# SOROZATOK

## A sorozat megadása

**1623.** *a)* 2; 3; 4; 31 *b)* 3; 5; 7; 61 *c)* 0; –2; –4; –58 *d)* 2; 5; 8; 89

*e)* 2; 4; 8; $2^{30}$ *f)* 2; 5; 10; 901 *g)* $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{5}$; $\frac{3}{10}$; $\frac{30}{901}$

*h)* $a_1$ nem létezik, hiszen $n = 1$ esetén a kifejezés nincs értelmezve. A további elemek: $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{8}$; $\frac{30}{899}$

*i)* 0; $\frac{7}{2}$; $\frac{26}{3}$; $\frac{26\,999}{30}$ *j)* 1; –2; 3; –30.

**1624.** A sorozatok egy lehetséges hozzárendelési szabályát adjuk meg, természetesen más megoldás is elképzelhető.

*a)* $a_n = 2n - 4$

$a_5 = 5$; $a_6 = 8$; $a_7 = 10$; $a_{30} = 56$

*b)* $a_n = 3^{n-1}$

$a_5 = 81$; $a_6 = 243$; $a_7 = 729$; $a_{30} = 3^{29}$

*c)* $a_n = \frac{100}{4^{n-1}}$

$a_5 = \frac{25}{64}$; $a_6 = \frac{25}{256}$; $a_7 = \frac{25}{1024}$; $a_{30} = \frac{100}{4^{29}}$

*d)* $a_n = 17 + \frac{n(n-1)}{2}$

$a_5 = 27$; $a_6 = 32$; $a_7 = 38$; $a_{30} = 452$

*e)* $a_n = (-1)^{n+1} \cdot 3$

$a_5 = 3$; $a_6 = -3$; $a_7 = 3$; $a_{30} = -3$

*f)* $a_n = (-1)^{n+1} \cdot 2^{n-1}$

$a_5 = 16$; $a_6 = -32$; $a_7 = 64$; $a_{30} = -128$

*g)* $a_n = 70 - 20n$

$a_5 = -30$; $a_6 = -50$; $a_7 = -70$; $a_{30} = -530$.

**1625.** Oldjuk meg a $2n + 3 = 113$ egyenletet! $n = 55$, tehát $a_{55} = 113$, $a_{100} = 203$. Legyen a sorozat két szomszédos eleme $a_k$ és $a_{k+1}$. Azt kell megvizsgálni, hogy lehet-e $a_{k+1} - a_k = 3$, azaz

$$2(k+1) + 3 - (2k+3) = 3$$
$$2 = 3$$

feltétel ellentmondásra vezet. Azt kaptuk, hogy a sorozatban két szomszédos elem különbsége 2, és nem lehet 3.

**1626.** Keressük azt az $n$ természetes számot, amelyre

$$(-1)^n \cdot n + 1 = 100$$
$$(-1)^n \cdot n = 99$$

Ez nem teljesülhet, hiszen az egyenlőség bal oldala minden páratlan természetes számra negatív.

$$a_{99} = -98 \qquad a_{100} = 101$$

**1627.** Oldjuk meg a természetes számok halmazán a

$$\frac{2n+1}{3n-1} = \frac{11}{14}$$

egyenletet!

$n = 5$ adódik, azaz $a_5 = \dfrac{11}{14}$.

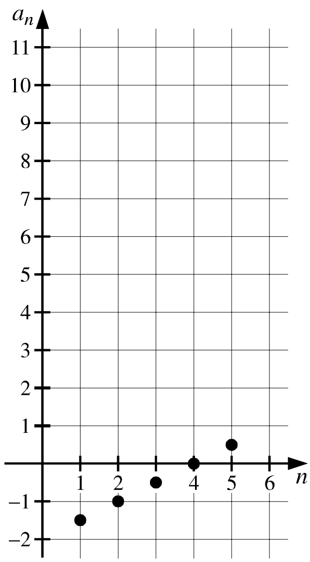
$$a_1 = \frac{3}{2} \qquad a_2 = \frac{5}{5} = 1 \qquad a_3 = \frac{7}{8}$$

Keressük azt az $n$ természetes számot, amelyre

$$\frac{2n+1}{3n-1} < 0$$

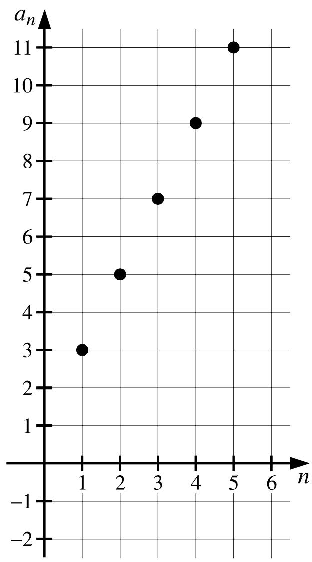
Mivel $3n - 1$ minden pozitív természetes számra pozitív, ezért ez akkor teljesülhet, ha $2n + 1 < 0$. Ilyen természetes szám nem létezik, tehát a sorozatnak nincs negatív eleme.

**1564.** *a)*



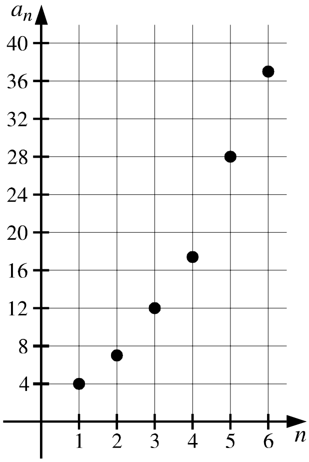
$$n \mapsto \frac{1}{2}n - 2$$

*b)*



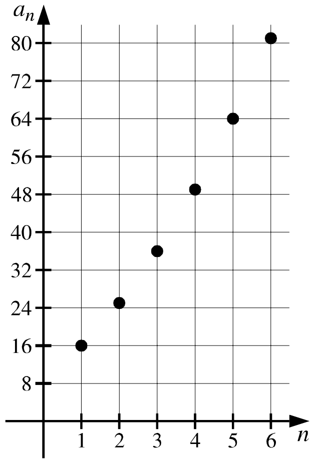
$$n \mapsto 2n + 1$$

*c)*



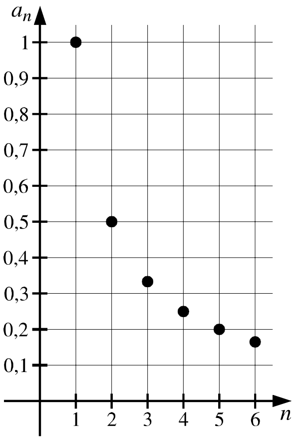

$n \mapsto n^2 + 3$

*d)*



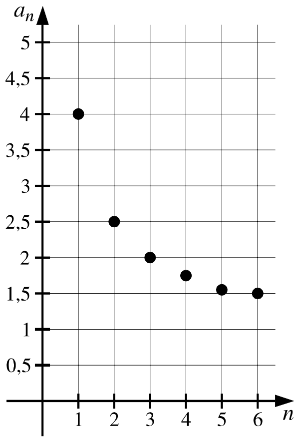

$n \mapsto (n+3)^2$

*e)*



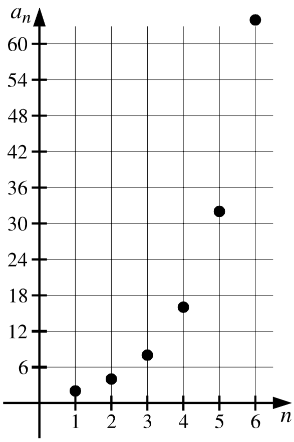

$n \mapsto \frac{1}{n}$

*f)*



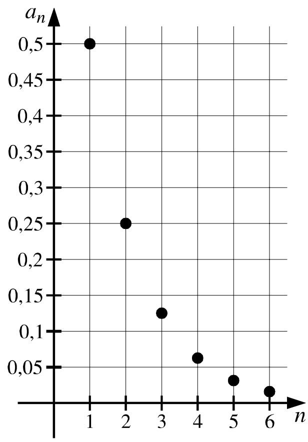

$n \mapsto \frac{3}{n} + 1$

*g)*



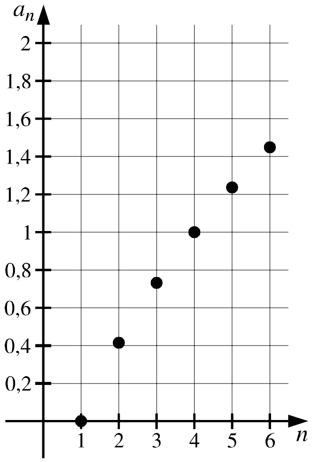

$n \mapsto 2^n$

*h)*



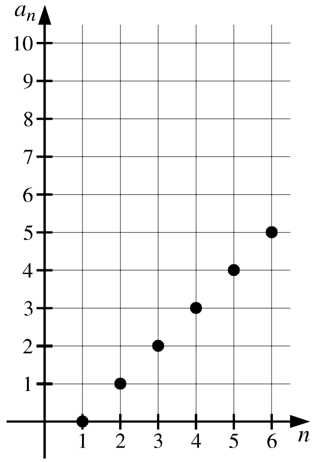

$n \mapsto 2^{-n}$

*i)*



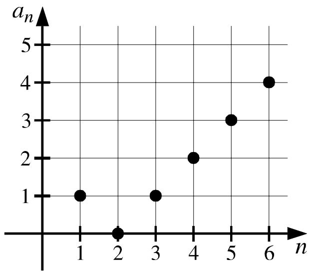

$n \mapsto \sqrt{n} - 1$

*j)*



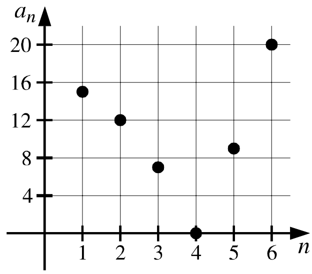

$n \mapsto \sqrt{n^2} - 1$

*k)*




$n \mapsto |n-2|$

*l)*




$n \mapsto |n^2 - 16|$

**1629.** Egy $n$ oldalú sokszög egy csúcsából húzható átlók száma: $n - 3$. E szerint a 103 oldalú sokszög egy csúcsából húzható 100 átló. Az 50 oldalú sokszög egy csúcsából 47 átló húzható.

