Geometriai transzformációk

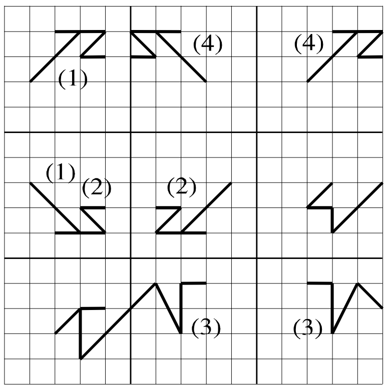
I. Egybevágósági transzformációk

2582. *a)* Eltolás az y tengely mentén 2-vel negatív irányba. (Eltolás a $\mathbf{v}(0; -2)$ vektorral.)
b) Tükrözés az $x = 10$ egyenesre.
c) A körüli $-90°$-os elforgatás.
d) A feladatban A' koordinátái helyesen $A'(-2; -2)$. Így a transzformáció origóra vonatkozó tükrözés.
e) Az x tengelyre vonatkozó tükrözés.
f) Az y tengelyre vonatkozó tükrözés.

2583. *a)* $A'(-2; -4)$, $B'(4; 2)$, $C'(5; -7)$
b) $A'(2; 4)$, $B'(-4; -2)$, $C'(-5; 7)$
c) $A'(2; -4)$, $B'(-4; 2)$, $C'(-5; -7)$
d) $A'(-2; 4)$, $B'(4; 10)$, $C'(-5; 11)$
e) $A'(2; 14)$, $B'(-4; 8)$, $C'(5; 7)$
f) $A'(-4; -2)$, $B'(2; 4)$, $C'(-7; 5)$
g) $A'(-2; 4)$, $B'(4; -2)$, $C'(-5; -3)$
h) $A'(10; -8)$, $B'(4; -2)$, $C'(3; -11)$
i) $A'(0; 4)$, $B'(6; -2)$, $C'(7; 7)$
j) $A'(-2; -1)$, $B'(4; -7)$, $C'(5; 2)$
k) $A'(4; -2)$, $B'(10; -8)$, $C'(11; 1)$

Tengelyes tükrözés

2584. A tükörképeket az ábrán azonos számmal jelöltük.

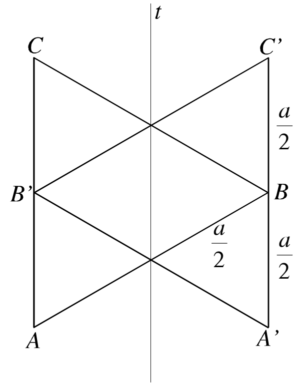


2585. Alapszerkesztések.

2586. Jelöljünk ki az adott egyenesen két olyan pontot, amelyek egyenlő távolságra vannak az adott kör középpontjától. Ezzel a távolsággal a kapott pontokból körívezve a metszéspont a képkör középpontja lesz.

2587. A metszetként kapott síkidom paralelogramma és deltoid, tehát rombusz.

2588. Ha a jelöli az eredeti háromszög oldalának hosszát, akkor a metszet egy $\frac{a}{2}$ oldalú, 60°-os szöget tartalmazó rombusz, míg az egyesítés egy konkáv hatszög. (Lásd az ábrát!) A 2446. feladat alapján a metszet kerülete



$$k = 4 \cdot \frac{a}{2} = 2a,$$

területe

$$t = 2 \cdot \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{8}.$$

Az egyesítésként kapott konkáv hatszög kerülete

$$K = 4a = 2k$$

területe

$$T = \frac{3}{2} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{8} = 3t.$$

a) $k = 6$ cm, $t = \frac{9 \cdot \sqrt{3}}{8}$ cm$^2 \approx 1{,}95$ cm^2, $K = 12$ cm, $T = \frac{27 \cdot \sqrt{3}}{8}$ cm$^2 \approx 5{,}85$ cm^2;

b) $k = 10$ cm, $t = \frac{25 \cdot \sqrt{3}}{8}$ cm$^2 \approx 5{,}41$ cm^2, $K = 20$ cm, $T = \frac{75 \cdot \sqrt{3}}{8}$ cm$^2 \approx 16{,}24$ cm^2;

c) $k = 120$ mm, $t = 450 \cdot \sqrt{3}$ mm$^2 \approx 779{,}42$ mm^2, $K = 240$ mm,
$T = 1350 \cdot \sqrt{3}$ mm$^2 \approx 2338{,}27$ mm^2;

d) $k = 1{,}5$ dm, $t = \frac{0{,}5625 \cdot \sqrt{3}}{8}$ dm$^2 \approx 0{,}122$ dm^2, $K = 3$ dm,
$T = \frac{1{,}6875 \cdot \sqrt{3}}{8}$ dm$^2 \approx 0{,}366$ dm^2.

