai szita	19
Számegyenesek, intervallumok	22
Vegyes feladatok	24



9.2. Algebra és számelmélet (1107–1193)

Betűk használata a matematikában	26
Hatványozás, a számok normálalakja	27
Egész kifejezések, nevezetes szorzatok, a szorzattá alakítás módszerei	29
Műveletek algebrai törtekkel	31
Oszthatóság, számrendszerek	32
Arányok, százalékszámítás	34
Vegyes feladatok	35

9.3. Függvények (1194–1282)

A derékszögű koordináta-rendszer, pontthalmazok	37
Lineáris függvények	37
Az abszolútérték-függvény	39
A másodfokú függvény	40
A négyzetgyökfüggvény	42
Lineáris törtfüggvények	44
Az egészrész-, a törtész- és az előjelfüggvény (kiegészítő anyag)	45
Vegyes feladatok	46



9.4. Háromszögek, négyszögek, sokszögek (1283–1474)

Néhány alapvető geometriai fogalom (pont, egyenes, sík, távolság, szög)	51
Háromszögek oldalai, szögei	52
Pitagorasz-tétel	54



Négyszögek	55
Sokszögek	57
Nevezetes ponthalmazok	58
Háromszög beírt és köré írt köre	60
Thalész tétele	61
Érintőnéyszög, érintősokszög	62
Vegyes feladatok	63

9.5. Egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek (1475–1570)

Az egyenlet, azonosság fogalma	66
Az egyenlet megoldásának grafikus módszere	66
Az egyenlet értelmezési tartományának és értékészletének vizsgálata	67
Egyenlet megoldása szorzattá alakítással	67
Egyenletek megoldása lebontogatással, mérlegelvével	68
Egyenlőtlenségek	69
Abszolút értéket tartalmazó egyenletek, egyenlőtlenségek	70
Paraméteres egyenletek	71
Egyenletekkel megoldható feladatok	72
Egyenletrendszerek	75
Vegyes feladatok	76



9.6. Egybevágósági transzformációk (1571–1759)

Tengelyes tükrözés	78
Középpontos tükrözés	82
Háromszögek, négyszögek néhány nevezetes vonala (súlyvonal, magasságvonal, középvonal)	84
Forgatás	87
Eltolás	90
Geometria transzformációk	94
Vegyes feladatok	95



9.7. Statisztika (1760–1807)

Az adatok ábrázolása	99
Az adatok jellemzése	101
Vegyes feladatok	105





A 10. évfolyam feladatai

10.1. Gondolkodási módszerek (2001-2091)



Szükséges, elégséges, szükséges és elégséges feltétel	108
Skatulyaelv	110
Sorba rendezés I. (különböző elemek)	111
Sorba rendezés II. (több típusba tartozó azonos elemek)	111
Kiválasztás és sorba rendezés I. (különböző elemek)	114
Kiválasztás és sorba rendezés II. (lehetnek azonos elemek is)	114
Vegyes feladatok	116

10.2. A gyökvonás (2092-2148)



Racionális számok, irracionális számok	118
A négyzetgyökvonás azonosságai, alkalmazásai	119
Számok n -edik gyöke, a gyökvonás azonosságai	123
Vegyes feladatok	125

10.3. A másodfokú egyenlet (2149-2248)

A másodfokú egyenlet és függvény	127
A másodfokú egyenlet megoldóképlete	128
A gyöktényezős alak. Gyökök és együtthatók közötti összefüggés	130
Másodfokúra visszavezethető magasabb fokszámú egyenletek, másodfokú egyenletrendszerek	131
Másodfokú egyenlőtlenségek	132
Paraméteres másodfokú egyenletek	133
Négyzetgyökös egyenletek és egyenlőtlenségek	134
A számtani és mértani közép, szélsőérték feladatok	135
Másodfokú egyenletre vezető problémák	136
Vegyes feladatok	137



10.4. Geometria (2249-2632)

Körrel kapcsolatos ismeretek	139
Középpontos hasonlóság, párhuzamos szelők és párhuzamos szelőszakaszok tétele	142
Szögfelezőtétel	144
Alakzatok hasonlósága	145
Arányossági tételek a derékszögű háromszögben és a körben	148



A hasonlóság néhány alkalmazása a terület- és térfogatszámításban	151
Vegyes feladatok I.	153
Távolságok meghatározása hasonlóság segítségével, hegyesszögek szögfüggvényei	155
Összefüggések hegyesszögek szögfüggvényei között, nevezetes szögek szögfüggvényei	157
Háromszögek különböző adatainak meghatározása szögfüggvények segítségével	158
Síkbeli és térbeli számítások a szögfüggvények segítségével	161
Vegyes feladatok II.	163
Vektorok (emlékeztető), vektorok felbontása különböző irányú összetevőkre	165
Vektorok alkalmazása a síkban és a térben	168
Vektorok a koordináta-rendszerben, vektor koordinátái, műveletek koordinátákkal adott vektorokkal	170
Vegyes feladatok III.	172



10.5. Szögfüggvények (2633-2730)

A szinusz- és koszinuszfüggvény definíciója, egyszerű tulajdonságai	174
A szinuszfüggvény grafikonja	175
A koszinuszfüggvény grafikonja, egyenletek, egyenlőtlenségek	176
A tangensfüggvény	178
Összetett feladatok	180
Geometriai alkalmazások	181
Vegyes feladatok	182



10.6. Valószínűség-számítás (2731-2814)

Események	185
Műveletek eseményekkel	186
Kísérletek, gyakoriság, relatív gyakoriság, valószínűség	189
A valószínűség klasszikus modellje	189
Vegyes feladatok	195





