

Árki Tamás
Konfárné Nagy Klára
Kovács István
Trembeczki Csaba
Urbán János

sokszínű
Matematika
FELADATGYŰJTEMÉNY
11-12

*Gyakorló- és érettségire
felkészítő feladatokkal*



É
R
E
T
T
S
É
G
I

2024-től

érvényes
követelmények

A könyvet írta: Árki Tamás · középiskolai tanár
Konfárné Nagy Klára · középiskolai tanár
Kovács István · középiskolai tanár
Trembeczki Csaba · középiskolai tanár
Dr. Urbán János · középiskolai tanár

Lektorálta: Biróné Füle Zsuzsanna · középiskolai tanár
Kunovszki István · középiskolai tanár

Felelős szerkesztő: Tóth Katalin
Borítóterv, tipográfia: Reményfy Tamás
Ábrák: Becsei György, Horváth Péter
Fotók: Bozsó Márton, Mozaik Archívum, képügynökségek
Műszaki szerkesztő: Becsei György, Horváth Péter

A feladatgyűjtemény átdolgozása a NAT2020 és a 2024-től érvényes érettségi vizsgakövetelmények alapján készült.

Minden jog fenntartva, beleértve a sokszorosítás, a mű bővített, ill. rövidített változat kiadásának jogát is. A kiadó írásbeli hozzájárulása nélkül sem a teljes mű, sem annak része semmiféle formában (fotokópia, mikrofilm vagy más hordozó) nem sokszorosítható.

ISBN 978 963 670 004 1

Copyright: Mozaik Kiadó – Szeged, 2010, 2022, 2024

Tisztelt Olvasó!

Ez a kötet a *Sokszínű matematika 11–12. feladatgyűjteménynek* a 2024-es érettségi tapasztalatai alapján átdolgozott változata.

A feladatgyűjtemény 2010-es, első változata a szabad tankönyvválasztás idején legszínvonalasabbnak tartott és legnépszerűbb *Sokszínű matematika* tankönyvcsaládhoz készült, annak szemléletét és értékrendjét követte. Mivel igyekeztünk ennek értékeit megőrizni, a jól felépített feladatsorokon csak akkor módosítottunk, ha azt az érettségi követelményrendszer megváltozása indokolta.

A feladatok nagy száma és változatossága miatt a kötetben mindenki bőségesen találhat a maga számára kitűzött szintnek megfelelő gyakorlási lehetőséget. Így akár a Mozaik Kiadó 11.-es vagy 12.-es *Sokszínű matematika* tankönyveit, akár az állami tankönyveket használják az iskolában, a feladatgyűjtemény feladatainak megoldása önmagában is kellő segítséget nyújthat ahhoz, hogy az érettségi felkészüléshez szükséges feladatmegoldási jártasságra szert tegyenek.

A feladatok nehézségének jelölése

Segíti az eligazodást, hogy a feladatok sorszámának színezése utal azok nehézségi szintjére:

3142 **Gyakorlófeladatok:** olyan feladatok, amelyek – akár a tanórákon, akár házi feladatként – elősegítik a megtanult ismeretek elmélyítését. A középszintű érettségi I. részében található „villámkérdésekhez” hasonlóan könnyen megoldhatók. (*narancssárga színű feladatsorszám*)

3467 **Középszintű feladatok:** az adott témakörben más témákhoz is kapcsolódó problémák, melyek megoldása elősegíti a tantárgy komplex ismeretanyagának ismétlését, a matematikai kompetenciák elsajátítása mellett azok alkalmazását. (*kék színű feladatsorszám*)

3831 **Emelt szintű feladatok:** az emelt szintű érettségire való felkészülést segítő problémák, melyek nemcsak megoldásuk nehézségében különböznek az előzőektől, hanem felvillantják a matematika szépségét is. (*bordó színű feladatsorszám*)

3852 **Kiegészítő feladatok:** az új alaptantervben már nem tárgyalt, de matematika irányú továbbtanulás esetén hasznos ismereteket tartalmazó feladatok. (*lila színű feladatsorszám*)

A feladatok sorszámozása

A *Sokszínű matematika* feladatgyűjtemény köteteiben a 9. évfolyam feladatai az 1001., a 10. évfolyam feladatai a 2001., a 11. évfolyamé a 3001., a 12. évfolyamé pedig a 4001. sorszámmal kezdődnek.

A 12.-es kötet második részében található *Rendszerező összefoglalás* már célzottan az érettségi felkészülés szempontjai szerint tekinti át a négy év tananyagát. Ennek feladatai az 5001. sorszámmal indulnak.

Megoldások

A feladatok megoldásai letölthetők a www.mozaik.info.hu/matematika oldalról. (*Részletes információ a könyv 295. oldalán olvasható.*)

A gyakorlófeladatok esetén csak a végeredményt közöljük, más esetekben pedig annyira részletezzük a megoldásokat, amennyire azt pedagógiai szempontból szükségesnek tartottuk.

A kitűzött feladatok megoldásához jó munkát és jó tanulást kívánunk!

A szerzők



TARTALOMJEGYZÉK

Bevezető	5
A feladatgyűjteményben használt matematikai jelölések	10

A 11. évfolyam feladatai

11.1. *Kombinatorika, gráfok* (3001–3160)

Fibonacci-számok	12
Permutációk, variációk	12
Ismétlés nélküli kombinációk, Pascal-háromszög	14
Binomiális együtthatók, ismétléses kombináció	16
Vegyes összeszámlálási feladatok (kiegészítő anyag)	18
GRÁFOK – pontok, élek, fokszám	19
GRÁFOK – út, vonal, séta, kör, Euler-vonal	22
Fagráfok	24
A kombinatorika gyakorlati alkalmazásai	25
Vegyes feladatok	27

11.2. *Hatvány, gyök, logaritmus* (3161–3241)

Hatványozás és gyökvonás (emlékeztető)	29
Hatványfüggvények és gyökfüggvények	30
Törtkitevőjű hatvány	31
Irracionális kitevőjű hatvány, exponenciális függvény	32
Exponenciális egyenletek, egyenletrendszerek, egyenlőtlenségek	33
A logaritmus fogalma	37
A logaritmusfüggvény	38
A logaritmus azonosságai	40
Logaritmikus egyenletek, egyenletrendszerek, egyenlőtlenségek	41
Vegyes feladatok	44

11.3. *A trigonometria alkalmazásai* (3242–3459)

Vektorműveletek rendszerezése, alkalmazások (emlékeztető)	47
A skaláris szorzat	48
Vektor hossza, és skaláris szorzat a koordináta-rendszerben	50
A szinusztétel	52
A koszinusztétel	54
Trigonometrikus összefüggések alkalmazásai	55
Összegzési képletek	57





Az összegzési képletek alkalmazásai	58
Trigonometrikus egyenletek, egyenletrendszerek	60
Trigonometrikus egyenlőtlenségek	63
Vegyes feladatok	64

11.4. Függvények (3460–3554)

Az exponenciális és logaritmussfüggvény	67
Egyenletek és függvények	69
Trigonometrikus függvények	70
Trigonometrikus egyenletek, egyenlőtlenségek (kiegészítő anyag)	72
Vegyes feladatok	74
Inverz függvények	78



11.5. Koordináta-geometria (3555–3776)

Vektorok a koordináta-rendszerben. Műveletek koordinátaikkal adott vektorokkal (emlékeztető)	80
Két pont távolsága. Két vektor hajlásszöge. Területszámítási alkalmazások	82
Szakasz osztópontjának koordinátái. A háromszög súlypontjának koordinátái	84
Az egyenest meghatározó adatok a koordináta-rendszerben	87
Az egyenes egyenletei	90
Két egyenes metszéspontja, távolsága, hajlásszöge	94
A kör egyenlete	97
A kör és az egyenes kölcsönös helyzete; két kör közös pontjai	99
A parabola	101
Vegyes feladatok	103