2589. Az egyesítésként kapott síkidom egy rombusz, amelynek belső szögei 60° és 120°, oldalának hossza pedig megegyezik az eredeti háromszög oldalának hosszával. Ha a jelöli a szabályos háromszög oldalának hosszát, akkor

$$K = 4a,\ T = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}.$$ (Lásd a 2446. feladatot!)

a) $K = 12$ cm, $T = \frac{9 \cdot \sqrt{3}}{2}$ cm$^2 \approx 7{,}8$ cm^2;

b) $K = 16$ cm, $T = 8 \cdot \sqrt{3}$ cm$^2 \approx 13{,}86$ cm^2;

c) $K = 200$ mm, $T = 1250 \cdot \sqrt{3}$ mm$^2 \approx 216{,}5$ mm^2;

d) $K = 2{,}6$ dm, $T = 0{,}21125 \cdot \sqrt{3}$ dm$^2 \approx 0{,}366$ dm^2.

2590. Az egyesítésként kapott síkidom egy tompaszögű egyenlő szárú háromszög, amelynek szárai 5 cm hosszúak, alapja pedig 8 cm.

$$K = 18 \text{ cm}, \quad T = \frac{8 \cdot 3}{2} \text{ cm}^2 = 12 \text{ cm}^2.$$

2591. Az eredeti háromszög hegyesszögű, így az egyesítésként kapott síkidom mindkét esetben konvex deltoid lesz.

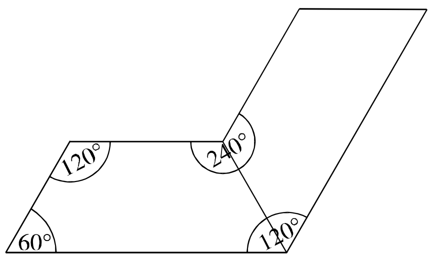
a) $K = 26$ cm; *b)* $K = 22$ cm.

2592. Az egyesítésként kapott síkidom szimmetrikus trapéz, amelynek alapjai 8 cm és 12 cm hosszúak, magassága 5 cm, szárának hossza pedig Pitagorasz tétele alapján $\sqrt{5^2 + 2^2}$ cm $= \sqrt{29}$ cm $\approx 5{,}385$ cm.

$$K \approx 30{,}77 \text{ cm}, \quad T = 50 \text{ cm}^2.$$

2593. A két kör középpontját összekötő szakasz felezőmerőlegese lesz a tükrözés tengelye.

2594. Az egyesített terület mindhárom esetben a trapéz területének kétszerese, így a 2474. feladat alapján $T = 2 \cdot \dfrac{3 \cdot 16 \cdot \sqrt{3}}{4}$ cm$^2 \approx 41{,}57$ cm^2.

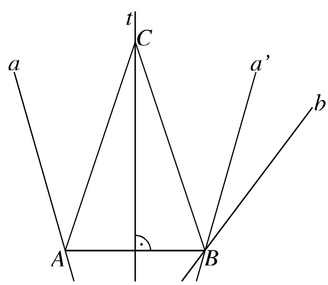


a) Az egyesítésként kapott síkidom szabályos hatszög, amelynek oldala 4 cm hosszú. A szabályos hatszögnek 6 szimmetriatengelye van. $K = 24$ cm.

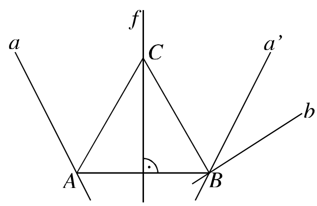
b) Az egyesítésként kapott síkidom egy konkáv hatszög (lásd a 2588. feladatot). Ennek a hatszögnek 2 szimmetriatengelye van. $K = 32$ cm.

c) Az egyesítésként kapott síkidom az ábrán látható konkáv hatszög, amelynek 1 szimmetriatengelye van. $K = 32$ cm.