A feladatgyűjteményben használt matematikai jelölések

Jelölés	Magyarázat
$\mathbb{N}$	a természetes számok halmaza
$\mathbb{Z}$	az egész számok halmaza
$\mathbb{Z}^+; \mathbb{Z}^-$	a pozitív egész számok halmaza; a negatív egész számok halmaza
$\mathbb{Q}; \mathbb{Q}^*$	a racionális számok halmaza; az irracionális számok halmaza
$\mathbb{Q}^+; \mathbb{Q}^-$	a pozitív racionális számok halmaza; a negatív racionális számok halmaza
$\mathbb{R}$	a valós számok halmaza
$\mathbb{R}^+; \mathbb{R}^-$	a pozitív valós számok halmaza; a negatív valós számok halmaza
$a \in A; b \notin A$	a eleme az A halmaznak; b nem eleme az A halmaznak
$A \subseteq B$	A halmaz részhalmaza B halmaznak
$C \subset D$	C halmaz valódi részhalmaza D halmaznak
$E \not\subset F$	E halmaz nem részhalmaza F halmaznak
$A \cup B; C \cap D; E \setminus F$	A és B halmaz uniója; C és D halmaz metszete; E és F halmaz különbsége
$\emptyset, \{ \}$	üres halmaz
$\bar{A}$	az A halmaz komplementere
$ A $	az A halmaz elemszáma
$A \Rightarrow B; C \Leftrightarrow D$	ha A , akkor B ; C akkor és csak akkor, ha D
$[a; b]$	a, b zárt intervallum
$[a; b[$	a, b balról zárt, jobbról nyitott intervallum
$]a; b]$	a, b balról nyitott, jobbról zárt intervallum
$]a; b[$	a, b nyitott intervallum
$n!$	n faktoriális: $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$
$f: x \mapsto$	az f függvény hozzárendelési szabálya
$f(x_0)$	az f függvény helyettesítési értéke az x_0 helyen
$ x $	az x szám abszolút értéke
$[x]$	az x szám egészrésze
$\{x\}$	az x szám törtrésze
$\sqrt{x}$	az x szám négyzetgyöke
$\sqrt[n]{x}$	az x szám n -edik gyöke
$a b$	az a szám osztója a b számnak
(a, b)	az a és b szám legnagyobb közös osztója
$[a, b]$	az a és b szám legkisebb közös többszöröse
$\overrightarrow{AB}$	az A pontból B pontba mutató vektor
$\vec{a}, \vec{0}$	a vektor, nullvektor
$\star$	szög

9. évfolyam



**Kombinatorika,
halmazok** 12

**Algebra
és számelmélet** 26

Függvények 37

**Háromszögek,
négyszögek,
sokszögek** 51

**Egyenletek,
egyenlőtlenségek,
egyenletrendszerek** 66

**Egybevágósági
transzformációk** 78

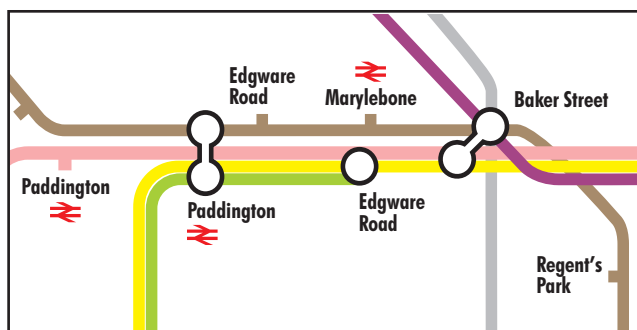
Statisztika 99



9.1. KOMBINATORIKA, HALMAZOK

Számoljuk össze!

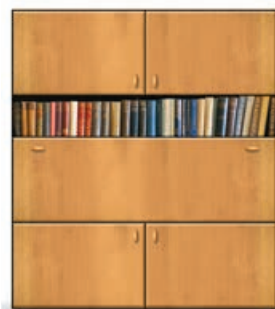
- 1001** a) Legfeljebb hányféle különböző összeget képezhetünk az 1, 2, 3, 4 számok közé tett összeadás- vagy kivonásjelekkel?
b) Írjuk fel, és számítsuk ki az összegeket.
- 1002** a) Hányféle különböző számot állíthatunk elő a 2, 2, 2, 2 számok közé írt összeadás- vagy kivonásjelekkel?
b) Számítsuk ki ezeket az összegeket.
- 1003** Tekintsük az $1 - 2 + 3 - 4$ összeget.
a) Hányféleképpen zárójeljelezhetjük egy zárójelpár segítségével?
b) Hány különböző eredménye lesz így az összegnek?
- 1004** Katinak van egy csupasz babája. A babához már kapott kétféle kalapot, három különböző blúzt, valamint három különböző szoknyát. Hányféleképpen öltöztetheti fel belőlük a babáját Kati, ha egy szoknyát, egy blúzt és egy kalapot ad rá?
- 1005** Barnabás nagy koncertrajongó, de negyedévente csak pontosan egy koncertet enged meg magának. Jövőre januárban 2, márciusban 1, májusban 4, júliusban, augusztusban és októberben 2-2-2 nagy koncert lesz más-más előadókkal. Hányféleképpen állíthatja össze Barnabás a jövő évi koncertprogramját?
- 1006** Ha ma élne, Sherlock Holmes a Paddington állomásról *sárga, rózsaszín* vagy *barna* metróval juthatna el a Baker Streetre. A Baker Street felső végéről a *York Bridge-en*, a *Hannover Gate-en* vagy gyalogoshídon léphetne a Regent's Park területére. Hányféleképp juthatna az állomásról a parkba, ha csak az említett útvonalakat veszi igénybe? Írjuk is fel ezeket az utakat.