11.6. Valószínűség-számítás, statisztika (3777–3892)

Klasszikus valószínűségi modell	106
Visszatevéses mintavétel	111
Mintavétel visszatevés nélkül	113
Valószínűségi játékok gráfokon (kiegészítő anyag)	114
Valóság és statisztika	116
Vegyes feladatok	117





A 12. évfolyam feladatai

12.1. Logika, bizonyítási módszerek (4001–4067)

Logikai feladatok, kijelentések	120
Logikai műveletek – negáció, konjunkció, diszjunkció	123
Logikai műveletek – implikáció, ekvivalencia	125
Teljes indukció (emelt szintű tananyag)	127
Vegyes feladatok	128

12.2. Számsorozatok (4068–4165)

A sorozat fogalma, példák sorozatokra	130
Példák rekurzív sorozatokra	131
Számtani sorozatok	131
Mértani sorozatok	134
Kamatszámítás, törlesztőrészek kiszámítása	135
Vegyes feladatok	136

12.3. Térgometria (4166–4511)

Térelemek	139
Testek osztályozása, szabályos testek	143
A terület fogalma, a sokszögek területe	147
A kör és részeinek területe	151
A térfogat fogalma, a hasáb és a henger térfogata	154
A gúla és a kúp térfogata	159
A csonka gúla és a csonka kúp	162
A gömb térfogata és felszíne	165
Egymásba írt testek (kiegészítő anyag)	167
Vegyes feladatok I.	169
Vegyes feladatok II.	171

12.4. Valószínűség-számítás, statisztika (4512–4578)

Geometriai valószínűség	174
Várható érték	176
Statisztika	177
Vegyes feladatok	181





Készüljünk az érettségire!

12.5. Rendszerező összefoglalás (5001–5617)

Gondolkodási módszerek (5001–5139)

Halmazok	184
Kijelentések, események	187
Kombinatorika	188
Gráfok	192
Valószínűség-számítás	193
Statisztika	198



Algebra és számelmélet (5140–5303)

Számok és műveletek	201
Számelmélet, oszthatóság	202
Hatvány, gyök, logaritmus	205
Műveletek racionális kifejezésekkel	209
Egyenletek, egyenlőtlenségek	211
Egyenletrendszerek	219



Függvények (5304–5404)

A függvény fogalma, grafikonja, egyszerű tulajdonságai	222
Műveletek függvényekkel	231
Függvénytulajdonságok	233

Geometria (5405–5617)

Alapvető fogalmak	239
Geometriai transzformációk	241
Vektorok. Szögfüggvények	247
Nevezetes síkidomok tulajdonságai	251
Koordináta-geometria	256



12.6. Érettségi gyakorló feladatsorok

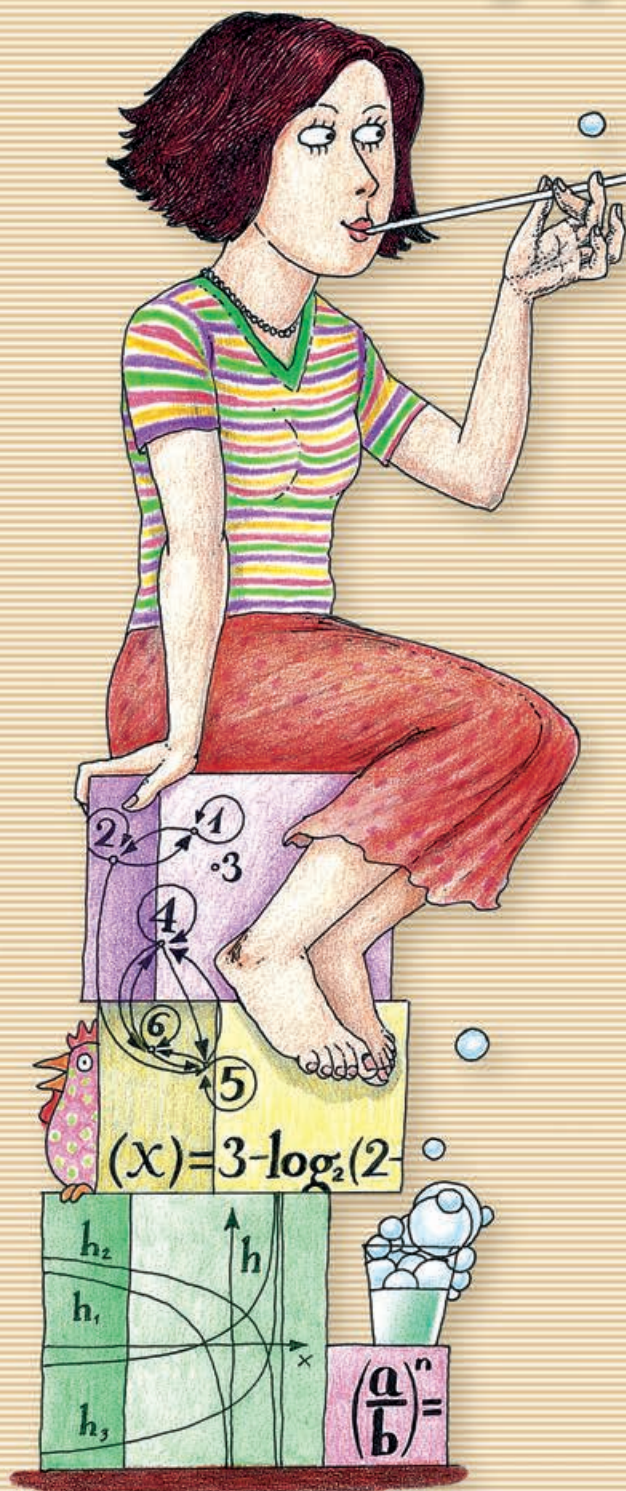
Középszintű feladatsorok	262
Emelt szintű feladatsorok	286



A feladatgyűjteményben használt matematikai jelölések

Jelölés	Magyarázat
$\mathbb{N}$	a természetes számok halmaza
$\mathbb{Z}$	az egész számok halmaza
$\mathbb{Z}^+; \mathbb{Z}^-$	a pozitív egész számok halmaza; a negatív egész számok halmaza
$\mathbb{Q}; \mathbb{Q}^*$	a racionális számok halmaza; az irracionális számok halmaza
$\mathbb{Q}^+; \mathbb{Q}^-$	a pozitív racionális számok halmaza; a negatív racionális számok halmaza
$\mathbb{R}$	a valós számok halmaza
$\mathbb{R}^+; \mathbb{R}^-$	a pozitív valós számok halmaza; a negatív valós számok halmaza
$a \in A; b \notin A$	a eleme az A halmaznak; b nem eleme az A halmaznak
$A \subseteq B$	A halmaz részhalmaza B halmaznak
$C \subset D$	C halmaz valódi részhalmaza D halmaznak
$E \not\subset F$	E halmaz nem részhalmaza F halmaznak
$A \cup B; C \cap D; E \setminus F$	A és B halmaz uniója; C és D halmaz metszete; E és F halmaz különbsége
$\emptyset, \{\}$	üres halmaz
$\bar{A}$	az A halmaz komplementere
$ A $	az A halmaz elemszáma
$A \Rightarrow B; C \Leftrightarrow D$	ha A , akkor B ; C akkor és csak akkor, ha D
$[a; b]$	a, b zárt intervallum
$[a; b[$	a, b balról zárt, jobbról nyitott intervallum
$]a; b]$	a, b balról nyitott, jobbról zárt intervallum
$]a; b[$	a, b nyitott intervallum
$n!$	n faktoriális: $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$
$f: x \mapsto$	az f függvény hozzárendelési szabálya
$f(x_0)$	az f függvény helyettesítési értéke az x_0 helyen
$ x $	az x szám abszolút értéke
$[x]$	az x szám egészrésze
$\{x\}$	az x szám törtrésze
$\sqrt{x}$	az x szám négyzetgyöke
$\sqrt[n]{x}$	az x szám n -edik gyöke
$a b$	az a szám osztója a b számnak
(a, b)	az a és b szám legnagyobb közös osztója
$[a, b]$	az a és b szám legkisebb közös többszöröse
$\overrightarrow{AB}$	az A pontból B pontba mutató vektor
$\vec{a}, \vec{0}$	a vektor, nullvektor
$\sphericalangle$	szög