**1630.** Egy $n$ oldalú sokszögnek $\frac{n(n-3)}{2}$ átlója van. Egy 50 oldalú sokszögnek így 1175 átlója van.

**1631.** Igen lehet. Az 5 oldalú sokszögnek 5 átlója van. Bebizonyítható, hogy másik sokszög ilyen tulajdonságokkal nem rendelkezik.

**1632.** Az egy csúcsból húzható átlók az $n$ oldalú sokszöget $n - 2$ darab háromszögre osztják. Így a 102 oldalú sokszög esetén lesz a háromszögek száma 100.

**1633.** Az $n$ oldalú sokszög belső szögeinek összege:

$$(n-2)\cdot 180°.$$

Így a háromszög belső szögeinek összege 180°, a négyszögé pedig 360°.

**1634.** Egy $n$ oldalú szabályos sokszög egy oldalához tartozó középponti szög nagysága: $\frac{360°}{n}$. A feladat szerint:

$$\frac{360°}{n} < 10°$$
$$n > 36$$

Legalább 37 oldala van a szabályos sokszögnek.

**1635.** Egy $n$ oldalú szabályos sokszög egy belső szögének nagysága: $\frac{n-2}{n} \cdot 180°$. A feladat szerint:

$$\frac{n-2}{n} \cdot 180° \le 150°$$
$$n \le 12$$

Legfeljebb 12 oldala lehet a sokszögnek.

# Számtani sorozatok

**1636.** A lehetséges számtani sorozatok:

*a)* $a_n = 3 + 2n$ *c)* $a_n = 12 - 5n$ *d)* $a_n = 2 + \frac{n}{2}$

*e)* $a_n = b - 2c + nc$ *f)* $a_n = 0{,}98 + 0{,}03n$

**1637.** *a)* $a_n = -1 + 3n$ *b)* $a_n = -4 + n$ *c)* $a_n = -6 + 3n$

*d)* $a_n = \frac{3}{4} - \frac{n}{12}$ *e)* $a_n = \frac{2}{3} + \frac{n}{12}$ *f)* $a_n = \frac{13}{36} + \frac{19}{72}n$

**1638.** *a)* $a_{10} = a_1 + 9d$ egyenlőség alapján: $a_{10} = 20$.

*b)* $a_n = 2 + (n-1) \cdot 2 = 2n$ *c)* $S_{20} = \frac{2a_1 + 19d}{2} \cdot 20 = 420$

**1639.** *a)* $a_{10} = -10 + 9 \cdot 4 = 26$ *b)* $S_{20} = 560$

*c)* $a_n = -10 + (n-1) \cdot 4$ alapján

$$-10 + (n-1) \cdot 4 = 102$$
$$n = 29$$

A sorozat 29. eleme lesz 102.

**1640.** *a)* $a_{10} = a_1 + (10-1)d$ alapján

$$29 = a_1 + 9 \cdot (-3)$$
$$a_1 = 56$$

*b)* $S_{20} = 550$

*c)* Keressük azt a természetes számot, amelyre:

$$56+(n-1)\cdot(-3)=-1992$$
$$n=683\frac{2}{3},$$

ez nem megoldás a természetes számok halmazán, tehát a sorozatnak nem eleme a $-1992$.

**1641.** *a)* A számtani sorozat esetén teljesül, hogy $a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$ ($n>1$ term. szám)

$a_2=\frac{a_1+a_3}{2}=4$.

*b)* $S_{20}=\frac{2a_1+19d}{2}\cdot 20=420$.

**1642.** *a)* $a_{11}=\frac{a_{10}+a_{12}}{2}=\frac{\frac{2}{3}+1\frac{2}{3}}{2}=\frac{7}{6}$.

*b)* Az $a_{10}=a_1+9d$ egyenlőség alapján, ahol $d=\frac{1}{2}$, $a_1=-\frac{23}{6}$ adódik.

*c)* $a_n=-\frac{23}{6}+(n-1)\cdot\frac{1}{2}=\frac{3n-26}{6}$.

**1643.** *a)* $a_7=\frac{a_6+a_8}{2}=\frac{k+l}{2}$ *b)* $d=\frac{a_8-a_6}{2}=\frac{l-k}{2}$

*c)* Az $a_6=a_1+5d$ egyenlőség alapján $a_1=a_6-5d=k-5\cdot\frac{l-k}{2}=\frac{6k-5l}{2}$.

**1644.** Először célszerű a *b)* kérdésre válaszolni!

*b)* $d=\frac{a_5-a_2}{3}=\frac{10}{3}$ *a)* $a_1=a_2-d=10-\frac{10}{3}=\frac{20}{3}$

*c)* $a_n=\frac{20}{3}+(n-1)\cdot\frac{10}{3}=\frac{10(n+1)}{3}$.

**1645.** Először a *c)* pont kérdésére válaszolva:

$$d=\frac{a_8-a_5}{3}=-\frac{8}{3}$$

*a)* $a_6=a_5+d=8-\frac{8}{3}=\frac{16}{3}$ *b)* $a_7=a_6+d=\frac{16}{3}-\frac{8}{3}=\frac{8}{3}$

*c)* $d=-\frac{8}{3}$ *d)* $\frac{a_3+a_{10}}{2}=\frac{a_5+a_8}{2}=4$

**1646.** *a)* $d=\frac{a_{11}-a_7}{4}=\frac{\frac{9}{10}+\frac{5}{7}}{4}=\frac{113}{200}$ *b)* $a_1=a_7-6d=-\frac{5}{7}-6\cdot\frac{113}{200}=-\frac{2873}{200}$

*c)* $\frac{a_3+a_{15}}{2}=\frac{a_7+a_{11}}{2}=\frac{-\frac{5}{7}+\frac{9}{10}}{2}=\frac{13}{140}$

**1647.** A megoldás során az $a_n = a_1 + (n-1)d$ összefüggést kell alkalmaznunk.

*a)* $a_{16} = 78$ *b)* $a_{23} = -6$ *c)* $a_{25} = \frac{56}{3}$ *d)* $a_{13} = 1$ *e)* $a_7 = -\frac{27}{35}$

*f)* $a_{19} = k + 18l$

**1648.** $a_1 = 2$; $a_2 = \frac{5}{2}$; $a_3 = 3$. Mivel $d = a_2 - a_1 = \frac{1}{2}$, ezért $a_{15} = a_1 + 14d = 9$.

**1649.** Mivel $d = a_2 - a_1 = \frac{5}{4} - 1 = \frac{1}{4}$, ezért $a_{17} = 1 + 16 \cdot \frac{1}{4} = 5$.

**1650.** Mivel $d = 3 - \frac{5}{2} = \frac{1}{2}$, így keressük azt az $n$ természetes számot, amelyre:

$$13 = \frac{5}{2} + (n-1) \cdot \frac{1}{2}$$
$$n = 22$$

Tehát $a_{22} = 13$.

**1651.** Mivel $d = \frac{13}{3} - \frac{7}{3} = 2$, így keressük azt az $n$ természetes számot, amelyre:

$$\frac{79}{3} = \frac{7}{3} + (n-1) \cdot 2$$
$$n = 13$$

Tehát $a_{13} = \frac{79}{3}$.

**1652.** A sorozat differenciája $d = a - (a-b) = b$, így keressük azt az $n$ természets számot, amelyre

$$a + 20b = a - b + (n-1) \cdot b$$
$$n = 22$$

Tehát $a_{22} = a + 20b$.

**1653.** Legyen $a_1 = 7$, $a_8 = 35$. Ezért $d = \frac{a_8 - a_1}{7} = 4$. Így a megfelelő számtani sorozat:

7; 11; 14; 15; 19; 23; 27; 31; 35.

**1654.** Legyen $a_1 = 1$, $a_7 = 25$. Ezért $d = \frac{a_7 - a_1}{6} = 4$. Így a megfelelő számtani sorozat:

1; 5; 9; 13; 17; 21; 25.

**1655.** Legyen $a_1 = 1$, $a_{19} = 10$. Ezért $d = \frac{a_{19} - a_1}{18} = \frac{1}{2}$. Így a megfelelő számtani sorozat:

$$1; 1\frac{1}{2}; 2; 2\frac{1}{2}; 3; 3\frac{1}{2}; \ldots; 9; 9\frac{1}{2}; 10.$$

**1656.** A sorozat differenciája: $d = \frac{a_5 - a_1}{4} = 2$

$$a_7 = a_1 + 6d = 15.$$

**1657.** A sorozat differenciája: $d = \frac{a_7 - a_3}{4} = -6$

$$a_{10} = a_7 + 3d = -16.$$

**1658.** A sorozat differenciája: $d = \frac{a_{10} - a_7}{3} = -1$

$$a_3 = a_7 - 4d = 6.$$

**1659.** Ha a második egyenletből kivonjuk az elsőt:

$$\begin{aligned} a_3 - a_1 + a_9 - a_7 &= 11 \\ 2d + 2d &= 11 \\ d &= \frac{11}{4} \end{aligned}$$

Az első egyenlet alapján

$$\begin{aligned} a_1 + a_1 + 6 \cdot \frac{11}{4} &= 16 \\ a_1 &= -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

A sorozat első eleme $a_1 = -\frac{1}{4}$, különbsége $d = \frac{11}{4}$.