- 1007** a) Összesen hányféle mondatot készíthetünk a következő szavak, szókapcsolatok: „a fiú”; „tanul”; „jól” és a mondatvégi pont, felkiáltójel, illetve kérdőjel segítségével?
b) Írjunk fel közülük néhányat.
c) Találjunk ki olyan helyzeteket, amelyekben elhangozhatnak.
d) Van köztük olyan, amelyik semmilyen helyzetben sem értelmes magyar mondat?
- 1008** Hány darab ötjegyű kettes számrendszerbeli szám van?



- 1009** A képen látható szekrény tetején kétfelé nyíló ajtó van. Alatta egy nyitott könyvespolc, az alatt pedig egy lefelé nyíló ajtajú bárszekrény található. A szekrény aljára szintén egy kétfelé nyíló részt építettek. A szekrénnel szemben állva hányféle helyzetben láthatjuk kinyitva vagy becsukva az összes ajtót?



- 1010** a) Mondjuk ki a Pitagorasz-tételt.
b) Ha csak formálisan ismerjük az összefüggést, akkor összesen hányféleképpen írhatjuk be a 3, 4, 5 számokat a Pitagorasz-tételben szereplő a , b és c oldalak helyére?
c) Ezek közül hány esetben teljesül az egyenlőség?

- 1011** Jani kisöccsének két különböző mozdonya és öt különböző kocsija van a kisvasúthoz.

- a) Hányféle szerelvényt állíthat elő belőlük mindet felhasználva, ha a két mozdonyt közvetlenül egymás mögé, de a kocsik elé teszi?
b) Hányféle, a képen látható összetételű és hosszúságú szerelvényt állíthat össze belőlük?



- 1012** Egy kör alakú asztal mellett három szék van: egy az ajtó felől, egy az ablak mellett és egy a kandalló előtt. Írjuk fel, hogyan ülhet le az asztal köré 3 fő, ha
a) figyelembe vesszük, hogy ki ül az ajtó, az ablak, illetve a kandalló felől;
b) csak az asztal melletti sorrendjüket vesszük figyelembe valamilyen körbejárás szerint;
c) csak annyit vesszünk figyelembe, hogy ki kinek a szomszédja.

- 1013** Az $\{1; 2; 3\}$ halmaz elemeihez hozzárendeljük valamilyen sorrendben a $\{2; 4; 6\}$ halmaz elemeit, különböző elemekhez különböző elemeket.
a) Hányféle hozzárendelést (függvényt) kaphatunk így?
b) Adjunk meg hozzárendelési szabályt a lineáris függvényekhez.

- 1014** Hányféleképpen színezhetünk ki egy
a) 2×2 -es négyzetet két színnel; b) 3×3 -as négyzetet három színnel;
ha minden sorban és oszlopban minden szín csak egyszer szerepel?

- 1015** Egy tolóajtós ruhásszekrény felső és alsó részén is három-három tolóajtó csúszik két párhuzamos sínen. Az első sínen csúsznak a most középen álló tükrös részek (ezek kicsit előrébb is vannak), a két szélső ajtó pedig a hátsó sínen (ezek kicsit hátrébb vannak). A három ajtó mindegyike a képen is látható három állás valamelyikébe mozgatható. A hátsó ajtók, mivel egy sínen mozognak, nem tolhatók egymásra.

- a) Hányféle helyzetbe mozgathatjuk a felső rész hátsó sínén mozgó két szélső ajtót?
b) Hányféle helyzetbe mozgathatjuk a felső rész összes ajtaját?
c) A szekrénnel szemben állva hányféle állapotban láthatjuk az összes ajtót?



9.2. ALGEBRA ÉS SZÁMELMÉLET

Betűk használata a matematikában

- 1107** Adjuk meg – algebrai kifejezéseket használva – azokat a
- pozitív egész számokat, amelyek 5-tel osztva 4 maradékot adnak;
 - pozitív egész számokat, amelyek 8-cal osztva 5 maradékot adnak;
 - egész számokat, amelyek két nullára végződnek;
 - pozitív egész számokat, amelyek 17-re végződnek;
 - racióális számokat, amelyeknek a számlálója 7, a nevezője pedig a 3 többszöröse;
 - racióális számokat, amelyeknek a számlálója 4-nek többszöröse, nevezője pedig 3-mal nagyobb a számlálónál.

- 1108** Milyen számokat határoznak meg a következő kifejezések?
- $9n$, ha n pozitív egész szám;
 - $8n - 3$, ha n pozitív egész szám;
 - $100n + 23$, ha n pozitív egész szám;
 - $2 - a$, ha a egész szám;
 - $n^2 + 1$, ha n egész szám;
 - $\frac{3x-1}{10}$, ha x pozitív egész szám.

- 1109** Az alábbi kifejezéseket állítsuk együtthatóik szerint növekvő sorrendbe:

- $3,8xyz$; $-0,8x \cdot 5z$; $-3x \cdot (-1,2yz)$; $2x \cdot (-2,1y)$; $4x \cdot (-0,7yz)$;
- $-4,2a^2$; $4a \cdot (-1,5b)$; $2a \cdot (-3b)$; $(-2b^2) \cdot (3,5a)$; $(-2,2a^4) \cdot 2b$.

- 1110** Számítsuk ki az alábbi kifejezések helyettesítési értékét, ha $a = 4$, $b = -1,2$ és $c = \frac{5}{6}$:

- $6c - 2a$;
- $4a^2 - 5b$;
- $a + 6bc$;
- $-2a - 5b + 12c$;
- $\frac{-3abc}{2a+1}$;
- $2 \cdot \left(\frac{a-b}{c} + \frac{c}{a} \right)$.