11. évfolyam



**Kombinatorika,
gráfok** 12

**Hatvány, gyök
logaritmus** 29

**A trigonometria
alkalmazásai** 47

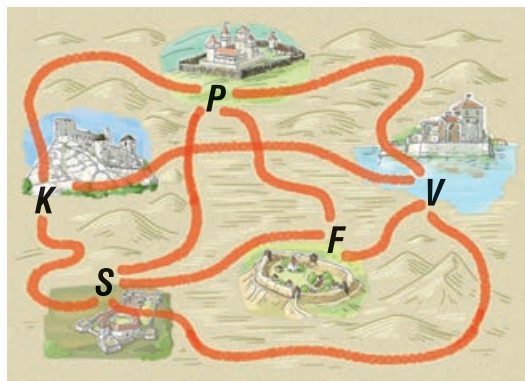
Függvények 67

**Koordináta-
geometria** 80

**Valószínűség-
számítás, 106
statisztika**

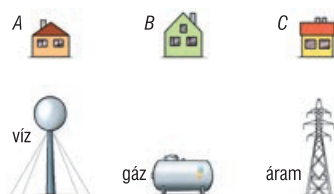


- 3097** A, B, C, D pontok a síkon. Hány különböző egyszerű gráfot készíthetünk a négy pontból, ha
- sem a pontokat, sem az éleket nem különböztetjük meg?
 - két élt különbözőnek tekintünk, ha legalább egyik végpontjuk más (pl. AC és AD)?
- 3098** Tekintsünk n megkülönböztetett pontot. Hány különböző egyszerű gráfot készíthetünk a pontokból? (Két élt különbözőnek tekintünk, ha legalább egyik végpontjuk más, $n \in \mathbb{Z}^+$.)
- 3099** Lehetséges-e, hogy egy n pontú egyszerű gráfban a pontok fokszámai különböző, de egymás után következő egész számok? ($n \in \mathbb{Z}^+$)
- 3100** a) Egy kalandjátékban bejártunk minden Kővárból induló utat, ám Palánkvárból, Sárvárból, Fővárból és Vízivárból csak 2-2 utat. Hány élű a bejárt utak komplementer gráfja? Adjunk rá példát!
- b) Van-e olyan egyszerű gráf, amely *izomorf a komplementerével*? Mi ennek a szükséges feltétele?



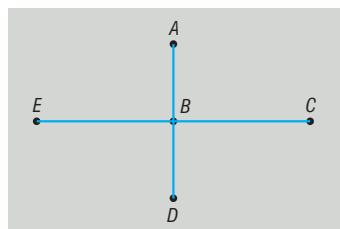
- 3101** a) Három élből szeretnénk egyszerű gráfot készíteni. Legalább hány pontú legyen a gráf, ha ebben a gráfban a lehető legtöbb különböző három élű egyszerű gráfot akarjuk előállítani? (A csúcsokat és az éleket nem különböztetjük meg.)
- b) Általánosítsuk az előző kérdést n élre. Ekkor mit mondhatunk?
- 3102** Lehetséges-e, hogy egy n pontú gráfban a pontok fokszámai különböző, de egymás után következő pozitív egész számok? ($n \in \mathbb{Z}^+$)

- 3103** Egy faluban van három ház (A, B és C), velük szemben három közműcsatlakozás (víz, gáz és áramszolgáltatás). Minden közművet minden házhoz be akarunk vezetni. Megtehetjük-e ezt úgy, hogy egyik közműcsatlakozás sem halad át egy másik alatt vagy felett?



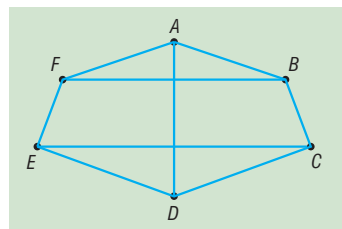
GRÁFOK – út, vonal, séta, kör, Euler-vonal

- 3104** Adjunk meg két sétát az alábbi gráfban, melyen át A -ból E -be juthatunk.

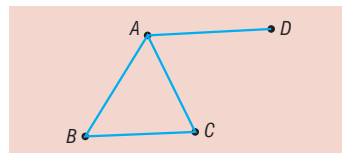




3105 Adjunk meg öt olyan utat az alábbi gráfban, amelyek az A pontból indulnak, minden pontot érintenek és különböző a végpontjuk.

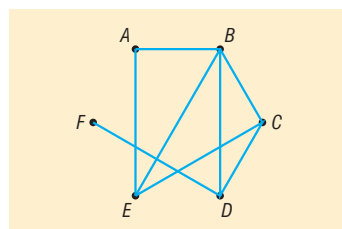


3106 Írjuk fel az alábbi gráfban az összes olyan vonalat, amely a gráf minden élét tartalmazza.



3107 Adjunk meg az alábbi gráfban olyan bejárást, ami az A pontból F -be visz és

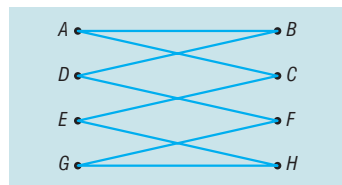
- séta, de nem vonal és nem út;
- vonat, de nem út;
- út.



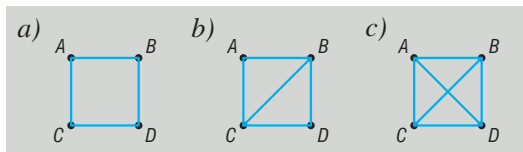
3108 Tartalmaz-e kört az ábrán látható „cipőfűző” gráf? ($\Rightarrow$)

3109 Van-e olyan gráf, amelyben van zárt és nyitott Euler-vonal is?

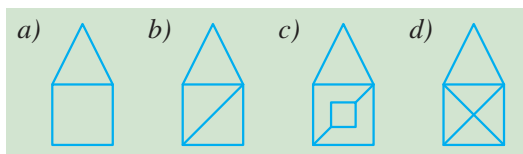
3110 Van-e olyan séta, amely út, de nem vonal?



3111 Az alábbi gráfok közül melyikben van zárt és melyikben van nyitott Euler-vonal?



3112 Melyik házikót tudjuk lerajzolni a ceruza felemelése nélkül úgy, hogy egyik vonalat sem rajzoljuk át többször?

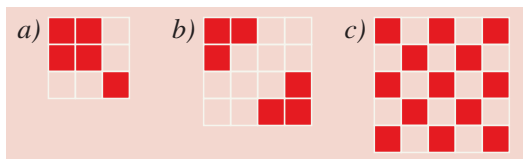


3113 Rajzoljuk le azokat az egyszerű, nem összefüggő gráfokat, melyekben a pontok fokszámai:

- 1, 1, 1, 1, 2;
- 2, 2, 2, 2, 2, 2;
- 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3.

3114 a) Ábrázoljuk a következő pixelekből felépített ábrákat irányított gráfok segítségével.

b) Hagyjuk el a kapott gráfokból az irányítást. Mi a közös a három gráfban?