**1660.** Az első egyenlet alapján

$$\begin{aligned} a_2 - a_5 &= 3 \\ -3d &= 3 \\ d &= -1 \end{aligned}$$

A násodik egyenletből:

$$\begin{aligned} a_1 + 2d + a_1 + 3d &= 11 \\ a_1 &= 8 \end{aligned}$$

A sorozat első eleme: $a_1 = 8$, különbsége $d = -1$.

**1661.** Mivel $a_7 - a_2 = 1$, azaz $5d = 1$, ezért $d = \frac{1}{5}$.

Másrészt

$$\begin{aligned} a_{20} &= 2 \cdot a_{10} \\ a_1 + 19 \cdot \frac{1}{5} &= 2\left(a_1 + 9 \cdot \frac{1}{5}\right) \\ a_1 &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

A sorozat első három eleme: $\frac{1}{5}$; $\frac{2}{5}$; $\frac{3}{5}$.

**1662.** Mivel $a_{10}-a_5=5d=80$, ezért $d=16$. Azt kell megvizsgálni, hogy létezik-e olyan $n$ természetes szám, amelyre

$$180=100+(n-10)\cdot 16$$
$$n=15$$

A sorozat 15. eleme 180.

**1663.** Mivel $\frac{a_1+a_{17}}{2}=\frac{3+27}{2}=15$ és $\frac{a_1+a_{17}}{2}=a_9$, ezért a sorozat 9. eleme 15.

**1664.** Mivel $a_{20}-a_5=15d=30$, azaz $d=2$. Ezért a sorozatnak nem lehet páratlan szám az eleme.

**1665.** Az első egyenlőség alapján:

$$a_8-a_3=5d=3{,}75$$
$$d=0{,}75$$

A második egyenlőséget osztva 2-vel:

$$\frac{a_2+a_4}{2}=a_3=\frac{13}{6}$$

Így $a_5=a_3+2d=\frac{11}{3}$.

**1666.** A feladatnak csak olyan számtani sorozatok felelhetnek meg, amelyek különbségére igaz, hogy

$$|d|\leqq 2$$

Legyen a sorozat első eleme $a_1$. Így

$$\frac{2a_1+3d}{2}\cdot 4=18$$
$$2a_1+3d=9$$

Ha $d=0$, akkor nincs megoldás, hiszen $a_1=\frac{9}{2}$ adódna.

Ha $d=1$, akkor $a_1=3$ és a keresett szám: 3456.

Ha $d=-1$, akkor $a_1=6$ és a keresett szám: 6543.

Ha $d=\pm 2$, akkor sem kapunk $a_1$ értékére egész számot.

Így a feladatnak két négyjegyű szám tesz eleget:

3456 és 6543.

**1667.** $a_3=50$ és $a_{10}=a_8-10$. Használjuk fel, hogy $a_{10}=a_3+7d$ és $a_8=a_3+5d$, így a második feltétel:

$$50+7d=50+5d-10$$
$$d=-5$$

Mivel $a_3=a_1+2d$, ezért $a_1=50-2\cdot(-5)=60$. A sorozat első eleme $a_1=60$.

**1668.** Mivel $a_{243} - a_{28} = 215d = 215$, így $d = 1$. $a_1 = a_{28} - 27d = 28 - 27 = 1$.
Az első száz elem összege:

$$S_{100} = \frac{2a_1 + 99d}{2} \cdot 100 = 5050.$$

**1669.** Jelöljük az első három elem összegét $A$-val, a következő három elemét $B$-vel. A feladat feltételei szerint:

$$\begin{aligned} A &= B - 30 \\ A + B &= 60 \end{aligned}$$

Ezt az egyenletrendszert megoldva $A = 15$ és $B = 45$ adódik. Másrészt ha a sorozat első eleme $a_1$, különbsége $d$:

$$\frac{2a_1 + 2d}{2} \cdot 3 = 15$$
$$\frac{2a_1 + 5d}{2} \cdot 6 = 60$$

Ennek az egyenletrendszernek a megoldásai: $a_1 = \frac{5}{3}$, $d = \frac{10}{3}$.

**1670.** Használjuk az $S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$ összegképletet!

*a)* $S_{15} = 330$ *b)* $S_{50} = 7550$ *c)* $S_6 = -45$ *d)* $S_{12} = 630$

*e)* $S_{20} = -\frac{1265}{12}$ *f)* $S_{11} = \frac{99}{2}$ *g)* $S_{25} = 295$.

**1671.** Mindegyik esetben számtani sorozatokról van szó.

*a)* $S_{100} = \frac{1 + 100}{2} \cdot 100 = 5050$ *b)* $S_{50} = \frac{2 + 100}{2} \cdot 50 = 2550$

*c)* $S_{45} = \frac{1 + 89}{2} \cdot 45 = 2025$

**1672.** Mindegyik esetben számtani sorozatok összegét kell meghatározni.

*a)* $a_1 = 100$ $a_{900} = 999$ $S_{900} = \frac{100 + 999}{2} \cdot 900 = 494\,550$

*b)* $a_1 = 100$ $a_{450} = 998$ $S_{450} = \frac{100 + 998}{2} \cdot 450 = 247\,050$

*c)* $a_1 = 101$ $a_{450} = 999$ $S_{450} = \frac{101 + 999}{2} \cdot 450 = 247\,500$

**1673.** Legyen $a_1 = 12$, $a_{30} = 99$. Meghatározandó: $S_{30} = \frac{12 + 99}{2} \cdot 30 = 1665$.

**1674.** Legyen $a_1 = 100$, $a_{180} = 995$. Az 5-tel osztható háromjegyű számok összege így: $S_{180} = \frac{100 + 995}{2} \cdot 180 = 98\,550$.

**1675.** A megfelelő számok számtani sorozatot alkotnak, ahol $a_1 = 105$, $a_{150} = 999$. Ezek összege:

$$S_{150} = \frac{105+999}{2} \cdot 150 = 82\,800.$$

**1676.** A páros számok összegéből vonjuk ki a 3-mal osztható páros (6-tal osztható) számok összegét! A páros kétjegyű számok összege: $S_1 = \frac{2+98}{2} \cdot 49 = 2450$. A 6-tal osztható héthegyű számok összege: $S_2 = \frac{6+96}{2} \cdot 16 = 816$. A keresett összeg: $S = S_1 - S_2 = 1634$.

**1677.** A számok számtani sorozatot alkotnak, ahol $a_1 = 102$, $a_{180} = 997$. Ezek összege:

$$S_{180} = \frac{102+997}{2} \cdot 180 = 98\,910.$$

**1678.** Legyen a keresett elemszám *n*. A sorozatban $a_1 = 5$ és $d = 4$. Az összegképlet alapján:

$$\frac{2 \cdot 5 + (n-1) \cdot 4}{2} \cdot n = 10\,877.$$

Az egyenletnek két gyöke $n_1 = 73$ és $n_2 = -\frac{149}{2}$.

A feladatnak az $n_1 = 73$ tesz csak eleget.

**1679.** A sorozatban $a_1 = \frac{1}{2}$, $d = \frac{2}{3}$. A keresett elemszámot jelölje *n*.

*a)* $S_n > 100$ azaz $\frac{2 \cdot \frac{1}{2}(n-1) \cdot \frac{2}{3}}{2} \cdot n > 100$.

Az egyenlőtlenség megoldása: $n < -\frac{1+\sqrt{4801}}{4}$ vagy $n > -\frac{1-\sqrt{4801}}{4} \approx 17{,}07$. Ezért legalább 18 elemre van szükség.

*b)* $S_n < 300$ azaz $\frac{2 \cdot \frac{1}{2}(n-1) \cdot \frac{2}{3}}{2} \cdot n < 300$.

Az egyenlőtlenség megoldása: $-\frac{1+\sqrt{14401}}{2} < n < -\frac{1-\sqrt{14401}}{2} \approx 29{,}75$. Legfeljebb 29 elemet vehetünk.

*c)* $S_n = 165$ azaz $\frac{2 \cdot \frac{1}{2}(n-1) \cdot \frac{2}{3}}{2} \cdot n = 165$.

Az egyenletnek két megoldása van $n_1 = 22$ és $n_2 = -\frac{45}{2}$. Tehát 22 elemet kell vennünk a sorozatból!

**1680.** Alkalmazzuk a következő összefüggéseket!

$$d = \frac{a_n - a_1}{n-1} \qquad S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

*a)* $d = \frac{89}{19}$; $S_{20} = 900$

*b)* $d = \frac{28}{5}$; $S_{11} = 231$

*c)* $d = \frac{47}{182}$; $S_{27} = \frac{1377}{14}$

*d)* $d = \frac{85}{21}$; $S_3 = \frac{134}{7}$

**1681.** Alkalmazzuk az $a_1 = a_n - (n-1)d$ és az $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ összefüggéseket!

*a)* $a_1 = -38$; $S_{15} = -360$

*b)* $a_1 = 19$; $S_{45} = 10\,755$

*c)* $a_1 = 4$; $S_{13} = 32\frac{1}{2}$

*d)* $a_1 = -9\frac{1}{2}$; $S_{20} = -95$.