- 1111** Adjuk meg a valós számoknak azt a legbővebb részhalmazát, melyen az alábbi kifejezések értelmezhetők:

- $\frac{17x-3}{x}$;
- $\frac{4x-6}{x+2}$;
- $\frac{3a-1}{2a+3}$;
- $\frac{2x-3}{x} + \frac{4x+1}{x-1}$;
- $\frac{1}{5x-4} - \frac{3x-1}{3x+1}$;
- $\frac{a+1}{2a+7} - \frac{a-2}{8a-3}$;
- $1 - \frac{5y-6}{y^2-9} + \frac{3-y}{4-y^2} - \frac{3y+1}{1+y^2}$.

- 1112** Egy háromszög oldalai egymást követő páros számok. Mekkora a háromszög kerülete, ha a legkisebb oldal hossza $2x - 2$? Mekkora értékeket vehet fel az x ?

- 1113** Egy szám hárommal osztva 2, egy másik néggyel osztva 3 maradékot ad. Tizenkettővel osztva mennyi a maradéka

- az egyes számoknak;
- a két szám összegének?



Hatványozás, a számok normálalakja

1114 Vizsgáljuk meg, melyik szám a kisebb az alábbi esetekben:

- a) 2^6 vagy 4^4 ; b) 4^8 vagy 8^4 ; c) 9^3 vagy 3^9 ;
 d) 8^5 vagy 16^4 ; e) 6^3 vagy $27 \cdot 16$; f) 27^7 vagy 81^5 ;
 g) 10^{15} vagy $8^4 \cdot 125^5$; h) 40^{100} vagy 100^{50} .

1115 Zsebszámológép használata nélkül számítsuk ki a következő kifejezések értékeit:

- a) $\frac{27 \cdot 16}{6^3}$; b) $\frac{12^5}{9^2 \cdot 4^4}$; c) $\frac{16^3 \cdot 4^2 \cdot 8^2}{32^4}$;
 d) $\frac{18^4 \cdot 256 \cdot 72^2}{24^4 \cdot 36^3}$; e) $\left(\frac{6^6 \cdot 10^2}{9^3 \cdot 200 \cdot 32}\right)^3$; f) $\frac{6^7 \cdot 15^5 \cdot 35^5}{3^5 \cdot 10^6 \cdot 21^5 \cdot 25^2}$.

1116 Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket:

- a) $(a^7)^3 \cdot (a^4)^5$; b) $[(x^2)^2]^3 \cdot [(x^3)^2]^4$; c) $\frac{(x^3)^5 \cdot x^8}{(x^4)^3}$;
 d) $\frac{(b^2)^6 \cdot b^5}{(b^3)^4 \cdot (b^2)^2}$; e) $\frac{(x^4)^4 \cdot (x^5)^5}{(x^3)^3 \cdot (x^3)^2}$; f) $\frac{(a^3 \cdot b)^4 \cdot (a \cdot b^2)^3}{(a^4 \cdot b^2)^2 \cdot (a \cdot b)^3}$;
 g) $\left(\frac{a^2}{b}\right)^4 \cdot \left(\frac{b^3}{a^4}\right)^3 \cdot \left(\frac{a^5}{b}\right)^2$; h) $\frac{(c^4 \cdot d^3)^5 \cdot (c^7)^2 \cdot d^3}{(c^3)^2 \cdot (d^6 \cdot c^5)^4}$.

1117 Számítsuk ki a következő műveletek eredményét:

- a) 3^{-4} ; b) $(-5)^{-3}$; c) $(2^{-1})^{-3}$;
 d) $\left(\frac{1}{7}\right)^{-2}$; e) $\left(-\frac{5}{3}\right)^{-3}$; f) $\left(\frac{4}{5}\right)^{-2}$;
 g) $\left[\left(-\frac{3}{2}\right)^{-1}\right]^2$; h) $\left(-\frac{2}{5}\right)^{-2} \cdot \left(-\frac{2}{5}\right)^3$; i) $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\right]^{-4} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-6}$;
 j) $\frac{(7^{-5})^2 \cdot (7^{-3})^{-4}}{(7^{-6})^{-2} \cdot 7^{-11}}$.

1118 a) A 2-nek hányadik hatványai a következő törtek?

$$\frac{1}{4}, \quad \frac{1}{16}, \quad \frac{1}{32}, \quad \frac{1}{256}, \quad \frac{1}{1024}, \quad \frac{1}{(2^{-5})^6}$$

b) A 3-nak hányadik hatványai a következő törtek?

$$\frac{1}{9}, \quad \frac{1}{27}, \quad \frac{1}{81}, \quad \frac{1}{243}, \quad \frac{1}{3^{11}}, \quad \frac{1}{(3^{-5})^8}$$