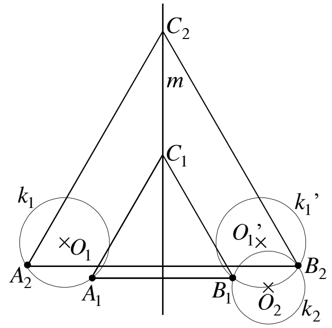
2595. Az a egyenes t-re vonatkozó a' tükörképének és a b egyenesnek a közös pontja lesz az alap egyik végpontja. A kapott pont t-re vonatkozó tükörképe az alap másik végpontja. Ha a' és b párhuzamosak, akkor nincs megoldás, ha egy közös pontjuk van akkor a megoldás egyértelmű, ha egybeesnek, akkor végtelen sok megfelelő háromszöget kapunk.



2596. f a háromszögnek szimmetriatengelye, így az A és a B csúcs az előző feladat kapcsán leírt módon szerkeszthető. A C csúcs a tengelynek az a pontja, amelyre $AC = CB = AB$.



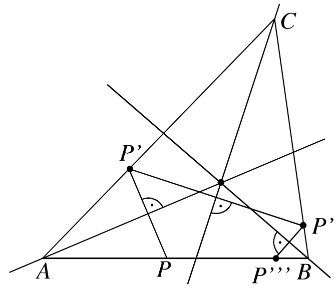
2597. A szabályos háromszögben a magasságvonal szimmetriatengely, ezért a háromszög egyik csúcsa a k_1 m-re vonatkozó k_1' tükörképének és k_2-nek a közös pontjaként adódik. (Lásd az ábrát!) A kapott pont m-re vonatkozó tükörképe is csúcsa a háromszögnek, a harmadik csúcs pedig m pontja úgy, hogy a három pont páronkénti távolságai megegyeznek.
A nem egybevágó megoldások száma attól függ, hogy k_1'-nek és k_2-nek hány közös pontja van. (Ha az O_1O_2 egyenes merőleges m-re, akkor különböző közös pontokból kiindulva is egybevágó megoldásokat kapunk.)



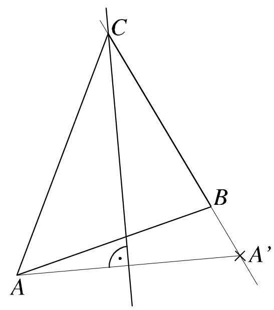
2598. A képpont a másik szögszáron lesz a tengelyes tükrözés tulajdonságaiból adódóan.

2599. Ha P az AB oldalon van és az A-ból kiinduló belső szögfelező egyenesére tükrözünk először, akkor P' az AC egyenesre illeszkedik. (Lásd az ábrát!)
A három tükrözés végrehajtása után kapott P''' pont az AB egyenesre illeszkedik.

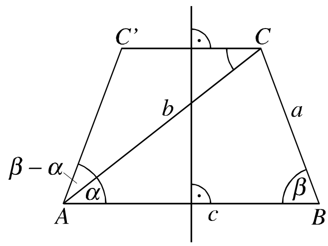
Megjegyzés: Ábránkon mindhárom képpont a háromszög valamelyik oldalának belső pontja, viszont az nem szükségszerű. Felvehető úgy a kiinduló P pont, hogy a képpontok ne illeszkedjenek mind a háromszög oldalaira.



2600. Az előző két feladat alapján A-nak az f egyenesre vonatkozó A' tükörképe illeszkedik a BC oldal egyenesére. Ebből adódóan az $A'B$ egyenes metszi ki a C csúcsot az f egyenesből. Ha $A'B$ párhuzamos f-fel, akkor nincs megoldás, ellenkező esetben a megoldás egyértelmű.



2601. Az $ABCC'$ szimmetrikus trapézban $ABC\sphericalangle = C'AB\sphericalangle = \beta$ és $CAB\sphericalangle = ACC'\sphericalangle = \alpha$. (Lásd az ábrát!)



Ebből

$$C'AC\sphericalangle = C'AB\sphericalangle - CAB\sphericalangle = \beta - \alpha.$$

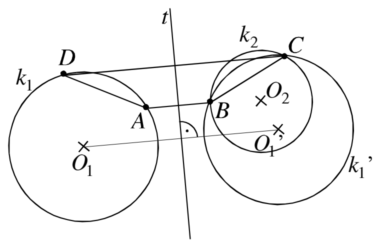
Az ACC' háromszögben tehát

$$AC = b,\ AC' = a \text{ és } C'AC\sphericalangle = \beta - \alpha.$$

2602. Az előző feladat alapján az ACC' háromszög (lásd az előző feladat ábráját) szerkeszthető, hiszen adott két oldala és a közbezárt szög. Az A pontnak a CC' szakasz felezőmerőlegesére vonatkozó tükörképe lesz a szerkesztendő háromszög B csúcsa.