**1682.** Alkalmazzuk az $n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1$ és az $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ összefüggéseket!

*a)* $n = 500$; $S_{500} = 250\,000$

*b)* $n = 16$; $S_{16} = -200$

*c)* $n = 200$; $S_{200} = 10\,050$

*d)* $n = 25$; $S_{25} = 275$.

**1683.** A polcokon levő könyvek száma számtani sorozatot alkot, ahol $a_1 = 35$, $d = 4$ és $n = 8$. A könyvek száma:

$$S_8 = \frac{2 \cdot 35 + 7 \cdot 4}{2} \cdot 8 = 392.$$

**1684.** Az egyes másodpercekben megtett utak hossza számtani sorozatot alkot, ahol $a_1 = 16$, $d = 32$. A 6. másodpercben megtett út: $a_6 = 16 + 5 \cdot 32 = 176$. A 6. másodperc alatt megtett út: $S_6 = \frac{16 + 176}{2} \cdot 6 = 576$.

**1685.** Az ütések száma: 1, 2, 3, ..., 12 sorozat kétszeri ismétlődése. Így az ütések száma:

$$\frac{1+12}{2} \cdot 12 \cdot 2 = 156.$$

**1686.** Az előző feladat megoldása szerint az egész órák ütése során 156 ütés hangzik el. Egy órán belül a negyed órák ütése során 1 + 2 + 3 + 4 = 10 ütés hangzik el. Ez 24 óra alatt 240 ütést jelent. Így az óra egy nap alatt 240 + 156 = 396-szor üt.

**1687.** A hőmérsékletek olyan számtani sorozatot alkotnak, ahol $d = -0{,}5$. Ha $a_n$ ennek a sorozatnak az $n$-dik eleme, akkor

$$\frac{S_{12}}{12} = 12{,}75$$

$$\frac{\frac{2 \cdot a_1 + 11 \cdot (-0{,}5)}{2} \cdot 12}{12} = 12{,}75$$

Az egyenletet megoldva: $a_1 = 15{,}5$, azaz október elsején 15,5 °C volt.

**1688.** A naponta megkötött sál hossza olyan számtani sorozatot alkot, ahol $a_1 = 18$ és $d = 4$. A szükséges napok száma legyen $n$.

$$S_n = \frac{2 \cdot 18 + (n-1) \cdot 4}{2} \cdot n = 200$$

Ezt $n$-re megoldva $n_1 = 2\sqrt{29} - 4 \approx 6{,}77$ és $n_2 = -2\sqrt{29} - 4$ adódik. Tehát a sál 7 nap alatt készül el.

**1689.** Legyen a szükséges órák száma $n$. Az egyes órák alatt megtett km-ek száma olyan számtani sorozatot alkot, ahol $a_1 = 15$ és $d = -1$. Az összegképlet alapján:

$$\frac{2 \cdot 15 + (n-1) \cdot (-1)}{2} \cdot n = 54$$

Az egyenletet megoldva $n_1 = 4$ és $n_2 = 27$ adódik. Ez azt jelenti, hogy 4 óra illetve 27 óra múlva lenne a kerékpáros az indulási helyétől 54 km-re. A 27 óra esetén ez azt jelenti, hogy a mozgása során visszafordul. (A 16. órában egy órát pihen, hiszen $a_{16} = 0$.)

**1690.** Az egy perc alatt mérhető sebességváltozás

$$\Delta v = \frac{30\ \frac{\text{km}}{\text{h}}}{11} = \frac{30}{11}\ \frac{\text{km}}{\text{h}} \approx 2{,}73\ \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

**1691.** Az egyes sorokban található székek száma olyan számtani sorozatot alkot, ahol $a_1 = 73$ és $d = 6$. Mivel 27 sora van, ezért a székek száma

$$S_{27} = \frac{2 \cdot 73 + 26 \cdot 6}{2} \cdot 27 = 4077.$$

**1692.** A sebességek olyan számtani sorozatot alkotnak, ahol $a_5 = 3{,}2\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ és $a_1 = 0{,}5 + d$, hiszen az első másodperc végén már a $0{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ kezdősebességet a változás megnöveli. Ezek szerint:

$$\begin{aligned} a_5 &= a_1 + 4d \\ 3{,}2 &= 0{,}5 + 5d \\ d &= 0{,}54 \end{aligned}$$

A golyó sebessége másodpercenként $0{,}54\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$-ot változott.

**1693.** A sorokban található helyek száma olyan számtani sorozat, ahol: $a_1 = 68$ és $d = 12$. Mivel 22 sor van, ezért a székek száma:

$$S_{22} = \frac{2 \cdot 68 + 21 \cdot 12}{2} \cdot 22 = 4268$$

**1694.** Jelöljük a sorok számát $n$-nel. Az egyes sorokban található golyók száma olyan számtani sorozat, amelyre $a_1 = 1$ és $d = 1$. Az $S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$ öszefüggést alkalmazva:

*a)* $\frac{2+n-1}{2} \cdot n = 15$

Az egyenletet megoldva $n_1 = 5$ és $n_2 = -6$. Tehát a 15 golyóhoz 5 sorra van szükség.

*b)* $\frac{2+n-1}{2} \cdot n = 69$

Az egyenletet megoldva $n_1 = -\frac{1+\sqrt{553}}{2}$ és $n_2 = -\frac{1-\sqrt{553}}{2} \approx 11{,}26$ adódik. Ez azt jelenti, hogy 12 sorra van szükségünk 69 golyó esetén.

**1695.** Az egyes sorokban található háromszögek száma olyan számtani sorozat, ahol $a_1 = 1$ és $d = 2$.
Az első 10 sorban található háromszögek száma:

$$S_{10} = \frac{2 \cdot 1 + 9 \cdot 2}{2} \cdot 10 = 100.$$

**1696.** A sorokban található gerendák száma számtani sorozatot alkot, ahol $a_1 = 15$ és $d = -1$. Összesen 15 sor keletkezik. A gerendák száma:

$$S_{15} = \frac{2 \cdot 15 + 14 \cdot (-1)}{2} \cdot 15 = 120\ .$$

**1697.** A kivett szemek száma számtani sorozatot alkot, $a_1 = 1$ és $d = 2$. Összesen 20-szor vettek a kosárból, így az összes szemek száma:

$$S_{20} = \frac{2+19}{2} \cdot 20 = 210.$$

Péter által kivett szemek száma olyan számtani sorozat, ahol $a_1 = 1$ és $d = 2$. Összesen:

$$S_{10} = \frac{2 + 9 \cdot 2}{2} \cdot 10 = 100.$$

Mivel Péter 100 szemet vett ki, ezért Pálnak 210 – 100 = 110 szem jutott.

# Mértani sorozatok

**1698.** Jelölje $a_n$ a számtani, $b_n$ a mértani sorozat általános tagját.

*a)* Számtani s.: 6; 18; 30; 42; 54; ... $a_{20} = 234$

Mértani s.: 6; 18; 54; 162; 486; ... $b_{20} = 6 \cdot 3^{19}$

*b)* Számtani s.: 2; 1; 0; –1; –2; ... $a_{20} = -17$

Mértani s.: 2; 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{8}$; ... $b_{20} = \frac{1}{2^{18}}$

*c)* Számtani s.: $\frac{2}{3}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{6}$; 0; ... $\qquad a_{20} = -\frac{5}{2}$

Mértani s.: $\frac{2}{3}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{8}$; $\frac{9}{32}$; $\frac{27}{127}$; ... $\qquad b_{20} = \frac{3^{18}}{2^{37}}$

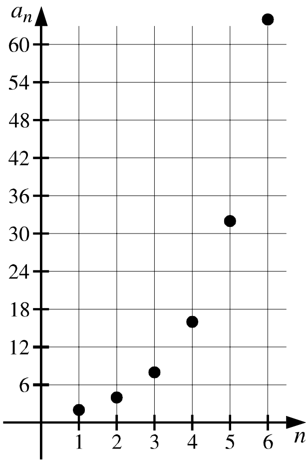
*d)* Számtani s.: $\sqrt{2}$; 1; $2-\sqrt{2}$; $3-2\sqrt{2}$; $4-3\sqrt{2}$; ... $\qquad a_{20} = 19-18\sqrt{2}$

Mértani s.: $\sqrt{2}$; 1; $\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{\sqrt{2}}{4}$; ... $\qquad b_{20} = \frac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^{18}} = \frac{1}{2^9}$

**1699.** *a)* 3; 9; 27; $\quad q = 3$ $\qquad$ *b)* 6; 18; 54 $\quad q = 3$

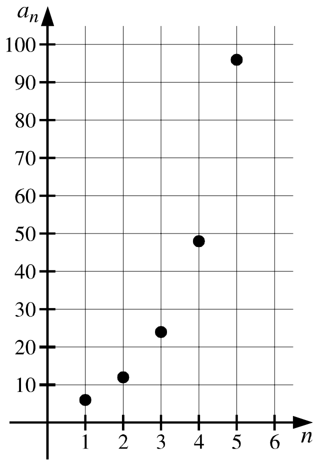
*c)* $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{8}$ $\quad q = \frac{1}{2}$ $\qquad$ *d)* $\frac{3}{2}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{3}{8}$ $\quad q = \frac{1}{2}$