9.5. EGYENLETEK, EGYENLŐTLENSÉGEK, EGYENLETRENDSZEREK

Az egyenlet, azonosság fogalma

- 1475** A következő kijelentő mondatok közül melyek tekinthetők állításnak? Az állítások közül melyik igaz, melyik hamis?
- a) Az elefánt nagy állat.
 - b) A bolygók a Nap körül keringenek.
 - c) A történelem érdekes tantárgy.
 - d) Petőfi Sándor híres költő volt.
 - e) A prímszámok páratlanok.
 - f) A fekete macska szerencsétlenséget jelent.
 - g) Minden másodfokú függvénynek két zérushelye van.
- 1476** Adjunk meg olyan halmazt, melynek elemeit a mondatok hiányzó részébe helyettesítve igaz állításokat kapunk.
- a) A ... konvex négyszög.
 - b) A legnagyobb kétjegyű prímszám a ...
 - c) A ... a Nap körül kering.
 - d) Az alma ... gyümölcs.
 - e) A ... a legjobb autó.
 - f) A ... függvénynek mindig van szélsőértéke.
 - g) A ... és a ... a két legnagyobb magyarországi folyó.
- 1477** Írjunk fel olyan hiányos állításokat, melyekbe az alábbi halmazok bármely elemét behelyettesítve igaz állításokat kapunk:
- a) $\{1; 2; 3; 4\}$;
 - b) $\{\text{prímszámok}\}$;
 - c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 19\}$;
 - d) $[2; 7]$;
 - e) $] -3; 5[$;
 - f) $\{\}$;
 - g) $\mathbb{N}$.
- 1478** Írjunk fel olyan egyenleteket, amelyek megoldásával választ kaphatunk a következő kérdésekre.
- a) Melyik az a szám, amelyik 6-tal kisebb a háromszorosánál?
 - b) Melyik az a szám, amelyik 8-cal nagyobb a kétszeresénél?
 - c) Melyik az a szám, amelyik háromszorosa 4-gyel kisebb a 25-nél?
 - d) Melyik az a szám, amelyet kétszer kivonva a háromszorosából az eredeti számot kapjuk?
 - e) Melyik az a szám, amelyiknek az ötszöröse 8-cal nagyobb, mint a háromszorosánál 10-zel nagyobb szám?

Az egyenlet megoldásának grafikus módszere

- 1479** Oldjuk meg grafikusan a következő egyenleteket:
- a) $x + 2 = x^2$;
 - b) $x^2 - 1 = 2x - 2$;
 - c) $\sqrt{x+3} = \frac{x}{2}$;
 - d) $|x| - 2 = x$;
 - e) $3x + 1 = 5 - |x|$;
 - f) $|x+1| = 1 - \frac{x}{3}$;
 - g) $|x| = 1 - |x-2|$;
 - h) $2 \cdot |x-2| = 2x - 4$;
 - i) $|x-1| + |x+3| = 6$.
- 1480** Oldjuk meg grafikusan a következő egyenleteket:
- a) $(x-2)^2 - 1 = |x-1|$;
 - b) $2 - |x+1| = 1 - (x+2)^2$;
 - c) $|x+2| = \sqrt{x+4}$;
 - d) $\sqrt{-1-x} - 4 = -1 - |x+4|$;
 - e) $| |x+3| - 2 | = 1$;
 - f) $|(x-3)^2 - 4| = x - 1$.



1481 Oldjuk meg grafikusán a következő egyenleteket. ($[x]$ az x egész részét, $\{x\}$ az x tört részét jelenti.)

a) $[x] - 2 = 2x - 3$; b) $[x] = x^2 + 2x$; c) $\{x\} = 0,7$; d) $\{x\} = 1 - \frac{x}{2}$.

1482 Hány megoldása van a következő egyenletnek a valós számok halmazán?

$$\{x\} = \frac{x}{2010}$$

Az egyenlet értelmezési tartományának és értékészletének vizsgálata

1483 Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

a) $\sqrt{x-4} = \sqrt{4-x}$; b) $\sqrt{3-2x} = \sqrt{2x-3}$; c) $\sqrt{4x-1} = \sqrt{1-4x}$;
 d) $\sqrt{8x-5} = \sqrt{5-8x}$; e) $\sqrt{x+4} = \sqrt{-x-5}$; f) $\sqrt{3x-7} = \sqrt{35-15x}$;
 g) $\sqrt{4x-2} = \sqrt{3-7x}$; h) $\frac{x}{x-5} = \frac{5}{x-5}$; i) $\frac{\sqrt{15-6x}}{2x-5} = \sqrt{4x-10}$.

1484 A p paraméter milyen értékei esetén lesz a következő egyenletek értelmezési tartománya üres halmaz?

a) $\sqrt{3x-5} = \sqrt{2p-x}$; b) $\sqrt{2x+3} = \sqrt{p-x}$;
 c) $\sqrt{4x-3} = \sqrt{-3x+p}$; d) $\sqrt{7x+5} + \sqrt{4p-x} = 12$;
 e) $\sqrt{-x} = \sqrt{5x-p}$; f) $\sqrt{2x-5} + \sqrt{3p-x} = 5$.

1485 Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

a) $(x-1)^2 + (x+2)^2 = 0$; b) $(x-2)^2 + |x+y-3| = 0$;
 c) $\sqrt{4x-y} + (x+6)^2 = 0$; d) $|3x-5| + |2x-y+1| = 0$;
 e) $|7y+5| + |3x-2y+1| = 0$; f) $\sqrt{2x-6} + |x+y+5| = 0$.

1486 Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

a) $x^2 + |21x - y + 1| + \sqrt{y + z - 3} = 0$; b) $\sqrt{6x - 2y} + \sqrt{3x - 1} + \sqrt{8y - 2z + 10} = 0$;
 c) $2x^2 + 2x + y^2 + 2xy + 1 = 0$; d) $x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 4xz - 2y - 4yz + 1 = 0$.