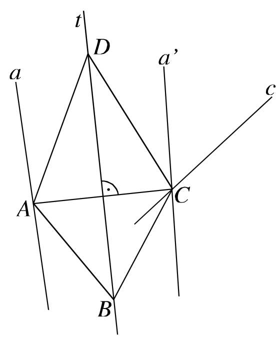
2603. Az eredeti és a képként kapott háromszög egyesítése szabályos háromszög, így az eredeti derékszögű háromszög rövidebb befogója fele olyan hosszú, mint az átfogó. (Lásd még a 2447. és 2543. feladatokat!)

2604. A k_1 kör t-re vonatkozó k_1' tükörképének és a k_2 körnek a metszéspontjai lesznek a trapéz egyik szárának végpontjai. (Lásd az ábrát!) Ezeknek a metszéspontoknak a t-re vonatkozó tükörképei a másik szár végpontjai.

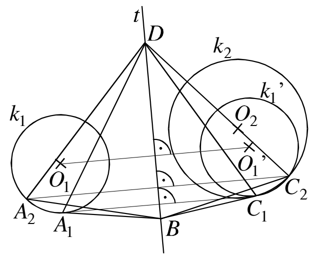


Ha k_1'-nek és k_2-nek legfeljebb egy közös pontja van, akkor nincs megoldás. Nem kapunk trapézt akkor sem, ha a metszéspontok által meghatározott egyenes merőleges t-re. Ha k_1 és k_2 egymás t-re vonatkozó tükörképei, akkor végtelen sok megoldást kapunk. Ha az eddig felsoroltak egyike sem teljesül, akkor a megoldás egyértelmű.

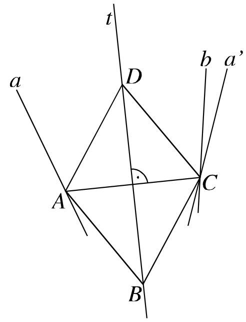
2605. Az a egyenes BD egyenesére vonatkozó a' tükörképének és c-nek a metszéspontja a deltoid harmadik csúcsa. A metszéspontnak a BD egyenesre vonatkozó tükörképe a negyedik csúcs. A megoldások száma attól függ, hogy a'-nek és c-nek hány közös pontja van.



2606. A k_1 kör BD egyenesére vonatkozó k_1' tükörképének és k_2-nek a közös pontja(i) a deltoid harmadik csúcsa(i). A metszéspontként kapott csúcsnak a BD egyenesre vonatkozó tükörképe a deltoid negyedik csúcsa. A szerkeszthetőség feltételeinek és a megoldások számának vizsgálatára nézve lásd a 2597. feladatot.



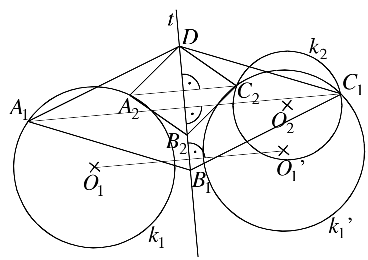
2607. Az a egyenes t-re vonatkozó a' tükörképének és b-nek közös pontja a rombusz C csúcsa. (Lásd az ábrát!) C-nek t-re vonatkozó tükörképe az A csúcs. D a tengelynek az a pontja, amelyre nézve $AB = AD$. A megoldások száma attól függ, hogy a'-nek és b-nek hány közös pontja van.



2608. A k_1 kör t-re vonatkozó k_1' tükörképének és a k_2 körnek közös pontja lesz a rombusz C csúcsa. (Lásd az ábrát!) Az A csúcs C-nek t-re vonatkozó tükörképe. A B csúcs a t tengely azon pontja, amelyre

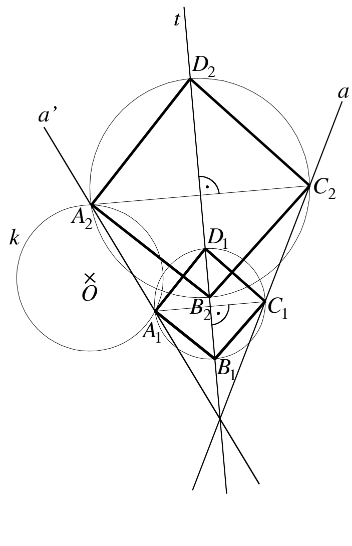
$$CD = CB = AB = AD.$$

A szerkeszthetőség feltételeinek és a megoldások számának vizsgálatára nézve lásd a 2597. feladatot.