**1700.** *a)*



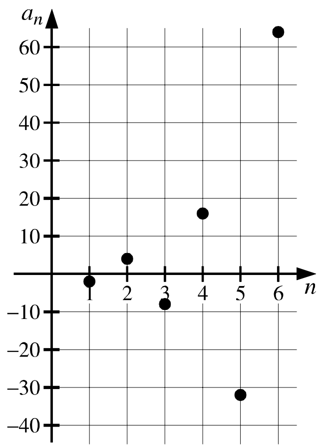

$a_n = 2^n$

*b)*



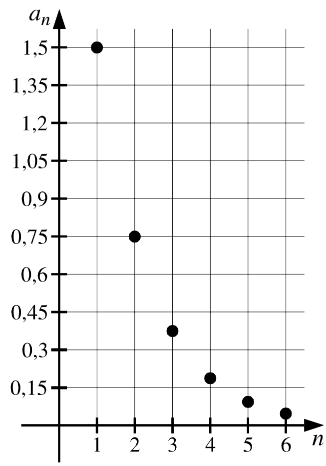

$a_n = 3 \cdot 2^n$

*c)*




$a_n = (-2)^n$

*d)*




$a_n = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$

**1701.** *a)* $a_n = \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ *b)* $a_n = \frac{3}{2} \cdot 3^{n-1}$ *c)* $a_n = \frac{7}{6} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ *d)* $a_n = 5 \cdot (-5)^{n-1}$

**1702.** Használjuk fel az $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ összefüggést!

*a)* $a_1 = 2$ $q = \frac{1}{2}$ $a_{10} = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^9 = \frac{1}{2^8}$

*b)* $a_1 = 4$ $q = -3$ $a_{10} = 4 \cdot (-3)^9 = -78\,732$

*c)* $a_1 = 6$ $q = \frac{2}{3}$ $a_{10} = 6 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^9 = \frac{1024}{6561}$

*d)* $a_1 = 5$ $q = -\frac{2}{5}$ $a_{10} = 5 \cdot \left(-\frac{2}{5}\right)^9 = -\frac{512}{390\,625}$

**1703.** Mivel $q = \frac{a_2}{a_1} = 4$. Ezért a kilencedik elem:

$$a_9 = a_1 \cdot q^8 = 2 \cdot 4^8 = 2^{17} = 131\,072.$$

**1704.** $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{3}{4}$. Felhasználva, hogy $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, $a_n = 4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$ és $a_8 = 4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^7$.

**1705.** $q = \frac{a_2}{a_1} = -\frac{2}{3}$, így a hetedik elem:

$$a_7 = 6 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^6 = \frac{128}{243}.$$

**1706.** $q = \frac{a_2}{a_1} = \sqrt{2}$; $a_n = \left(\sqrt{2}\right)^{n-1}$; $a_9 = \left(\sqrt{2}\right)^8 = 16$.

**1707.** Az $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ összefüggést felhasználva:

*a)* $a_{10} = \frac{1}{2^7}$

*b)* $a_{10} = (-5) \cdot (-3)^9 = 98\,415$

*c)* $a_{10} = 6 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^9 = -\frac{1024}{6561}$

*d)* $a_{10} = 1200 \cdot (0{,}1)^9 = 1{,}2 \cdot 10^{-6}$

*e)* $a_{10} = 5\frac{5}{8} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^9 = -\frac{320}{2187}$

*f)* $a_{10} = 2 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^9 \approx 45{,}25$

**1708.** *a)* $a_7 = a_1 \cdot q^6 = 12\,288$

*b)* A két sorozat egyenlő, hiszen

$a_1 \cdot a_7 = a_1 \cdot a_1 \cdot q^6 = a_1^2 \cdot q^6$

$a_2 \cdot a_6 = a_1 \cdot q \cdot a_1 \cdot q^5 = a_1^2 \cdot q^6$

**1709.** *a)* $a_1 = \frac{a_3}{q^2} = 2$

*b)* A két sorozat egyenlő, hiszen

$a_1 \cdot a_9 = a_1 \cdot a_1 \cdot q^8 = a_1^2 \cdot q^8$

$a_5 \cdot a_5 = a_1 \cdot q^4 \cdot a_1 \cdot q^4 = a_1^2 \cdot q^8$

**1710.** Használjuk fel, hogy a mértani sorozatok esetében igaz, hogy $a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$. A feladatok esetében $a_2 = \sqrt{a_1 \cdot a_3}$ vagy $a_2 = -\sqrt{a_1 \cdot a_3}$ is megoldás lehet.

*a)* $a_2 = \pm 6$ *b)* $a_2 = \pm 12$ *c)* $a_2 = \pm 9$ *d)* $a_2 = \pm 15$ *e)* $a_2 = \pm\, 3\sqrt{2}$

*f)* $a_2 = \pm\, \frac{5}{4}$.

**1711.** Használjuk fel az $a_1 = \frac{a_n}{q^{n-1}}$ összefüggést!

*a)* $a_1 = \frac{a_8}{q^7} = \frac{1}{64}$ *b)* $a_1 = \frac{a_8}{q^7} = 3$ *c)* $a_1 = \frac{a_9}{q^8} = 2916$

*d)* $a_1 = \frac{a_6}{q^5} = \frac{8}{27} \approx 0{,}296$

**1712.** Használjuk a $q^{n-1} = \frac{a_n}{a_1}$ összefüggést!

*a)* $q^4 = \frac{a_5}{a_1} \Rightarrow q = \pm 2$ *b)* $q^2 = \frac{a_3}{a_1} \Rightarrow q = \pm\frac{3}{5}$ *c)* $q^5 = \frac{a_6}{a_1} \Rightarrow q = \frac{1}{2}$

*d)* $q^3 = \frac{a_4}{a_1} \Rightarrow q = \sqrt[3]{\frac{1}{5}}$

**1713.** $a_3^2 = a_2 \cdot a_4$ alapján $a_3 = \pm 18$.

**1714.** $a_8^2 = a_7 \cdot a_9$ alapján $a_8 = \pm 9$.

**1715.** $a_6^2 = a_5 \cdot a_7$ alapján $a_6 = \pm\, 3\sqrt{2}$.

**1716.** A mértani sorozat hányadosa $q = 3$. Az $S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$ összegképlet alapján:

$$S_7 = 2 \cdot \frac{3^6 - 1}{3 - 1} = 728.$$

**1717.** $S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$ képletet alkalmazva:

$$S_{10} = 1 \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{10} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{1023}{512} \approx 1{,}998$$

**1718.** Mivel $q = -\frac{1}{3}$, ezért

$$S_{10} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\left(-\frac{1}{3}\right)^{10} - 1}{-\frac{1}{3} - 1} = \frac{14\,762}{59\,049} \approx 0,25$$

**1719.** $S_7 = 2 \cdot \dfrac{\left(\sqrt{2}\right)^7 - 1}{\sqrt{2} - 1} = 14\sqrt{2} + 30 \approx 49,799$

**1720.** $S_{10} = \dfrac{7}{6} \cdot \dfrac{\left(\frac{2}{3}\right)^{10} - 1}{\frac{2}{3} - 1} = \dfrac{406\,175}{118\,098} \approx 3,439$

**1721.** Mivel $a_3 = a_1 \cdot q^2$, ezért

$$q^2 = 4 \Rightarrow q_1 = 2 \text{ vagy } q_2 = -2$$

Az első húsz elem összege:

$$S_{20} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2^{20} - 1}{2 - 1} = -\frac{1\,048\,575}{2}, \quad \text{vagy}$$

$$S'_{20} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{(-2)^{20} - 1}{(-2) - 1} = -\frac{349\,525}{2}$$

**1722.** Felhasználva, hogy $a_3 = a_1 \cdot q^2$

$$q_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ vagy } q_2 = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Az első tíz elem összege:

$$S_{10} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{10} - 1}{\frac{\sqrt{3}}{3} - 1} = \frac{242\sqrt{3}}{729} + \frac{242}{243} \approx 1,571, \quad \text{vagy}$$

$$S'_{10} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{10} - 1}{-\frac{\sqrt{3}}{3} - 1} = -\frac{242\sqrt{3}}{729} + \frac{242}{243} \approx 0,421.$$

**1723.** Felhasználva, hogy $a_6 = a_1 \cdot q^5$

$$q = \frac{1}{2}$$

Az első hat elem összege:

$$S_6 = 160 \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^6 - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 315.$$

**1724.** Felhasználva az $S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$ összefüggést:

*a)* $S_5 = 8 \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5 - 1}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{31}{2} = 15{,}5$

*b)* $S_7 = 2 \cdot \frac{3^7 - 1}{3 - 1} = 3^7 - 1 = 2186$

*c)* $S_7 = (-4) \cdot \frac{(-3)^7 - 1}{-3 - 1} = -3^7 - 1 = -2188$

*d)* $S_5 = 12 \cdot \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^5 - 1}{\frac{3}{4} - 1} = \frac{2343}{64}$

**1725.** A $q^{n-1} = \frac{a_n}{a_1}$ és az $S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$ összefüggések alapján:

*a)* $q = 3$ és $S_7 = 2 \cdot \frac{3^7 - 1}{3 - 1} = 2186$, vagy $q = -3$ és $S_7 = 2 \cdot \frac{(-3)^7 - 1}{-3 - 1} = 1094$.

*b)* $q = 4$ $S_4 = 1\frac{1}{2} \cdot \frac{4^4 - 1}{4 - 1} = 127\frac{1}{2}$

*c)* $q = -4$ $S_4 = -1{,}5 \cdot \frac{(-4)^4 - 1}{-4 - 1} = 76{,}5$.