3636 Az alábbi feladatokban határozzuk meg a p paraméter értékét úgy, hogy az irányvektorokkal adott e és f egyenes merőleges legyen egymásra:

a) $\vec{v}_e(2; 1)$ és $\vec{v}_f(5; p)$;

b) $\vec{v}_e(p; -2)$ és $\vec{v}_f(3; p)$;

c) $\vec{v}_e(p; 1)$ és $\vec{v}_f(p; -8)$.

3637 Mekkora szöget zár be egymással az a két egyenes, amelyek meredeksége 2, illetve -3 ?

3638 Az ABC háromszög csúcspontjainak koordinátái: $A(-3; 2)$, $B(5; 3)$ és $C(3; -4)$.

a) Írjuk fel mindhárom oldalegyenes egy-egy irányvektorának koordinátáit.

b) Számítsuk ki az A csúcsonál lévő szögfelező egy irányvektorának koordinátáit.

c) Mekkora az A csúcsonál lévő szögfelező irányszöge?

3639 Bizonyítsuk be, hogy ha két egyenes mindegyike rendelkezik irányszöggel, és azok értéke m_1 , illetve m_2 , továbbá a két egyenes nem merőleges egymásra, akkor a két egyenes φ hajlásszöge:

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2} \right|.$$

Az egyenes egyenletei

Az egyenes iránýtényezőes egyenlete ($y = mx + b$)

3640 Írjuk fel a P pontra illeszkedő, m irányszöggel rendelkező egyenes egyenletét, ha

a) $P(0; 0)$ és $m = 0$;

b) $P(0; 0)$ és $m = 2$;

c) $P(2; -3)$ és $m = -\frac{1}{3}$;

d) $P(-5; 1)$ és $m = 4$;

e) $P(-2; -1)$ és $m = -2$;

f) $P(1; -4)$ és $m = -\frac{2}{3}$.

Ábrázoljuk az adott egyeneseket.

3641 Írjuk fel az AB egyenes egyenletét, ha

a) $A(0; 0)$ és $B(2010; 0)$;

b) $A(-2; -2)$ és $B(-2; 5)$;

c) $A(1; 3)$ és $B(-1; -3)$;

d) $A(2; -3)$ és $B(-1; 7)$;

e) $A\left(-\frac{1}{3}; \frac{2}{5}\right)$ és $B\left(\frac{2}{3}; -\frac{3}{5}\right)$;

f) $A(\sqrt{27}; \sqrt{3})$ és $B(\sqrt{12}; -\sqrt{3})$.

3642 Egy egyenesre illeszkednek-e a megadott pontok? Ha igen, akkor írjuk fel az egyenes egyenletét.

a) $A(-2; 5)$, $B(0; 1)$ és $C(4; -7)$;

b) $A(2005; 2005)$, $B(2007; 2008)$ és $C(2013; 2017)$;

c) $A(3; -3)$, $B(11; 9)$ és $C(-21; -39)$;

d) $A(5; 1)$, $B(-10; 7)$, $C(100; -38)$.

3643 Írjuk fel az A ponton átmenő, a PQ egyenessel párhuzamos, illetve arra merőleges egyenesek egyenletét, ha

a) $A(0; 0)$, $P(1; -3)$ és $Q(2; 1)$;

b) $A(-2; 4)$, $P(7; 1)$ és $Q(-1; 7)$;

c) $A(-3; -2)$, $P(0; 0)$ és $Q(1; 4)$;

d) $A(1; -5)$, $P(-5; 2)$ és $Q(2; 8)$.



3644 Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely áthalad az A ponton, továbbá párhuzamos az egyenletével adott e egyenessel.

a) $A(1; 1)$ és $e: y = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$;

b) $A(-3; 2)$ és $e: y = 2x - 4$;

c) $A(0; 0)$ és $e: y = x + 5$;

d) $A(-2; -5)$ és $e: y = -\frac{2}{3}x + 2$.

3645 Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely áthalad az A ponton, továbbá merőleges az egyenletével adott e egyenesre.

a) $A(0; 0)$ és $e: y = x$;

b) $A(-2; 2)$ és $e: y = 2x + 15$;

c) $A(7; 1)$ és $e: y = 3x + 1$;

d) $A(-3; -2)$ és $e: y = -x - 1$.

3646 Ábrázoljuk a koordináta-rendszerben az egyenletükkel megadott egyeneseket. Ahol szükséges, ott írjuk át az egyenes egyenletét $y = mx + b$ alakba, majd adjuk meg az egyenesek meredekségét (ha létezik).

a) $x = 2$;

b) $y = 5$;

c) $y = -2x + 4$;

d) $x + 2y = 6$;

e) $2x + 3y = 6$;

f) $3x - y = 1$.

3647 Az ABC háromszög csúcsainak koordinátái: $A(-2; 3)$, $B(2; -2)$ és $C(6; 2)$.

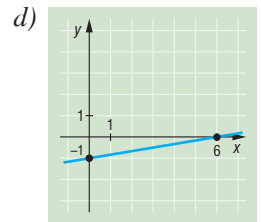
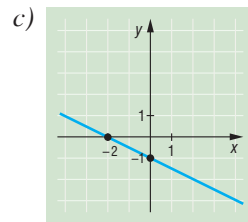
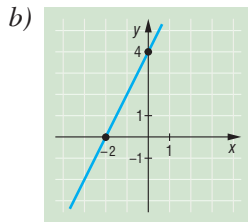
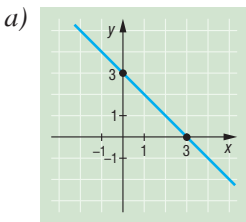
a) Írjuk fel a háromszög oldalegyeneseinek egyenletét $y = mx + b$ alakban.

b) Döntsük el az alábbi egyenletükkel megadott egyenesekről, hogy van-e közöttük olyan, amelyik a háromszög valamelyik oldalegyenesével párhuzamos.

(1) $x - y = 7$; (2) $4x = 3y + 11$; (3) $x + 8y = 22$; (4) $5x + 4y = 6$; (5) $\frac{x}{4} - \frac{y}{4} = 1$.

c) Van-e a fenti egyenesek közt olyan, amelyik megegyezik a háromszög valamelyik oldalegyenesével?

3648 Írjuk fel az ábrákon látható egyenesek egyenletét. Minden esetben adjuk meg az egyenes meredekségét (ha létezik).



3649 Írjuk fel az AB szakasz felezőmerőlegesének egyenletét, ha

a) $A(0; 0)$ és $B(2010; 0)$;

b) $A(-2; -2)$ és $B(-2; 5)$;

c) $A(1; 3)$ és $B(-1; -3)$;

d) $A(-1; 2)$ és $B(1; 4)$.

3650 Ábrázoljuk a $y = -2x + 5$ egyenletű egyenest a koordináta-rendszerben. Írjuk fel az egyenes P pontra vonatkozó tükörképének egyenletét, ha

a) $P(2; 1)$;

b) $P(-1; 3)$;

c) $P(0; 0)$.

3651 Az ABC háromszög csúcsainak koordinátái: $A(-2; 2)$, $B(3; -3)$ és $C(5; 3)$.

a) Írjuk fel a háromszög oldalegyeneseinek egyenletét.

b) Írjuk fel a háromszög magasságvonalaik egyenletét.

c) Számításokkal igazoljuk, hogy az $M(2,5; 0,5)$ koordinátájú pont illeszkedik a háromszög minden magasságvonalára.



11.6. VALÓSZÍNŰSÉG-SZÁMÍTÁS, STATISZTIKA

Klasszikus valószínűségi modell

3777 A hagyományos dobókockával egyet dobunk, és a 32 lapos magyar kártya-csomagból keverés után egyetlen lapot húzunk. Komplementer események-e az alábbiak? Amennyiben nem, adjuk meg összegük komplementerének valószínűségét.

a) $A = \{\text{párosat dobunk}\}$ és $B = \{\text{páratlant dobunk}\}$.

b) $A = \{\text{prím dobás}\}$ és $B = \{\text{összetett szám dobás}\}$.

c) $A = \{\text{pirosat húzunk}\}$ és $B = \{\text{hetest húzunk}\}$.