Egyenlet megoldása szorzattá alakítással

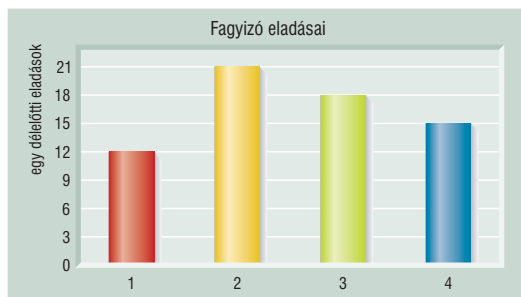
1487 Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

a) $(2x+3) \cdot (x+4) \cdot (x-1) \cdot (x+3) = 0$; b) $(4x-12) \cdot (x-11) \cdot (3x-6) \cdot (x+8) = 0$;
 c) $\frac{(2x-5) \cdot (4x+3) \cdot (x-7)}{10-4x} \cdot (3x+1) = 0$; d) $\frac{(x+3) \cdot (2x-3) \cdot (3x+5) \cdot (4x+8)}{(x+2) \cdot (10x-15)} = 0$;
 e) $(x+1) \cdot (2x+1) + (x+1) \cdot (3x-6) = 0$; f) $(x-4) \cdot (3x-1) - (x-4) \cdot (3-2x) = 0$;
 g) $(2x+1) \cdot (3x-1) - (2x+1) \cdot (x-1) = 0$; h) $(5x-3) \cdot (4x-2) + (2x+8) \cdot (5x-3) = 0$;
 i) $(8x+5) \cdot (7x-3) - (8x+5) \cdot (3x+7) = 0$;
 j) $(4-2x) \cdot (3x+1) + (2x-4) \cdot (x-2) - (4-2x) \cdot (2x-3) = 0$.



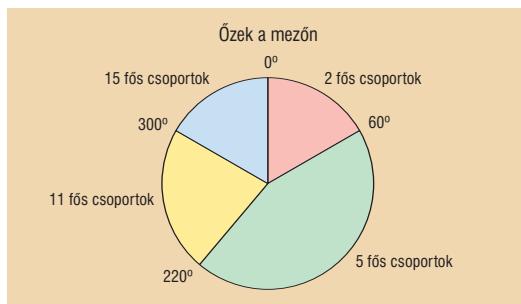
1804 Az alábbi oszlopdiagramról leolvashatjuk, hogy egy nem túl forgalmas fagyizóban hány vevő kért 1, 2, 3, illetve 4 gombócos fagyit egy délelőtt.

- Olvassuk le az egyszerre eladott gombócok számának terjedelmét és móduszát.
- Határozzuk meg az adatok mediánját, és számítsuk ki számtani közepüket is.



1805 Nemrég autóval utaztunk vidékre, és út közben többször is láttunk őzeket különböző létszámú csoportokban. Az egy-egy csoportban látott állatok számáról készült a kördiagram.

- Olvassuk le a diagramról, mi az őzek csoportlétszámainak mediánja és módusza.
- Számítsuk ki a csoportlétszámok számtani átlagát is, ha tudjuk, a módusz gyakorisága nyolc. Készítsünk gyakorisági táblázatot.



1806 A 30 fős osztály legutóbbi dolgozatának átlaga 3,5 volt, ám csak 26-an írtak.

- Ha a hiányzók is megérkeznek és megírják a dolgozatot, milyen határok között változhat az osztályátlag? Adjuk meg százalékban is az eredeti átlagtól lehetséges eltéréseket.
- Milyen eredmények születhettek a hiányzók dolgozatain, ha a teljes osztály átlaga végül 3,6 lett?

1807 Egy bank lakossági ügyfelekkel foglalkozó ágazatának év végi kimutatásából látunk részletet.

- Becsüljük meg a bankbetétek átlagos nagyságát a táblázat alapján. Miért nem tudunk pontos értéket mondani?

Bankbetét nagysága (millió Ft)	0 – 1	1 – 2	2 – 3	3 – 4	4 –
Bankbetét gyakorisága (db)	12	9	8	5	2

- Legfeljebb mennyivel lehet becslésünknel kisebb a tényleges átlagos betét nagysága?
- Mennyivel lehet becslésünknel több a tényleges átlagos betét nagysága?

10. évfolyam



**Gondolkodási
módszerek** 108

A gyökvonás 118

**A másodfokú
egyenlet** 127

Geometria 139

Szögfüggvények 174

**Valószínűség-
számítás** 185



2181 Mely valós számpárok elégítik ki a következő egyenletrendszereket?

$$\begin{array}{lll} a) \begin{cases} x \cdot y - 2x + y = 2 \\ x \cdot y = -8 \end{cases}; & b) \begin{cases} 5x^2 + 4y^2 = 49 \\ 2x^2 - y^2 = 17 \end{cases}; & c) \begin{cases} x + y = 5 \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{6} \end{cases}; \\ d) \begin{cases} \frac{1}{x-2} + \frac{3}{2-y} = 1 \\ 2y + x = 2 \end{cases}; & e) \begin{cases} x \cdot y = -8 \\ x^2 + y^2 = 20 \end{cases}; & f) \begin{cases} x \cdot y = 6 \\ 2x^2 - 3y^2 = 6 \end{cases}; \\ g) \begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 32 \\ x^2 - y^2 + x - y = 28 \end{cases}; & h) \begin{cases} x^2 + x \cdot y = 12 \\ y^2 + x \cdot y = -3 \end{cases}. \end{array}$$

2182 Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

$$a) 2x^4 - 9x^3 + 14x^2 - 9x + 2 = 0; \quad b) 6x^4 - 5x^3 - 38x^2 - 5x + 6 = 0.$$

2183 Oldjuk meg az egész számok halmazán a következő egyenleteket:

$$\begin{array}{ll} a) x^3 - 2x^2 - 11x + 12 = 0; & b) x^3 - 7x - 6 = 0; \\ c) x^3 + 7x^2 + 2x - 40 = 0. & \end{array}$$