2609. A négyzet A csúcsa (lásd az ábrát) az a egyenes t-re vonatkozó a' tükörképének és a k körnek közös pontja. A-nak t-re vonatkozó tükörképe a C csúcs. A B és a D csúcsot az AC szakasz mint átmérő fölé szerkesztett Thalesz kör metszi ki t-ből.

A feladatnak attól függően van 0, 1 vagy 2 megoldása, hogy a'-nek és k-nak hány közös pontja van. (Két egybevágó megoldást kapunk, ha a párhuzamos t-vel és a'-nek két közös pontja van k-val.)

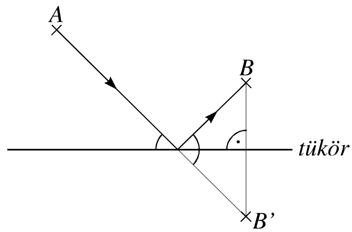


2610. *a)* A rombusz egyik oldala adott, így azt tükrözve a két szimmetriatengelyre és a tengelyek metszéspontjára kapjuk a többi oldalt.

b) A szimmetriatengelyek felezik a rombusz szögeit, így a 2598. feladat alapján az egyik pontnak a megfelelő tengelyre vonatkozó tükörképével megkapjuk az egyik oldalt, innen pedig az *a)* pont alapján dolgozhatunk.

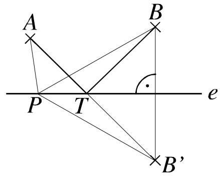
2611. Az adott pontot tükrözzük az adott egyenesekre. A kapott képpontok lesznek a háromszög hiányzó csúcsai.

2612. A szerkesztés az ábráról leolvasható. A tengelyes tükrözés megőrzi a szögek nagyságát, így a jelzett szögek egyenlőek. Ez pedig azt jelenti, hogy teljesül a visszaverődés törvénye.

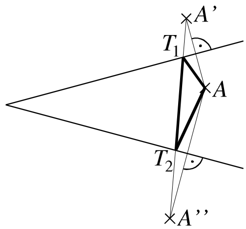


2613. A *b)* pontban nyilván az AB szakasz és e metszéspontja lesz a keresett T pont.

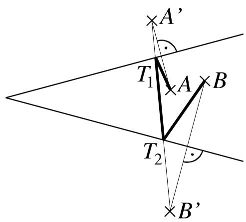
a) A szerkesztés az ábráról leolvasható. $AT + TB$ valóban minimális, hiszen a háromszög-egyenlőtlenség alapján $AT + TB = AT + TB' = AB' < AP + PB' = AP + PB$ az e egyenes bármely T-től különböző P pontjára.



2614. A szerkesztés az ábráról leolvasható. Az előző feladat alapján könnyen igazolható, hogy $AT_1 + T_1T_2 + T_2A$ valóban minimális.



2615. A szerkesztés az ábráról leolvasható. $AT_1 + T_1T_2 + T_2B$ minimalitása a 2613. feladat alapján könnyen igazolható.



2616. *a)* $A'(-2; -5)$, $B'(6; 2)$, $C'(4; -3)$, $D'(6; -8)$

b) $A'(2; 5)$, $B'(-6; -2)$, $C'(-4; 3)$, $D'(-6; 8)$

c) A csúcspontok koordinátái felcserélődnek.
$A'(5; -2)$, $B'(-2; 6)$, $C'(3; 4)$, $D'(8; 6)$

d) A koordináták felcserélődnek és előjelet váltanak.
$A'(-5; 2)$, $B'(2; -6)$, $C'(-3; -4)$, $D'(-8; -6)$

e) $A'(-2; 3)$, $B'(6; 10)$, $C'(4; 5)$, $D'(6; 0)$

f) $A'(-4; 5)$, $B'(-12; -2)$, $C'(-10; 3)$, $D'(-12; 8)$

2617.

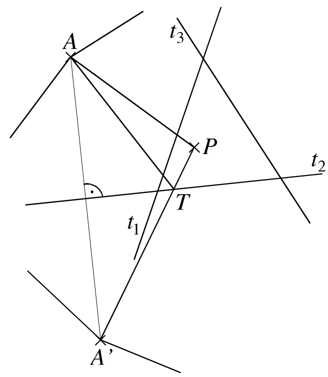
a) hamis	*b)* igaz	*c)* hamis	*d)* igaz	*e)* igaz	*f)* hamis
g) igaz	*h)* igaz	*i)* igaz	*j)* hamis	*k)* hamis	*l)* igaz
m) hamis	*n)* igaz	*o)* igaz	*p)* igaz	*q)* hamis	*r)* igaz

2618. Ha a háromszögnek van két szimmetriatengelye, akkor oldalai egyenlő hosszúak. A szabályos háromszögnek viszont három szimmetriatengelye van.