3778 Mennyi a valószínűsége, hogy az alaposan megkevert 32 lapos magyar kártyából négy lapot kihúzva, a kihúzott lapok között lesz piros? Az eredményt adjuk meg egy tizedesjegy pontossággal.

3779 Egy dobozban 20 natúr túrószelet van. Legalább mennyi töltött túrószeletet kell a dobozba tenni, hogy egy natúr túrószelet kiválasztásának valószínűsége 0,2 alá csökkenjen?

3780 Egy társasház lakóinak kor szerinti megoszlását kördiagramon ábrázolták. A 40 éves, vagy annál idősebb lakókat 60° -os középponti szögű körívek jelöli. Egy lakót véletlenszerűen kiválasztva ebből a társasházból, mekkora valószínűséggel lesz az illető 40 évesnél fiatalabb?

3781 Weöres Sándor: *Csiribiri* című versében összeírtuk a magánhangzók előfordulási gyakoriságait. Mennyi a valószínűsége, hogy a vers 108 magánhangzójából egy találmásra kiválasztott magánhangzó az „u” előtt van az ábécében?

Betű	a	á	e	é	i	í	o	ó	ö	ő	u	ú	ü	ű
Darab	25	12	4	3	50	1	8	1	1	1	0	0	2	0

3782 Tegyük a telitalálat elérésének valószínűsége szerint növekvő sorrendbe az alábbi játékokat: A : ötös lottó, B : hatos lottó, C : totó. (Az ötös lottón 90 számból ötöt, a hatos lottón 45 számból hatot húznak, a totón $13 + 1$ mérkőzésre tippelhetünk hazai győzelmet, vendég győzelmet, illetve döntetlent.)

3783 Mekkora valószínűséggel érünk el egy szelvénnel az ötös lottón nyereményt? (Az ötös lottón legalább 2 találatot kell elérni, hogy kifizetés történjen.)

3784 Mennyi a valószínűsége, hogy a hatos lottón nyereményt fizetnek ki nekünk, ha egy szelvénnel játszunk? (A hatos lottón legalább 3 találatot kell elérni, hogy kifizetés történjen.)

3785 Mennyi a valószínűsége, hogy a totón nyereményt fizetnek ki nekünk, ha egy tipposzlopot töltünk ki? (A totón legalább 10 találatot kell elérni, hogy kifizetés történjen. A 14. sort csak az első 13 sor helyes kitöltése esetén veszik figyelembe.)

3786 Magdi tolltartójában háromféle toll található. Egy részüknek fekete az alja, egy részüknek fémszínű a teteje, egy részük pedig mindkét tulajdonsággal rendelkezik. A tolltartóból találmásra kivesszünk egy tollat. Ennek $\frac{3}{4}$ valószínűséggel lesz fekete az alja; de 0,23 valószínűséggel lesz fekete az alja és fémszínű a teteje. Mekkora valószínűséggel lesz a véletlenszerűen kiválasztott toll teteje fémszínű?

3787 Egy dobozban 100 színes labda van: piros, fehér és piros-fehér. Annak a valószínűsége, hogy egy labdát kihúzva, azon lesz piros szín, 0,6. Annak a valószínűsége 0,75, hogy egy labdát kihúzva, lesz rajta fehér szín. Mennyi piros-fehér labda van a dobozban?

12. évfolyam



Logika,
bizonyítási
módszerek

120

Számsorozatok

130

Térgeometria

139

Valószínűség-
számítás,
statisztika

174



12.1. LOGIKA, BIZONYÍTÁSI MÓDSZEREK

Logikai feladatok, kijelentések

4001 Logikai kijelentésnek tekinthetjük-e az alábbi állításokat?

- a) Jómagam matematikából okos vagyok.
- b) Jómagam matematikából ötös voltam tavaly év végén.
- c) Te vagy a legszebb lány a világon!
- d) Repül a bálna.
- e) Sápadt a Hold.
- f) A Hold fényrendje ebben a pillanatban 5 vizuális magnitúdó.

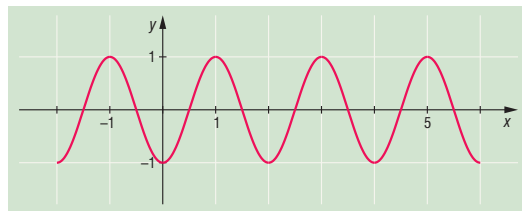
4002 Logikai kijelentések-e az alábbi mondatok? Ha igen, akkor mi a logikai értékük?

- a) A 100 nagy szám.
- b) A 100 a 10-nek négyzete.
- c) A 100 csak a 10-nek négyzete.
- d) Láttál-e már karón varjút?
- e) Esik az eső.
- f) Józsi alacsonyabb, mint Géza; Géza alacsonyabb, mint Feri, és Józsi magasabb, mint Feri.

4003 Adjuk meg a következő kijelentések logikai értékeit.

- a) A 12 osztója a 156-nak.
- b) Minden téglalap négyzet.
- c) A rombusz átlói egymás felezőmerőlegesei.
- d) A szinuszhullám transzformálható úgy, hogy minden egész helyen szélsőértéke legyen.
- e) Az $f(x) = \{\operatorname{sgn}([x^2 - 4])\}$ függvény szigorúan monoton növekvő.

(Utóbbi kérdésben $[x]$ az x egészrészét, $\{x\}$ az x törtrészét jelenti.)



4004 Töltsük ki az alábbi 5+1-es geometriai totó tipposzlopát. Jelentse 1 az igaz, 2 a hamis állítást, X pedig, ha az állítás nem kijelentés.

Állítás	Tipp
1. Van olyan deltoid, amely rombusz.	
2. Minden rombusz deltoid.	
3. Nem létezik olyan paralelogramma, amely deltoid.	
4. Minden deltoid trapéz?	
5. Van olyan trapéz, amely deltoid.	
+1. A tipposzlop nem telitalálatos.	



- 4005** Döntsük el, igazak-e az alábbi kijelentések. Töltsük ki a táblázatot.

Állítás	Logikai értéke
a) Az öt négyzetgyöke racionális szám.	
b) Az öt négyzetgyöke valós szám.	
c) Van olyan szám, amely negatív, és abszolút értéke az öt négyzetgyöke.	

- 4006** Jancsi és Juliska gyermekkorukban sokat játszottak együtt a mézeskalács ház kertjében. A *hazudós* játékuk vagy úgy kezdődött, hogy Jancsi kijelentette:

a) „*Én most hazudok.*”

vagy úgy, hogy azt mondta:

b) „*Én most hazudni fogok.*”

Logikailag egyenértékű-e a két kijelentés?

- 4007** Ravaszdi Rudolf elsőéves hallgató a rókaképzőben. A hét első négy napján hazudik, a többi napon igazat mond. Mikor mondhatta a következőket?

a) „*Holnap igazat mondok.*”

b) „*Holnap hazudok.*”

- 4008** Ravaszdi Rudolf elvégezte a rókaképzőt, nemrég diplomázott. Már minden második napon mond csak igazat (jó eséllyel fel is veszik a *masterképzésre*). Mikor mondhatta a következőket?

a) „*Holnap hazudok.*”

b) „*Holnap igazat mondok.*”

- 4009** Egy bolondokházában négyféle emberrel találkozhatunk. Vannak egészségesek, akik meg tudják különböztetni az igaz és a hamis dolgokat, és vannak betegek, akik pontosan fordítva gondolják: az igazat hamisnak és a hamisat igaznak vélik. Másrészt a lakók egy része ápolat, a többiek orvosok. Sajnos lehetnek az intézetben egészséges ápoltak és beteg orvosok is.