Másodfokú egyenlőtlenségek

2184 Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenségeket:

$$\begin{array}{lll} a) x^2 - 49 > 0; & b) x^2 - 100 \leq 0; & c) x^2 - 36 \geq 0; \\ d) x^2 - 400 < 0; & e) x^2 + 114 \geq 0; & f) x^2 + 2 \leq 0; \\ g) x^2 - 15 \leq 0; & h) x^2 - 7 \geq 0; & i) x^2 + 3x \geq 0; \\ j) 2x^2 + 5x < 0; & k) 3x^2 - 8x > 0; & l) x^2 - 5x \leq 0. \end{array}$$

2185 Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenségeket:

$$\begin{array}{lll} a) x^2 + 6x - 7 < 0; & b) x^2 - 2x - 8 \geq 0; & c) x^2 - 9x + 18 < 0; \\ d) x^2 - 8x + 19 \leq 0; & e) x^2 + 7x + 6 > 0; & f) x^2 + 6x + 10 > 0; \\ g) 2x^2 - x - 6 \leq 0; & h) 4x^2 + 12x + 5 < 0; & i) 3x^2 - 8x + 7 \geq 0; \\ j) 15x^2 + 11x + 2 > 0; & k) 35x^2 - 46x + 15 \leq 0; & l) 2x^2 + 3x + 3 < 0. \end{array}$$

2186 Mely egész számok esetén teljesülnek a következő egyenlőtlenségek:

$$\begin{array}{lll} a) x^2 - 5x - 6 < 0; & b) x^2 + x - 20 \leq 0; & c) x^2 + 2x - 15 \leq 0; \\ d) x^2 + 6x + 10 > 0; & e) x^2 + 2x - 35 \leq 0; & f) -x^2 - x + 12 \geq 0; \\ g) -x^2 - 9x + 10 > 0; & h) -x^2 - 4x + 12 \geq 0; & i) -x^2 - 4x + 96 \geq 0. \end{array}$$

2187 Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenségeket:

$$\begin{array}{lll} a) x^3 + x^2 - 12x \leq 0; & b) -2x^3 - 7x^2 + 15x > 0; & c) x^4 + 4x^2 - 32 \geq 0; \\ d) x^4 - 10x^2 + 9 < 0. & \end{array}$$

2188 Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenségeket:

$$\begin{array}{llll} a) \frac{x+5}{x^2+7} < 0; & b) \frac{-x^2+3x+18}{x-4} > 0; & c) \frac{x^2-x-6}{x^2-x-2} \geq 0; & d) \frac{x^2-7x+15}{x^2+7x-18} \leq 0; \\ e) \frac{x^2-8x+15}{x^2-3x-4} < 0; & f) \frac{2x^2-7x-4}{x^2+x-6} \leq 0; & g) \frac{x^2-16}{x^2-2x-24} \leq 0; & h) \frac{2x^2+x-15}{-x^2+15x-50} \geq 0. \end{array}$$



2189 Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenségeket:

$$\begin{array}{lll} a) \frac{(x-5) \cdot (x-2)}{3-x} > 0; & b) \frac{x-1}{x-2} \geq \frac{x-2}{x-1}; & c) 1 + \frac{5}{x-2} < \frac{x-1}{2+x}; \\ d) 1 + \frac{3}{2+2x} \leq \frac{1}{x}; & e) \frac{-5}{4x^2-4x+1} > 0; & f) \frac{6}{6-5x-x^2} \geq 0. \end{array}$$

2190 Mely valós x értékek esetén igaz, hogy $x+7 \geq |x^2-3x-10|$?

2191 Adjuk meg a valós számok lehető legbővebb részhalmazát, amelyen a következő kifejezések értelmezhetők:

$$a) \frac{\sqrt{x^2-3x-28}}{\sqrt{x^2+3x-18}}; \quad b) \sqrt{\frac{x^2-3x-28}{x^2+3x-18}}.$$

2192 Melyek azok az egész számokból álló x, y, z számhármak, amelyekre teljesül az alábbi egyenlőtlenség-rendszer?

$$\left. \begin{array}{l} 3x^2 + 2yz \leq 1 + y^2 \\ 3y^2 + 2xz \leq 1 + z^2 \\ 3z^2 + 2xy \leq 1 + x^2 \end{array} \right\}.$$

Paraméteres másodfokú egyenletek

2193 A p valós paraméter mely értékeire lesznek az adott egyenlet gyökei egyenlők? Ellenőrizzük a megoldást.

$$x^2 - 8px + 2x + 15p^2 - 2p - 7 = 0.$$

2194 Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket, ha b valós paraméter:

$$\begin{array}{ll} a) x^2 + 5bx - 14b^2 = 0; & b) x^2 + (3-4b) \cdot x - 12b = 0; \\ c) 6x^2 + 13bx - 5b^2 = 0; & d) bx^2 + (4b^2-2) \cdot x - 8b = 0. \end{array}$$

2195 Vizsgáljuk meg, hogy mely b paraméterértékek esetén hány megoldása lesz a következő egyenletnek:

$$a) 2x^2 + 2bx + b + 4 = 0; \quad b) bx^2 - 8x + 10 - b = 0.$$

2196 Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket, ha b valós paraméter:

$$a) \frac{4x+b}{x-3b} + \frac{3x+7b}{x+3b} = \frac{8x^2+6b^2}{x^2-9b^2}; \quad b) \frac{x}{x^2+bx+b^2} - \frac{3b^2}{x^3-b^3} = \frac{1}{b-x}.$$