2619. Ha egy négyszögnek van két szimmetriatengelye, akkor téglalap vagy rombusz.
A téglalap harmadik szimmetriatengelyének illeszkednie kell két szemközti csúcsra, viszont ez csak úgy lehetséges, ha a szomszédos oldalak egyenlő hosszúak, azaz a téglalap négyzet.
A rombusz harmaik szimmetriatengelyének merőlegesen feleznie kell két szemközti oldalt, ami csak úgy lehetséges, ha a rombusz minden szöge derékszög, azaz a rombusz négyzet.
A négyzetnek négy szimmetriatengelye van.

2620. Igen van. Például kör, egyenes, félsík.

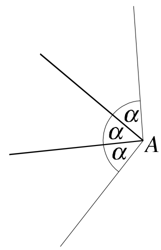
2621. Ha a sokszögnek van két szimmetriatengelye, akkor azok metszik egymást a sokszög belsejében. Ez következik abból a tényből, hogy mindkét szimmetriatengely két egyenlő területű részre osztja a sokszöget.
Tegyük fel, hogy a sokszögnek van három szimmetriatengelye, és ezek az állítással ellentétben páronként különböző pontokban metszik egymást. Ekkor a három metszéspont a sokszög belsejében egy háromszöget határoz meg. Jelöle t_1, t_2 és t_3 a három tengelyt (lásd az ábrát), és legyen P az általuk meghatározott háromszög egy belső pontja. Legyen A a sokszög P-től legtávolabbi (vagy egyik legtávolabbi) csúcsa. P és A valamelyik tengelynek ugyanazon az oldalán van (az ábrán ez pl. a t_2 tengely), így az A csúcsnak erre a tengelyre vonatkozó A' tükörképére (ami szintén csúcsa a sokszögnek) nézve



$$A'P = A'T + TP = AT + TP > AP,$$

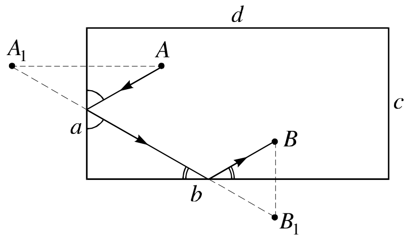
ami azt jelenti, hogy A' távolabb van P-től, mint A. Ez viszont ellentmond az A választásának, és ez az ellentmondás csak úgy oldható fel, ha igaz a feladat állítása.

2622. A tükrözések következtében az eredeti háromszög csúcsaiban három egybevágó szögtartomány találkozik az ábrán látható módon. A feltétel szerint ezek összege mindhárom csúcsnál 180°, ami csak úgy lehetséges, ha az eredeti háromszög minden szöge 60°-os, tehát a háromszög szabályos.

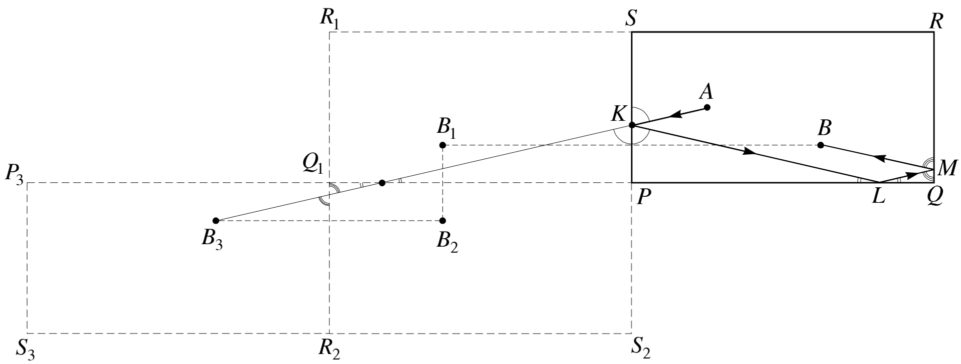


2623. *a)* Lásd a 2612. feladatot!

b) A szerkesztés a 2623/1. ábráról leolvasható.