A bolondokházában Jani kijelenti: „*Nem vagyok egészséges orvos.*” Mi Jani:

a) beteg ápolat; b) egészséges ápolat; c) beteg orvos; d) egészséges orvos?

- 4010** A tizedikes fiúk foci közben kirúgták az ablakot. A „*Ki rúgta ki az ablakot?*” kérdésre csapat négy tagja – Laci, Marci, Nándi, valamint Osi – a következőket válaszolta ebben a sorrendben:

Laci: „*Nándi volt.*” Marci: „*Nem én voltam.*” Nándi: „*Osi tette.*” Osi: „*Nándi hazudik.*”

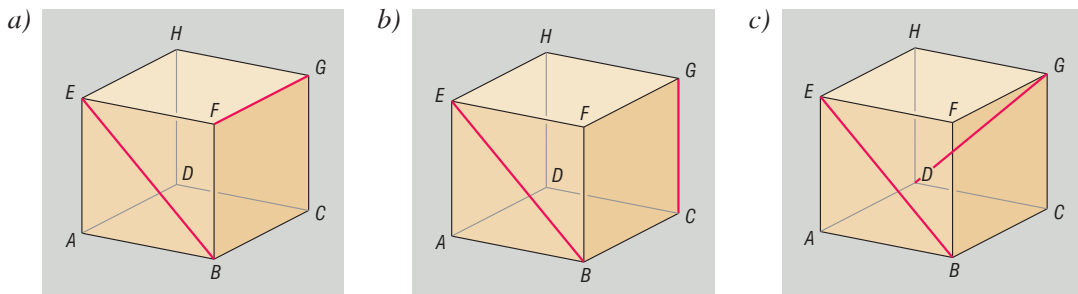
Később kiderült, hogy pontosan ki tette, és az is, hogy a fiúk közül csak hárman mondtak igazat. Döntsük el ennyi információból mi is, hogy László, Márton, Nándor, Oszkár közül ki volt a tettes.

- 4011** Mivel az ellentétek vonzzák egymást, az igazmondó juhász és a hazudós királylány összeházasodott. Nos, hosszú együttélés után már nem mondott mindig igazat a juhász, és nem hazudott mindig a királylány. Azonban, hogy az ellentét megmaradjon, egyszerre nem teszik ugyanazt. Döntsük el egyetlen kérdéssel, hogy ki mond éppen igazat, és melyikük hazudik.

- 4012** Tizenegyedik évfolyam elején az osztályba négy új diák érkezett. Keresztneveik: Emma, Tivadar, Konrád, Csilla. Vezetékeik: Kis, Nagy, Fekete és Fehér, de ebben a sorrendben egyik vezetéknév sem a sorban megfelelő helyen álló keresztnévhez tartozik. Azt is tudjuk, hogy Tivadar, Fekete és Fehér különböző iskolából érkeztek, valamint Konrád és Emma vezetékei ellentétek. Mi az új tanulók teljes neve?



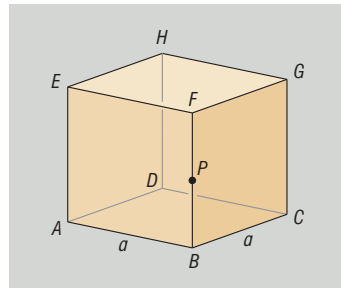
- 4176** Mekkora szöget zár be a kocka egyik csúcsából kiinduló lapátlója és testátlója?
- 4177** Mekkora távolságra vannak az a élű kocka csúcsai valamely élének felezőpontjától? Hány különböző távolságot kaphatunk eredményül?
- 4178** Határozzuk meg az a élű $ABCDEFGH$ kocka pirossal jelölt szakaszainak távolságát és hajlásszögét. Minden esetben rajzoljuk be a piros szakaszokat tartalmazó egyenesek normál transzverzálisát.



- 4179** A 4170. feladat ábráján látható kocka $ABFE$, $BCGF$ és $EFGH$ lapjainak középpontja egy háromszöget fog közre. Számítsuk ki a háromszög oldalainak hosszát, ha a kocka minden éle 5 cm hosszú. Az eredményt egy tizedesjegyes pontossággal adjuk meg.
- 4180** Bizonyítsuk be, hogy ha egy kocka négy oldallapjának középpontja egy síkra illeszkedik, akkor négyzetet fog közre. Számítsuk ki a négyzet területét, ha a kocka éle a egység hosszúságú.

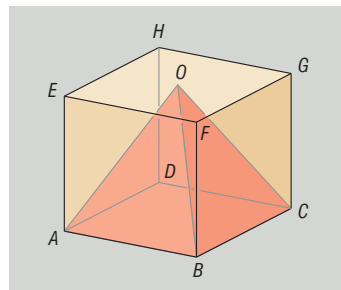
- 4181** Az $ABCDEFGH$ kocka éleinek hossza a , BF élének felezőpontja pedig P .

- a) Milyen távolságra van a P pont a kocka H csúcsától?
- b) Mekkora a hossza a legrövidebb olyan útnak, amely P -ből H -ba vezet és csak a kocka élei mentén halad?
- c) Mekkora a hossza a legrövidebb olyan útnak, amely a kocka lapjain halad, és a P pontot a H ponttal köti össze?



- 4182** A 12 cm élű $ABCDEFGH$ fakockából kifaragtuk az $ABCD O$ gúlát, ahol O a kocka fedőlapjának középpontja.

- a) Mekkora a keletkező gúla élei?
- b) Mekkora szöget zár be a gúla oldallapja az $ABCD$ síkkal?
- c) Mekkora szöget zár be a gúla oldaléle az alaplappal?
- d) Mekkora szöget zár be a gúla oldaléle az alapéllel?
- e) Mekkora szöget zár be egymással a gúla két szomszédos oldallapja?



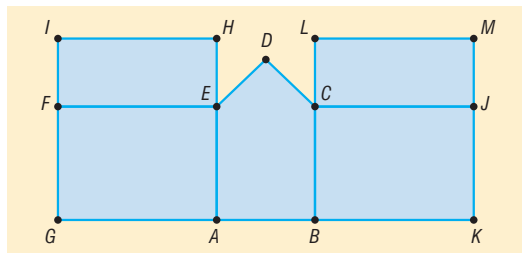
- 4183** Egy kocka csúcsai közül véletlenszerűen kiválasztunk hármat. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a kiválasztott csúcsok által közrefogott háromszög

- a) szabályos; b) derékszögű?

- 4184** Igaz-e, hogy ha két párhuzamos (egymástól különböző) síkot metszünk egy harmadik síkkal, akkor a kialakuló két metszésvonal egymással párhuzamos? Válaszunkat indokoljuk.



4185 Egy óvodásoknak készült magazinban gyakran találjuk kivágható és összeragasztható testek síkbeli hálóját. A legutóbbi számból az ábrán is látható mozdonygarázs hálózatát lehetett kivágni.



- Az elkészült garázs mely élei párhuzamosak az AE éllel?
- A garázs mely élei merőlegesek az ED szakaszt tartalmazó egyenesre?
- A garázsnek melyek azok az élei, amelyek az EF szakaszt tartalmazó egyenessel kitérő helyzetű egyenesre illeszkednek?

4186 A Balaton-felvidék 1 : 40 000 méretarányú turistatérképének tanúsága szerint a Szent György-hegy magassága 415 méter, a szomszédos Csobáncé 376 méter.

- Milyen távolságra van egymástól a két hegy csúcsa a valóságban, ha a térképen mért távolságuk 15 cm? A választ egy tizedesjegy pontossággal, méterben kerekítve adjuk meg.
- Mekkora emelkedési szögben látja a Csobánc tetején álló turista a Szent György-hegy tetejét?