**1726.** A sorozat $a_1$ elemére teljesül, hogy $a_1 \cdot a_5 = a_3^2$, ezért $a_1 = \frac{1}{2}$. Az $a_3 = a_1 \cdot q^2$ összefüggés alapján $q_1 = \sqrt{2}$ vagy $q_2 = -\sqrt{2}$. Az első 10 elem összege:

$$S_{10} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(\sqrt{2}\right)^{10} - 1}{\sqrt{2} - 1} = \frac{31\left(\sqrt{2} + 1\right)}{2} \approx 37{,}420$$

$$S_{10}' = \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(-\sqrt{2}\right)^{10} - 1}{-\sqrt{2} - 1} = \frac{31\left(1 - \sqrt{2}\right)}{2} \approx -6{,}420$$

**1727.** Az $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ összefüggést felhasználva:

$$\left.\begin{aligned} a_1(1+q) &= 6 \\ a_1(1+q) \cdot q^2 &= 24 \end{aligned}\right\} q^2 = 4$$

$q = 2$ vagy $q' = -2$

A sorozat első eleme:

$a_1 = 2$ vagy $a_1' = -1$.

**1728.** Az $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ összefüggés alapján:

$$\left.\begin{array}{l} a_1(1+q)=7 \\ a_1(1+q)\cdot q^2 = 63 \end{array}\right\} q^2 = 9$$

$q_1 = 3$ vagy $q_2 = -3$

$a_1 = \frac{7}{4}$ vagy $a_1' = -\frac{7}{2}$.

$S_{10} = \frac{7}{4}\cdot\frac{3^{10}-1}{3-1} = 51\,667$ vagy $S_{10}' = -\frac{7}{2}\cdot\frac{(-3)^{10}-1}{-3-1} = -51\,667$.

**1729.** Az $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ összefüggés alapján:

$$\left.\begin{array}{l} a_1(1-q)=5 \\ a_1(1-q)\cdot q^2 = 20 \end{array}\right\} q^2 = 4$$

$q_1 = 2$ vagy $q_2 = -2$

$a_1 = -5$ vagy $a_1' = \frac{5}{3}$.

**1730.** Mivel $a_1 + a_2 + a_3 = a_1(1 + q + q^2)$, ezért $a_1 = 6$. $S_5 = 6\cdot\frac{2^5-1}{2-1} = 186$.

**1731.** $a_1 \cdot a_3 = a_2^2$, ezért $a_2 = 4$ vagy $a_2' = -4$. A sorozat első eleme: $a_1 = 2$ vagy $a_1' = 10$. A sorozat hányadosa: $q_1 = 2$ vagy $q_2 = -\frac{2}{5}$.

**1732.** $a_1 \cdot a_3 = a_2^2$, ezért $a_2 = 4$ vagy $a_2' = -4$. Ez alapján a harmadik elem $a_3 = -\frac{8}{3}$ vagy $a_3' = \frac{16}{3}$. A sorozat első eleme: $a_1 = -6$ vagy $a_1' = 3$. A sorozat hányadosa: $q_1 = -\frac{2}{3}$ vagy $q_2 = -\frac{4}{3}$.

**1733.** A két egyenletet összeadva $a_5 = 24$ és $a_2 = 18$ adódik. A sorozat hányadosa $q = \sqrt[3]{\frac{a_5}{a_2}} = \sqrt[3]{\frac{4}{3}}$. AZ első eleme: $a_1 = \frac{a_2}{q} = 18 \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{4}}$.

**1734.** A feladat feltételei szerint: $a_1 + a_2 + a_3 = 168$ és $a_4 + a_5 + a_6 = 21$. A hányados és az első elem segítségébel:

$a_1(1 + q + q^2) = 168$

$a_1(1 + q + q^2) \cdot q^3 = 21$

A két egyenletet egymással osztva $q = \frac{1}{2}$ adódik. $a_1 = 96$. A sorozat első hat eleme: 96; 48; 24; 12; 6; 3.

**1735.** Az $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ összefüggést felhasználva:

$$a_1(1 + q + q^2) = 2$$
$$a_1(1 + q + q^2) \cdot q = 6$$

Az egyenleteket egymással osztva $q = 3$ és $a_1 = \frac{2}{13}$. Az első négy elem összege:

$$S_4 = \frac{2}{13} \cdot \frac{3^4 - 1}{3 - 1} = \frac{80}{13}.$$

**1736.** A két egyenletet átalakítva:

$$a_1(1 + q + q^2) = -2$$
$$a_1(1 + q + q^2) \cdot q = -6$$

Ezeket egymással osztva $q = 3$ és $a_1 = -\frac{2}{13}$ adódik.

**1737.** Az $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ összefüggés alapján:

$$a_1(1 + q^2 + q^4) = -9$$
$$a_1(1 + q^2 + q^4) \cdot q = 9$$

Az egyenleteket egymással osztva $q = -1$ és $a_1 = -3$ adódik. A sorozat első három eleme: –3; 3; –3.

**1738.** Mivel $a_1 \cdot a_3 = a_2^2$, ezért $a_2 = 1$ vagy $a_2' = -1$. Ha $a_2 = 1$, akkor $a_4 = \frac{1}{4}$, ha $a_2' = -1$, akkor $a_4' = \frac{9}{4}$. Ennek megfelelően a sorozat hányadosa $q^2 = \frac{a_4}{a_2}$ egyenlőség alapján $q = \pm\,\frac{1}{2}$. Az $a_2' = -1$ $a_4' = \frac{9}{4}$ nem ad megoldást, hiszen a hányadosra $q^2 = -\frac{9}{4}$ adódna. A sorozat első három eleme:

$$2;\ 1;\ \frac{1}{2} \quad \text{vagy} \quad -2;\ 1;\ -\frac{1}{2}.$$

**1739.** Mivel $a_1 = 1$ és $a_2 = 4$, ezért $q = 4$.

*a)* $S_7 = 1 \cdot \frac{4^7 - 1}{4 - 1} = 5461.$

*b)* Az első hét elemének szorzata:

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 \cdot a_6 \cdot a_7 = \frac{a_4}{q^3} \cdot \frac{a_4}{q^2} \cdot \frac{a_4}{q} \cdot a_4 \cdot a_4 \cdot q \cdot a_4 \cdot q^2 \cdot a_4 \cdot q^3 =$$
$$= a_4^7 = (a_1 \cdot q^3)^7 = a_1^7 \cdot q^{21} = 4^{21}.$$

**1740.** $a_1 = 1$ és $a_2 = 3$, ezért $q = 3$.

*a)* $S_{10} = 1 \cdot \dfrac{3^{10} - 1}{3 - 1} = 29\,524$

*b)* $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{10} = a_1 \cdot (a_1 \cdot q) \cdot (a_1 \cdot q^2) \cdot \ldots \cdot (a_1 \cdot q^9) = a_1^{10} \cdot q^{1+2+\ldots+9} = a_1^{10} \cdot q^{45} = 3^{45}$.

**1741.** A sorozat hányadosa $q = \dfrac{1}{2}$.

*a)* $S_{10} = 1 \cdot \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{10} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = \dfrac{2^{10} - 1}{2^9} = \dfrac{1023}{512}$

*b)* $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{10} = a_1 \cdot (a_1 \cdot q) \cdot (a_1 \cdot q^2) \cdot \ldots \cdot (a_1 \cdot q^9) = a_1^{10} \cdot q^{1+2+\ldots+9} = a_1^{10} \cdot q^{45} = \dfrac{1}{2^{45}}$.

# Vegyes feladatok

**1742.** A betét nagysága olyan mértani sorozatot alkot, ahol $a_1 = 25\,000$ és $q = \dfrac{22}{100} + 1 = \dfrac{61}{50}$.
A tíz év múlva kapott összeg: $a_{11} = a_1 \cdot q^{10} \approx 182\,615{,}8$ Ft.

**1743.** A betét összege legyen $x$. Mivel öt év múlva 5000 Ft kamatot kapunk, ez $x$-szel kifejezve:

$$x\left(1 + \frac{24}{100}\right)^5 - x = 5000$$

Ezt az egyenletet megoldva: $x \approx 2588{,}5$ Ft betét szükséges.

**1744.** A 10 év múlva felvehető összeg:

$$x = 20\,000 \cdot \left(1 + \frac{22}{100}\right)^{10} \approx 146\,092{,}6$$

**1745.** A betét összege öt év múlva: $30\,000 \cdot \left(1 + \dfrac{25}{100}\right)^5$. Az infláció miatt a vásárlóértéke:
$30\,000 \cdot \left(1 + \dfrac{25}{100}\right)^5 \cdot \left(1 - \dfrac{29}{100}\right)^5 = 16\,518{,}2$ Ft.

**1746.** Fél év, azaz hat hónap elteltével a bevétel:

$$x = 3{,}6 \cdot 10^6 \cdot \left(1 + \frac{6}{100}\right)^6 \approx 5{,}1 \cdot 10^6 = 5{,}1 \text{ milló Ft.}$$

**1747.** A kiindulási összeg legyen $x$. 12 hónap elteltével:

$$x \cdot \left(1+\frac{5}{100}\right)^{12} = 10^6$$

Az egyenletet megoldva a kiindulási összeg nagysága

$x \approx 556\,837{,}4$ Ft.

**1748.** A város lakosság 50 év múlva:

$$x = 600\,000 \cdot \left(1+\frac{7}{100}\right)^{50} \approx 17\,674\,215.$$

**1749.** Az ország lakosság 25 év múlva:

$$x = 10^6 \cdot \left(1-\frac{2}{100}\right)^{25} \approx 603\,465.$$

**1750.** A száz évvel ezelőtti lakosok száma legyen $x$.

$$x \cdot \left(1+\frac{6}{100}\right)^{100} = 2 \cdot 10^6$$

Az egyenletet megoldva a városban száz éve $x \approx 5894$-en laktak.