2623/1. ábra



2623/2. ábra

c) A szerkesztés a 2623/2. ábrán látható. Itt is az volt a célunk, hogy a golyó útját „kiegyenesítsük”. Ennek érdekében, figyelembe véve az előírt ütközések sorrendjét, tükrözésekkel előállítottunk három „látszólagos” biliárdasztalt és mindegyikben jelöltük a *B* golyó megfelelő tükörképét. Az ábra jelöléseit használva a tükrözések sorrendje:

1. PS egyenesre $\rightarrow PSR_1Q_1$; B_1
2. PQ_1 egyenesre $\rightarrow PQ_1R_2S_2$; B_2
3. R_2Q_1 egyenesre $\rightarrow P_3S_3R_2Q_1$; B_3.

Az AB_3 szakasz a golyó útjának „kiegyenesített” megfelelője. Ezen szakasz és PS K metszéspontja az első ütközési pont. Az AB_3 és a PQ_1 szakasz metszéspontjának ősképe a PQ oldalon a második ütközési pont, míg az AB_3 és a Q_1R_2 szakasz metszés-

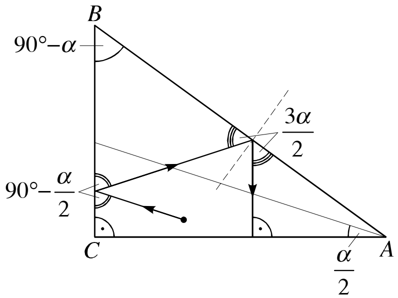
pontjának ősképe a QR oldalon a harmadik ütközési pont, M.
A tengelyes tükrözés megőrzi a szögek nagyságát, így az ábrán azonosan jelölt szögek egyenlőek, amiből adódóan a szerkesztett út megfelel a visszaverődés törvényének.
Ha az AB_3 szakasz illeszkedik a P_1 vagy a Q_1 pontra, akkor nincs megfelelő út.

d) A szerkesztés az előző pontban leírtakhoz hasonlóan történik, csak itt még egy „látszólagos” biliárdasztalt fel kell venni, nevezetesen a 2623/2. ábra $P_3S_3R_2Q_1$ téglalapját kell tükrözni az S_3R_2 egyenesre.

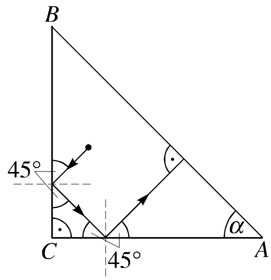
2624. A harmadik oldalra mindkét esetben merőlegesen érkezik a golyó.

a) A 2624/1. ábra alapján $\frac{3\alpha}{2}+\alpha=90°$, ahonnan $\alpha=36°$.

b) A 2624/2. ábra alapján $\alpha=45°$.



2624/1. ábra



2624/2. ábra

Középpontos tükrözés

2625. Alapszerkesztések.

2626. Alapszerkesztések.

2627. A kapott síkidom paralelogramma.

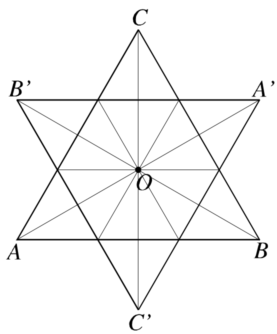
2628. A tükrözés középpontja a szakaszok végpontjai által meghatározott paralelogramma átlóinak metszéspontja.

2629. *a)* A közös rész egy szabályos hatszög, amelynek oldala $\frac{4}{3}$ cm hosszú.

$$k=8\text{ cm},\quad t=6\cdot\frac{\left(\frac{4}{3}\right)^2\cdot\sqrt{3}}{4}\text{ cm}^2=$$

$$=\frac{8\cdot\sqrt{3}}{3}\text{ cm}^2\approx 4{,}62\text{ cm}^2.$$

(Lásd a 2487. feladatot!)



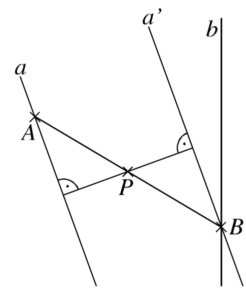
b) Az egyesítés egy konkáv tizenkétszög (hatágú csillag), amelynek oldala szintén $\frac{4}{3}$ cm hosszú. $K = 16$ cm, és az ábráról leolvasható, hogy a terület a metszet területének kétszerese, azaz $T = 2t \approx 9{,}24$ cm^2.