4187 Mekkora távolságra van egymástól az a élű kocka két kitérő helyzetű élének felezőpontja?

4188 Egy téglatest alaplapjának két éle 15 cm, illetve 20 cm, a téglatest testátlója az alaplap síkjával 60° -os szöget zár be.

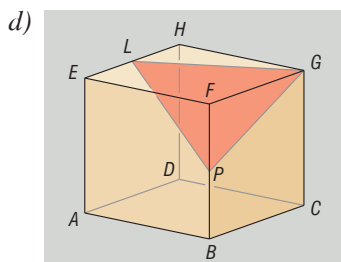
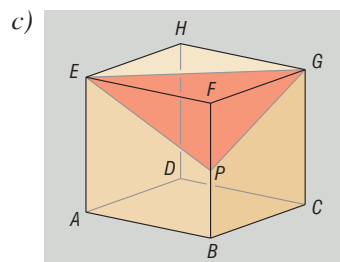
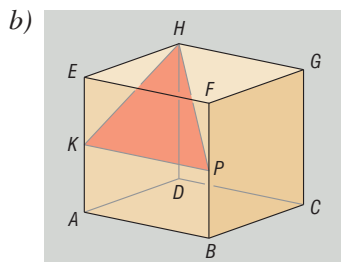
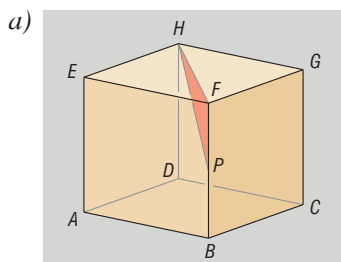
- Mekkora szöget zár be egymással az alaplap két átlója?
- Számítsuk ki a téglatest testátlójának hosszát.
- Mekkora a téglatest ismeretlen hosszúságú éle?

4189 Mekkora szöget zár be egymással a kocka egyik testátlója és a vele kitérő helyzetű lapátlója?

4190 Határozzuk meg az $ABCDEFGH$ kockában (ld. 4170. feladat ábrája) az alábbi szögek nagyságát:

- $\angle HAF$; b) $\angle ADG$; c) $\angle FGD$; d) $\angle BDF$.

4191 Számítsuk ki az ábrákon megjelölt háromszögek oldalainak hosszát, ha az $ABCDEFGH$ kocka éleinek hossza 10 cm. Vannak-e a háromszögek közt derékszögűek, illetve egyenlő szárúak? Ha igen, akkor melyek? (Az ábrák a kocka csúcsain kívül csak oldalfelező pontokat tartalmaznak.)



Geometriai valószínűség

b) Csökken-e a találat valószínűsége, ha I -t a nyitott $]2; 6[$ intervallumra cseréljük?

Például J alapintervallum legyen $[0; 5]$. Az A játékos megjelöli az $x = 4,5$ számot, B pedig az $I = [0; 3]$ intervallumot. Ekkor $x \notin I$, tehát A nyert. Mégpedig $\frac{|I|}{|J|} \cdot 100 = \frac{3}{5} \cdot 100 = 60\%$ -nak megfelelő 60 pontot. Ha $x = 2$ -t választotta volna, akkor B nyer $100 - 60 = 40$ pontot.

c) $J = [-3; 3[$ és $I = [-2; -1] \cup]1; 2[$?

b) az összes prímszámmal kezdődő zárt egységnyi intervallum egyesítését felírja?

A number line from 0 to 1. A point is marked at $\frac{11}{20}$. A tick mark is shown at $\frac{18}{19}$. A line segment is drawn from 0 to $\frac{11}{20}$, and a wavy line segment is drawn from $\frac{11}{20}$ to $\frac{18}{19}$.

Készüljünk az érettségre!

Rendszerező összefoglalás

184

Gondolkodási módszerek
Algebra és számelmélet
Függvények
Geometria

Érettségi gyakorló
feladatsorok

262





- c) minden általa megtekintett A, B, C, D oldalról mutat egy link a női magazin E oldalára, de a többi, egy oldalon található link mind ugyanarra az oldalra mutat?
- d) Mekkora valószínűséggel nem talál Kornélia A, B, C, D weblapokon keresztül a női magazin E oldalára, ha
1. az A, B, C, D oldalakról egy-egy link mutat az E -re;
 2. az A oldal többi linkje a B -re, a B oldal többi linkje a C -re, a C oldal többi linkje a D -re mutat, illetve
 3. a D oldal minden linkje különböző oldalakra visz?

Statisztika

5126 Adott az alábbi rangsorba rendezett minta.

0, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 7, 9, 10, 10, 11, 12

A terjedelmet három egyenlő részre osztva soroljuk az adatokat „alacsony”, „közepes”, „magas” kategóriákba. Készítsünk belőlük gyakorisági diagramot. A diagram utolsó oszlopában tüntessük fel az osztályok relatív gyakoriságait is.

5127 Adottak a következő minták. Határozzuk meg mindegyik minta elemeinek átlagát, móduszát (vagy móduszait), mediánját, alsó és felső kvartiliseit, majd készítsünk belőlük dobozdiagramokat.

- a) 11, 8, 4, 4, 7, 2;
- b) 12, 20, 7, 11, 16, 13, 15;
- c) 6, 3, 3, 5, 2, 7, 5, 9;
- d) 15, 8, 20, 11, 4, 43, 11, 1, 11.

5128 Határozzuk meg az előző feladat 5127/a és 5127/c mintáinak

- a) terjedelmét, szórását;
- b) a mediántól számított átlagos abszolút eltérését.

5129 Tekintsük a következő 10 elemű mintát:

3, 3, 5, 5, 5, 6, 6, 7, 8, 8.

A mintából készítettünk már egy gyakorisági táblázatot is A, B, C kategórianevekkel:

Készítsünk különböző diagramokat a mintából, ha be szeretnénk mutatni

- a) az egyes kategóriák teljes mintához viszonyított arányait;
- b) az egyes kategóriák egymáshoz viszonyított arányait;
- c) hogy az elemek a mintán belül milyen megoszlást mutatnak.

Kategória	Gyakoriság
A	2
B	5
C	3
Összesen	10

5130 Tekintsük az alábbi gyakorisági diagramot, amelyben az egyes kategóriák osztályközökkel vannak megadva.

Adjunk becslést az adatok átlagára.

Osztályköz	Gyakoriság
0 – 4	7
5 – 9	11
10 – 14	2
Összesen	20

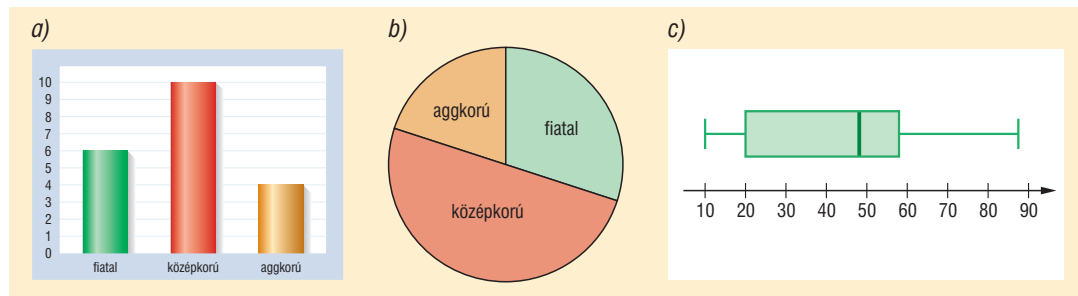


5131 Egy közösség tagjainak életkorairól az alábbi három diagram készült.

Melyikről milyen mintajellemzőt tudunk leolvasni?

Tudjuk még azt is, hogy az egyes kategóriákat hogyan alakították ki (évben megadva).