2197 A b paraméter mely értékei esetén lesz minden valós x -re pozitív a következő kifejezés:

$$a) x^2 - 2bx + 2b + 15; \quad b) bx^2 + bx - 4x + 4 - b.$$

2198 Határozzuk meg a b paraméter értékét úgy, hogy a következő kifejezés értéke minden valós x helyen negatív legyen:

$$a) bx^2 + bx + 3x + b + 3; \quad b) bx^2 - 12x + 15 - b.$$

2199 Melyek azok a b valós számok, amelyekre a következő egyenletnek pontosan egyik gyöke esik a $]0; 1[$ intervallumba:

$$(b^2+1) \cdot x^2 + (b+1) \cdot x - 2 = 0?$$



2646 Határozzuk meg a következő képlettel értelmezett függvények periódusát Karikázással jelöljük.

a) $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$; A) π ; B) 2π ; C) $\frac{\pi}{2}$;

b) $g(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$; A) 2π ; B) 4π ; C) π ;

c) $h(x) = 2 \cdot \sin\left(\frac{1}{2} \cdot x - \frac{\pi}{3}\right)$; A) 4π ; B) π ; C) $\frac{\pi}{2}$;

d) $i(x) = \sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) + 2$; A) 3π ; B) $\frac{2\pi}{3}$; C) $\frac{3\pi}{2}$.

2647 Határozzuk meg a következő $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvények periódusát:

a) $x \mapsto \sin \frac{x}{5}$; b) $x \mapsto \sin 4x$; c) $x \mapsto \sin 7x$;

d) $x \mapsto \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$; e) $x \mapsto \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$; f) $x \mapsto \sin\left(5x - \frac{\pi}{2}\right)$.

2648 Oldjuk meg a következő egyenlőtlenségeket a grafikus módszer alkalmazásával:

a) $\sin x \geq 0$; b) $\sin x > \frac{\sqrt{3}}{2}$; c) $\sin x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$;

d) $\sin x < -2$; e) $2 \cdot \sin x > -1$; f) $2 \cdot \sin x \leq -\sqrt{3}$;

g) $-\lvert \sin x \rvert < 0$; h) $\lvert \sin x \rvert \leq \frac{1}{2}$; i) $\sin^2 x \geq \frac{1}{2}$;

j) $\sin x > -\frac{1}{\sqrt{2}}$; k) $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) < \frac{\sqrt{3}}{2}$; l) $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2649 Ábrázoljuk a következő függvények grafikonját. Jellemezzük a függvényeket a következő szempontok alapján: monotonitás, szélsőérték.

a) $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x \cdot \operatorname{sgn}(\sin x)$; b) $[-\pi; \pi] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x \cdot \operatorname{sgn}(\sin |x|)$;

c) $[-\pi; \pi] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \lvert \sin |x| \rvert$.

A koszinuszfüggvény grafikonja, egyenletek, egyenlőtlenségek

2650 Ábrázoljuk a következő függvények grafikonját:

a) $x \mapsto \cos x - 1$; b) $x \mapsto \cos x + 2$; c) $x \mapsto \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$;

d) $x \mapsto \cos(x + \pi)$; e) $x \mapsto \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - 1$; f) $x \mapsto 2 \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$;

g) $x \mapsto \frac{1}{2} \cdot \cos(x - \pi)$; h) $x \mapsto -\cos x$; i) $x \mapsto 1 - \cos x$;

j) $x \mapsto 3 - 2 \cdot \cos x$; k) $x \mapsto 2 \cdot (1 + \cos x)$; l) $x \mapsto \cos \frac{x}{2}$;

m) $x \mapsto 1 - \cos \frac{x}{2}$; n) $x \mapsto -\cos 2x$; o) $x \mapsto 1 + \cos 2x$.



A FELADATOK MEGOLDÁSAI

A kötet feladatainak megoldásai letölthetők pdf-ben a **www.mozaik.info.hu/matematika** oldalról.

A megoldások megtekintéséhez az *Acrobat Reader* program használata szükséges. A program ingyenesen letölthető az internetről. (Pl. www.adobe.com).



MEGOLDÁSOK – 9. ÉVFOLYAM

Az összes 9. évfolyamos feladat megoldását az alábbi állomány tartalmazza:

M_1001_1807_09_evfolyam.pdf

Az egyes fejezetek külön-külön (kisebb méretű) állományban is elérhetők (a feladatsorszámmra és a fejezetre utaló elnevezéssel):

M_1001-1106_kombinatorika.pdf

M_1107-1193_algebra.pdf

M_1194-1282_fuggvenyek.pdf

M_1283-1474_haromszögek-negyszögek-sokszögek.pdf

M_1475-1570_egyenletek.pdf

M_1571-1759_egybevagosagi-transzformaciok.pdf

M_1760-1807_statisztika.pdf

MEGOLDÁSOK – 10. ÉVFOLYAM

Az összes 10. évfolyamos feladat megoldását az alábbi állomány tartalmazza:

M_2001_2814_10_evfolyam.pdf

Az egyes fejezetek külön-külön (kisebb méretű) állományban is elérhetők (a feladatsorszámmra és a fejezetre utaló elnevezéssel):

M_2001-2091_gondolkodas.pdf

M_2092-2148_gyokvonas.pdf

M_2149-2248_masodfoku.pdf

M_2249-2632_geometria.pdf

M_2633-2730_szogfuggvenyek.pdf

M_2731-2814_valoszinuseg-szamitas.pdf

EGY KONKRÉT FELADAT MEGOLDÁSÁNAK KERESÉSE

A pdf állományokban a **kereső funkciót** (Ctrl+f) használva az „x+*feladatsorszám*” begépelésével közvetlenül az adott sorszámú feladat megoldásához ugorhatunk (pl. az x1567 szöveg keresésével az 1567-es feladat megoldásához).