**1751.** A teniszlabda a hatodik ütközés után $x = 10 \cdot 0{,}75^6 = 1{,}78$ m magasra emelkedik.

**1752.** Ha a kezdeti hőmérséklet nagysága $x$, akkor

$$x \cdot \left(1-\frac{5}{100}\right)^{5} = 18$$

Ismét $x \approx 23{,}26$ °C adódik.

**1753.** A radioaktív anyag mennyisége olyan mértani sorozatot alkot, ahol $q = \frac{1}{2}$. 8 óra elteltével $x = 400 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8 = 1{,}5625$ mg radioaktív anyag marad.

**1754.** 16 méteres kút esetén.

I. mester bére: $16 \cdot 500 = 8000$ Ft.

II. mester bére: $0{,}1 + 0{,}1 \cdot 2 + 0{,}1 \cdot 2^2 + \ldots + 0{,}1 \cdot 2^{15} = 0{,}1 \cdot \frac{2^{16}-1}{2-1} = 6553{,}5$ Ft.

Ebben az esetben a II. mester olcsóbban dolgozik.

20 méteres kút esetén:

I. mester bére: $20 \cdot 500 = 10\,000$ Ft.

II. mester bére: $0{,}1 \cdot \frac{2^{20}-1}{2-1} = 104\,857$ Ft.

Ekkor már az I. mester sokkal olcsóbban dolgozik!

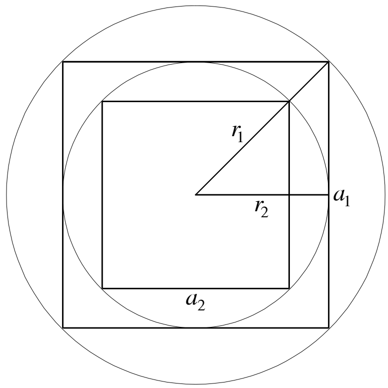
**1755.** Mivel a lónak négy lába van, a patkószögek száma: $6 \cdot 4 = 24$.

Így a ló ára: $0{,}1 + 0{,}1 \cdot 2 + 0{,}1 \cdot 2^2 + \ldots + 0{,}1 \cdot 2^{23} = 0{,}1 \cdot \dfrac{2^{24} - 1}{2 - 1} = 1\,677\,721{,}5$ Ft.

**1756.** A fénynyaláb erőssége olyan mértani sorozatot alkot, ahol $q = \dfrac{1}{5}$. Öt üveglap után az intenzitása $\dfrac{1}{5^5} = \dfrac{1}{3125}$ részére csőkken.

**1757.** A golyó sebesség az ötödik lemez után $x = 800 \cdot 0{,}8^5 = 262{,}144\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}}$.

**1758.** Legyen $r_1 = 10$ cm az első kör sugara és $a_1$ az első négyzet egy oldalának a hossza.




$$a_1 = \sqrt{2} \cdot r_1$$

$$r_2 = \frac{a_1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot r_1$$

A körök sugarai olyan mértani sorozatot alkotnak, ahol

$$r_1 = 10 \text{ és } q_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

A négyzet oldalaira

$$a_2 = \sqrt{2} \cdot r_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot a_1.$$

Ezek szintén mértani sorozatot határoznak meg, ahol

$$a_1 = \sqrt{2} \cdot 10 \text{ és } q_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

A negyedik négyzet egy oldala $a_4 = a_1 \cdot \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 = 5$ cm, kerülete $k_4 = 20$ cm, területe $t_4 = 25\ \text{cm}^2$. A kerületek szintén mértani sorozatot alkotnak:

$$k_1 = 40 \cdot \sqrt{2} \text{ és } q = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Az első négy kerület összege: $40 \cdot \sqrt{2} \cdot \dfrac{\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 - 1}{\dfrac{\sqrt{2}}{2} - 1} \approx 144{,}85$ cm.

A területek mértani sorozata:

$$t_1 = 200 \text{ és } q = \frac{1}{2}.$$

Az első négy terület összege: $200 \cdot \dfrac{\left(\dfrac{1}{2}\right)^4 - 1}{\dfrac{1}{2} - 1} = 375\ \text{cm}^2$.

**1759.** A feltétel azt jelenti, hogy a baktériumok száma 6 óránként megkétszereződik. Egy hét alatt $\frac{7 \cdot 24}{6}$ = 28 ilyen periódus van, ezért a baktériumszám:

$$1 \cdot 2^{28} \approx 2{,}684 \cdot 10^8.$$

**1760.** Az egyes nemzedékekben található legyek száma a következő módon alakul:

| I. | II. | III. | IV. |
|---|---|---|---|
| 1500 | $1500 \cdot 750$ | $1500 \cdot 750^2$ | $1500 \cdot 750^3$ |

Így a legyek száma a IV. nemzedék után

$$S_4 = 1500 \cdot \frac{750^4 - 1}{750 - 1} \approx 6{,}34 \cdot 10^{11} = 634 \text{ milliárd}.$$

**1761.** A 20 év múlva mérhető faállomány térfogata:

$$V_{20} = 6800 \cdot \left(1 + \frac{3}{100}\right)^{20} \approx 12\,281{,}56 \text{ m}^3.$$

**1762.** A kiömlő víz mennyisége 5 perc elteltével:

$$S_5 = 120 \cdot \frac{0{,}99^5 - 1}{0{,}99 - 1} \approx 588{,}12 \text{ hl}.$$

A tartályban maradó víz mennyisége:

$$9000 \text{ hl} - 588{,}12 \text{ hl} = 8411{,}88 \text{ hl}.$$

**1763.** A gép értéke 20 év elteltével:

$$200\,000 \cdot 0{,}93^{20} \approx 46\,847{,}8 \text{ Ft}.$$

**1764.** A hírről értesülők száma az idő függvényében:

| 0 h | $\frac{1}{2}$ h | 1 h | $1\frac{1}{2}$ h | 2 h | ... | 12 h |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | | $2^{24}$ |

Olyan mértani sorozat adódik, ahol $a_1 = 1$, $q = 2$. 12 óra elteltével a hírt ismerők száma:

$$S = 1 + 2 + ... + 2^{24} = \frac{2^{25} - 1}{2 - 1} = 33\,554\,431.$$

**1765.** A dugattyú egy mozdulata után az edényben maradt levegő nyomása a szívás előtti nyomás $\frac{7}{8}$ része lesz. 12 mozdulat után a kialakuló nyomás nagysága:

$$p = \left(\frac{7}{8}\right)^{12} \cdot p_0, \text{ ahol } p_0 = 105 \text{ Pa}$$

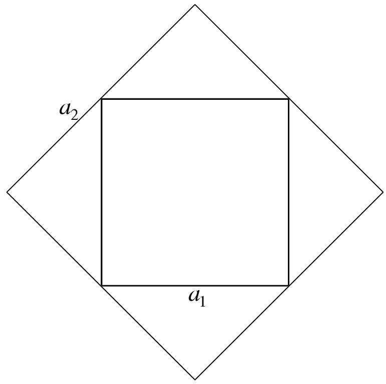
$$p \approx 21{,}15 \text{ Pa}.$$

**1766.** A sakktáblán 64 mező van, így a szükséges búzaszemek száma:

$$1 + 2 + 4 + ... + 2^{63} = \frac{2^{64} - 1}{2 - 1} \approx 1{,}845 \cdot 10^{19}.$$

A kért búzamennyiség tömege: $1{,}15 \cdot 10^{15}$ kg = 1,15 billió tonna!

**1767.** Jelölje az $n$-edik négyzet olalát $a_n$, területét $t_n$. Mivel $a_1 = 1$ és $t_1 = 1$, először vizsgáljuk meg $a_2$ értékét! Pitagorasz-tételét alkalmazva:




$$2 \cdot \left(\frac{a_2}{2}\right)^2 = a_1^2$$

$$a_2 = \sqrt{2} \cdot a_1$$

Általában is igaz, hogy

$$a_n = \sqrt{2} \cdot a_{n-1}$$

Az oldalak olyan mértani sorozatot alkotnak, ahol $a_1 = 1$ és $q = \sqrt{2}$. Eszerint:

$$a_{10} = \left(\sqrt{2}\right)^9 \cdot a_1 = 16\sqrt{2}$$

$$t_{10} = a_{10}^2 = 512.$$

**1768.** Az $n$-edik négyzet oldala legyen $a_n$, területe $t_n$. Pitagorasz-tétele alapján:

$$\left(\frac{a_{n-1}}{3}\right)^3 + \left(\frac{2a_{n-1}}{3}\right) = a_n^2$$

$$a_n = \frac{\sqrt{5}}{3} a_{n-1}$$

Az oldalak olyan mértani sorozatot alkotnak, ahol $a_1 = 1$ és $q = \frac{\sqrt{5}}{3}$. Az első öt négyzet kerületének összege:

$$4 \cdot (a_1 + ... + a_5) = 4 \cdot \frac{\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^5 - 1}{\frac{\sqrt{5}}{3} - 1} \approx 12{,}09$$

A tizedik négyzet területe:

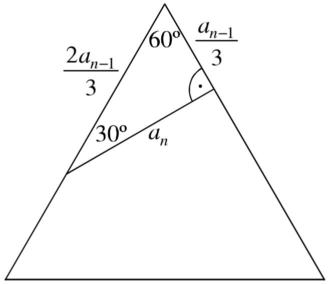
$$t_{10} = a_{10}^2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^{18} \approx 0{,}005.$$

**1769.** Az $n$-edik szabályos háromszög oldala legyen $a_n$. Az egymást követő háromszögekre igaz, hogy

$$a_n = \frac{1}{2} \cdot a_{n-1}$$

A hetedik háromszögre: $a_7 = \left(\frac{1}{2}\right)^6 \cdot a_1 = \frac{1}{64}$. Kerülete: $k = \frac{3}{64}$. Területe: $t = \frac{\sqrt{3}a_7^2}{4} =$
$= \frac{\sqrt{3}}{16\,384} \approx 1{,}06 \cdot 10^{-4}$.