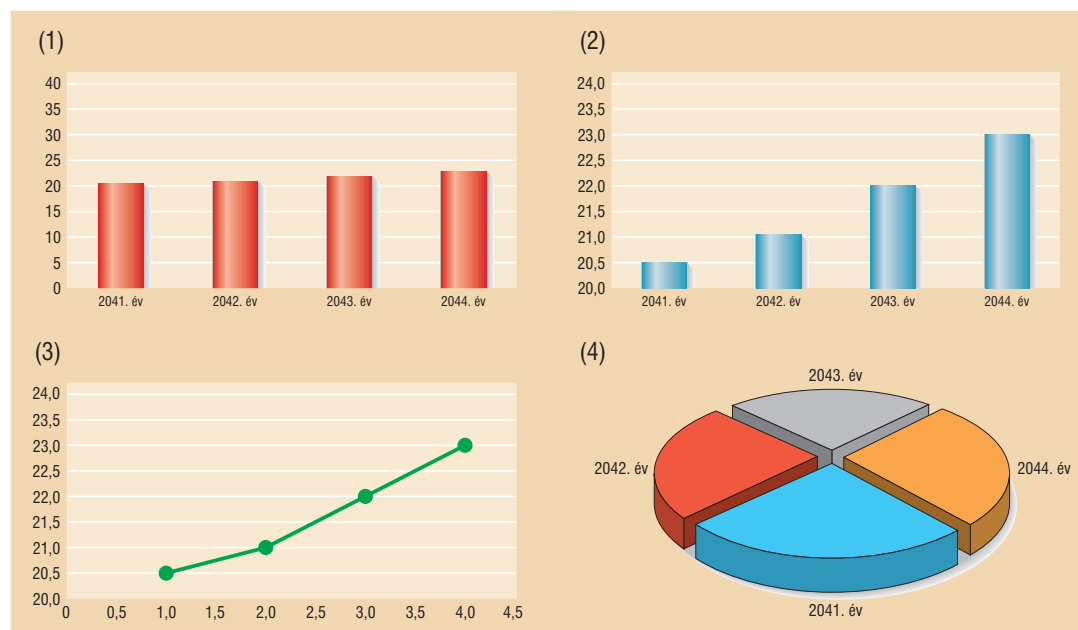
Kategória	Osztályköz
fiatal	0 – 30
középkorú	30 – 60
aggorú	60 – 100



5132 Van négy becslésünk a jövőről: 2041-ben 20,5, 2042-ben 21, 2043-ban 22 és 2044-ben 23 pénzegység lesz a körte ára. Az alábbi négy diagramot különböző célokkal készítették az adatokról.

a) Mondjuk meg, melyik diagrammal mi lehetett a készítő célja.

b) Hogyan tudnánk reálisan ábrázolni az adatokat?



5133 Egy 30 fős osztályban 10 fiú tanul. A lányok magasságának átlaga 166 cm, a fiúké 175 cm. Hány centiméter a teljes osztály tanulóinak magassága?

5134 Egy osztályba 3-szor annyi leány jár, mint fiú. A fiúk átlagmagassága 10 cm-rel több a lányok átlagmagasságánál. Az összes tanuló átlagmagassága 170 cm. Mennyi a lányok átlagmagassága az osztályban?

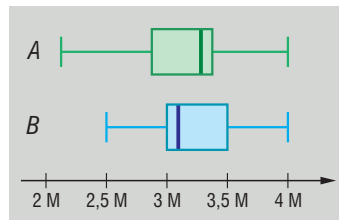


5135 Két cég közzétett néhány adatot a dolgozói fizetéséről, ezeket az alábbi táblázatban összefoglaltuk.

	Átlag	Módusz	Medián	Terjedelem
A cég	250	150	240	600
B cég	250	200	210	800

- Melyik céget érdemes választania egy kezdő munkavállalónak?
- Melyik céget érdemes választani egy sok év gyakorlattal rendelkező munkavállalónak?
- Melyik céget érdemes választania annak, aki hosszú távra tervez és vezetői ambíciói vannak?

5136 Két hasonló korú, állapotú és népszerűségű, de különböző típusú használt autónk van. Bizonyos okok miatt valamelyiket el szeretnénk adni. Egy használtautó portál az adatbázisában szereplő azonos típusú járművek árairól automatikusan generált egy-egy dobozdiagramot (vagy más néven box-plot vagy sodrófa-diagramot), ezek láthatók az ábrán.



- Írjuk össze a lehetőségeket, milyen időbeli ütemezéssel szeretnénk pénzhez jutni.
- Milyen helyzetben melyik autót, milyen áron érdemes meghirdetnünk?

5137 Két cégnél kiszámolták a dolgozók életkorának statisztikai mutatóit. A két mintáról a táblázatban látható értékeket tudjuk, de a táblázat szerkesztője az egyik adatot elgépelt.

	Átlag	Módusz	Medián	Szórás	Absz. átl. eltérés
A cég	42	38	41	10,5	7
B cég	33	30	44	7	6

- Melyik adat „lóg” ki? Mi lehet a jó adat, ha csak egy számjegyet gépelt el a szerkesztő?
- Mit állapíthatunk meg az adatokból?

5138 Egy hét elemű mintáról ismerjük a következőket:

$$A = 15, \quad R = 14, \quad Q_1 = 12, \quad Q_2 = 14, \quad Q_3 = 20.$$

Azt is tudjuk, hogy a minta egyetlen módusza 20. Képesek vagyunk-e az adatokból *egyértelműen* előállítani a mintát?

5139 Adott a négyelemű x , 86, 116, y rangsorba rendezett minta. Határozzuk meg x és y értékét, ha tudjuk, hogy

- a minta szórása 21;
- a mediántól vett abszolút átlagos eltérés 20;
- minden adat egész szám.



A FELADATOK MEGOLDÁSAI

A kötet feladatainak megoldásai letölthetők pdf-ben a www.mozaik.info.hu/matematika oldalról.

A megoldások megtekintéséhez az *Acrobat Reader* program használata szükséges. A program ingyenesen letölthető az internetről. (Pl. www.adobe.com).



MEGOLDÁSOK – 11. ÉVFOLYAM

Az összes 11. évfolyamos feladat megoldását az alábbi állomány tartalmazza:

M_3001_3892_11_evfolyam.pdf

Az egyes fejezetek külön-külön (kisebb méretű) állományban is elérhetők (a feladatsorszáma és a fejezetre utaló elnevezéssel):

M_3001-3160_kombinatorika-grafok.pdf

M_3161-3241_hatvany-gyok-logaritmus.pdf

M_3242-3459_trigonometria.pdf

M_3460-3554_fuggvenyek.pdf

M_3555-3776_koordinata-geometria.pdf

M_3777-3892_valoszinuseg-szamitas-statisztika.pdf

MEGOLDÁSOK – 12. ÉVFOLYAM

Az összes 12. évfolyamos feladat és a rendszerező összefoglalás megoldásait az alábbi állomány tartalmazza:

M_4001_5617_12_evfolyam.pdf

Az egyes fejezetek külön-külön (kisebb méretű) állományban is elérhetők (a feladatsorszáma és a fejezetre utaló elnevezéssel):

M_4001-4067_logika-bizonyitasi-modszerek.pdf

M_4068-4165_szamsorozatok.pdf

M_4166-4511_tergeometria.pdf

M_4512-4578_valoszinuseg-szamitas-statisztika.pdf

M_5001-5617_rendszerezo-osszefoglalas.pdf

M_kozepszintu-feladatsorok.pdf

M_emelt-szintu-feladatsorok.pdf

EGY KONKRÉT FELADAT MEGOLDÁSÁNAK KERESÉSE

A pdf állományokban a **kereső funkciót** (Ctrl+f) használva az „*x*+feladatsorszám” begépelésével közvetlenül az adott sorszámú feladat megoldásához ugorhatunk (pl. az *x*4318 szöveg keresésével a 4318-as feladat megoldásához).