**1770.** Az $n$-edik szabályos háromszög oldala legyen $a_n$, kerülete pedig $k_n$. $a_1 = 1$ és $k_1 = 3$. A Pitagorasz-tétel alapján, az ábra szerint:




$$\left(\frac{a_{n-1}}{3}\right)^2 + a_n^2 = \left(\frac{2a_{n-1}}{3}\right)^2$$

$$a_n = \frac{\sqrt{3}}{3}a_{n-1}.$$

A hetedik háromszög esetén:

$$a_7 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^6 a_1 = \frac{1}{27}$$

$$k_7 = \frac{3}{27} = \frac{1}{9}.$$

A keresett százalék:

$$\frac{k_7}{k_1} = \frac{1}{9} \approx 11{,}11\,\%.$$

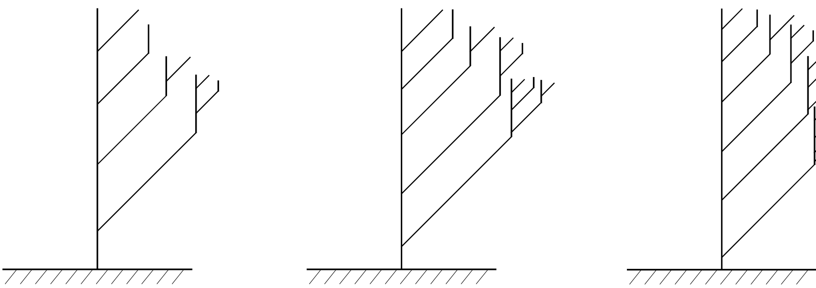
**1771.** Jelöljük az $n$-edik körgyűrű területét $t_n$-nel.

$$t_n = (n+1)^2 \cdot \pi - n^2 \cdot \pi = (2n+1) \cdot \pi$$

A körgyűrűk területei számtani sorozatot határoznak meg.

$$t_{10} = 21 \cdot \pi \approx 65{,}97.$$

**1772.** A fa ágainak száma a következők szerint alakul



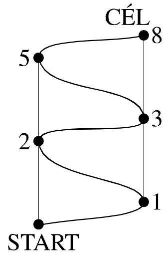
5 éves
(8 ág)

6 éves
(13 ág)

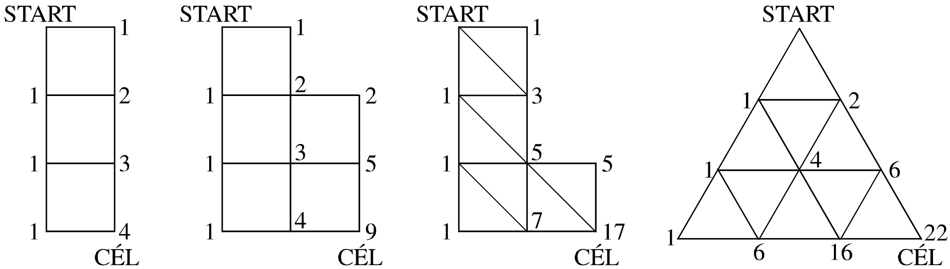
7 éves
(21 ág)

Ha az ágak számát az $n$-edik évben $a_n$ jelöli, akkor észrevehető, hogy $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. (Fibonacci-sorozat) Így $a_8 = 13 + 21 = 34$ ága lesz a fának 8 éves korában.

**1773.** Az egyes pontokba írva, hogy oda hányféle módon érkezhetünk, az adódik, hogy a csúcsra 8 féle úton juthatunk.




**1774.** Írjuk az egyes pontokba, hogy hányféle módon érkezhetünk oda!




**1775.** Az egyes mezőkre írjuk, hogy hányféle módon érhetjük el.

*a)* CÉL

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 8 | 36 | 120 | 330 | 792 | 1716 | 3432 | |
| 1 | 7 | 28 | 84 | 210 | 462 | 924 | 1716 | |
| 1 | 6 | 21 | 56 | 126 | 252 | 462 | 792 | |
| 1 | 5 | 15 | 35 | 70 | 126 | 210 | 330 | |
| 1 | 4 | 10 | 20 | 35 | 56 | 84 | 120 | |
| 1 | 3 | 6 | 10 | 15 | 21 | 28 | 36 | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | |
| | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | |

START

A jobb felső sarokba 3432 úton juthatunk el.

*b)* Hasonlóan kitöltve a táblázatot adódik, hogy a lehetséges útvonalak száma: 48 639.

**1776.** Ha a sorozat differenciája $d$, akkor az első egyenlőség:

$$a_2 - d + a_2 + a_2 + d = -12, \text{ azaz } a_2 = -4$$

A második egyenlőség alapján:

$$(-4 - d) \cdot (-4) \cdot (-4 + d) = 80$$

Ezt megoldva $d_1 = 6$ vagy $d_2 = -6$. A sorozat első három eleme:

$$-10; -4; 2 \text{ vagy } 2; -4; -10.$$

**1777.** Fejezzük ki az egyes elemeket $a_{10}$ és a sorozat $d$ differenciájának segítségével:

$$a_{10} - 6d + a_{10} - 2d + a_{10} + 2d + a_{10} + 6d = 224$$

$$a_{10} = 56$$

Az első tizenkilenc elem összege:

$$S_{19} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{10} + \ldots + a_{19} = a_{10} - 9d + a_{10} - 8d + \ldots + a_{10} + \ldots +$$

$$+ a_{10} + 9d = 19 \cdot a_{10} = 1064.$$

**1778.** Ha az áru eredeti ára $x$ forint, akkor az egyes árcsökkenések hatására az ára:

$$x \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}95 = x \cdot 0{,}855$$

Ez azt jelenti, hogy az eredeti ár 14,5 %-kal csökkent.

**1779.** Minden kiöntés esetén a kiömlő alkohol mennyisége arányos az edényben levő alkohol mennyiségével, ennek $\frac{1}{20}$ része, így az edényben minden esetben $\frac{19}{20}$ rész marad. Mivel kezdetben 20 l alkohol volt, ezért a tizedik kiöntés után:

$$20 \cdot \left(\frac{19}{20}\right)^{10} \text{ l} \approx 11{,}97 \text{ l alkohol marad.}$$

**1780.** Legyen a pontok száma $n$. Ha ezeket úgy vesszük fel a körvonalon, hogy ezeket összekötve a kör belsejének bármelyik pontjában legfeljebb két összekötő szakasz messe egymást, akkor az egyes esetekben a következő részek száma az alábbi módon alakul:

| $n$ a pontok száma | $r$ a részek száma |
|---|---|
| 1 | 1 |
| 2 | 2 |
| 3 | 4 |
| 4 | 8 |
| 5 | 16 |

Ezek után megfogalmazható egy sejtés, amely megadja a részek számát az $n$ függvényében. Arra gondolhatunk, hogy $r = 2^{n-1}$. Látható, hogy a képlet $n \leqq 5$ esetén helyesen adja meg a részek számát.
Ha megvizsgáljuk az $n = 6$ esetet, akkor azt várjuk, hogy $2^5 = 32$ rész keletkezik. Ez azonban nincs így! $n = 6$ esetben a kör részeinek száma csak 31.
A feladat jó példát adhat arra, hogy soha nem szabad elhamarkodottan általánosítani. 10 pont felvétele esetén legfeljebb 256 síkidom keletkezhet. Ez egy megfelelő ábra elkészítése esetén még összeszámlálható.

**1781.** Jelöljük az illeszthető egyenesek számát $e$-vel. A pontokat megfelelő helyzetben a síkon felvéve, a következő táblázat nyerhető:

| $n$ | $e$ |
|---|---|
| 4 | 6 |
| 5 | 10 |
| 6 | 15 |

Mivel bármelyik pont $n - 1$ másik ponttal határoz meg egy egyenest, így ha pontonként összeszámoljuk és figyelembe vesszük, hogy egy egyenest két pont esetén számolunk, akkor $n$ pont esetén az egyenesek száma:

$$e = \frac{n(n-1)}{2}.$$

**1782.** Az egyenesek akkor adnak legtöbb metszéspontot, ha nincsenek közöttük párhuzamosak és bármely metszéspontot át csak két egyenes halad át. Ilyen feltételek esetén a következő táblázatot kapjuk. (*n* az egyeneses, *p* a pontok száma.)

| $n$ | $p$ |
|---|---|
| 2 | 1 |
| 3 | 3 |
| 4 | 6 |
| 5 | 10 |

Mivel bármelyik egyenes $n-1$ egyenssel ad metszéspontot, és bármelyik metszéspont pontosan két egyenes metszéspontjaként jön létre, ezért az általános formula a következő lesz:

$$p = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Ezért az egyenes legfeljebb $\frac{n(n-1)}{2}$ metszéspontot határoz meg a síkon.