2630. Az egyesítésként kapott síkidom egy olyan 4 cm oldalhosszúságú rombusz, amelynek van 60°-os szöge. $K = 16$ cm és a 2446. feladat alapján $T = 2\cdot\frac{4^2\cdot\sqrt{3}}{4}$ cm^2 $= 8\cdot\sqrt{3}$ cm^2 $\approx 13{,}85$ cm^2.

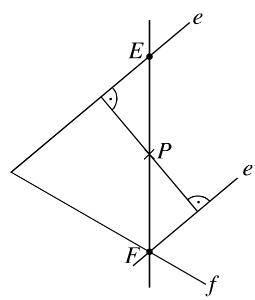
2631. Pitagorasz tételének megfordításából adódóan a háromszög derékszögű, így az egyesítésként kapott négyszög téglalap. $K = 14$ cm, $T = 12$ cm^2.

2632. Az egyesítésként kapott síkidom paralelogramma.

2633. Az a egyenes P-re vonatkozó tükörképe metszi ki az egyik (B) pontot a b egyenesből. Az a egyenes megfelelő pontja (A) a B P-re vonatkozó tükörképe. Ha a'-nek és b-nek nincs közös pontja, akkor nincs megfelelő pontpár.

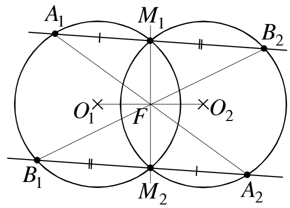


2634. Az egyik szögszár egyenesének P-re vonatkozó tükörképe metszi ki a másik szögszárból a szerkesztendő egyenes egy P-től különböző pontját. Az FP egyenes valóban megfelel, ugyanis a középpontos tükrözésből adódóan $FP = PE$. (Lásd az ábrát!) Mindig van megoldás, és az egyértelmű.

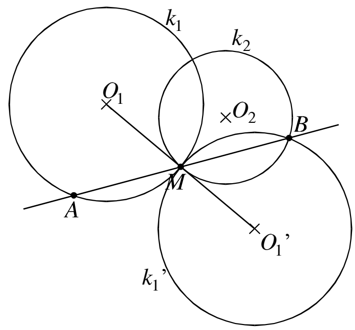


2635. Az előző feladatban kapott EF szakasz fölé szerkesztett Thalesz-körből EF felezőmerőlegese metszi ki a négyzet hiányzó csúcsait. (Lásd a 2386/*b)* feladatot!)

2636. A két kör középpontosan szimmetrikus az O_1O_2 szakasz F felezőpontjára, és tengelyesen szimmetrikus az M_1M_2 egyenesre, így O_1O_2 és M_1M_2 merőlegesen felezik egymást. Az ábra jelöléseit használva, mivel M_1 és M_2 F-re nézve egymás tükörképei, ezért az A_1B_2 és a B_1A_2 párhuzamos egyenesek is egymás tükörképei. A két kör és a két szelő szimmetrikus elhelyezkedéséből adódóan A_1 F-re vonatkozó tükörképe A_2 és B_1 F-re vonatkozó tükörképe B_2. Ezek alapján az $A_1M_2A_2M_1$ és $B_1M_2B_2M_1$ négyszögek paralelogrammák, hiszen átlóik felezik egymást, tehát az azonosan jelölt szakaszok valóban egyenlő hosszúak.

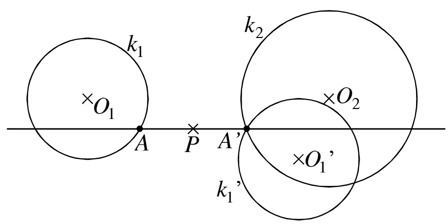


2637. Az A pont M-re vonatkozó tükörképe B, így valóban $AM = MB$.

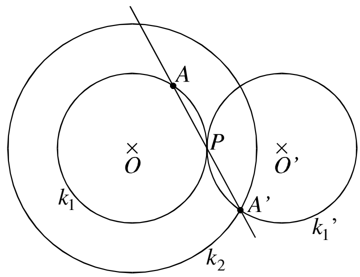


2638. Lásd az előző feladatot!

2639. A k_1 kör P-re vonatkozó k_1' tükörképének és k_2-nek a P-hez közelebbi közös pontja legyen A'. (Lásd az ábrát!) A'-nek a P-re vonatkozó tükörképe a k_1 kör A pontja. A középpontos tükrözés tulajdonságaiból adódóan az AA' egyenes megfelel a feltételnek, ugyanis $AP = PA'$.
A feltételnek megfelelő közös szelő létezéséhez szükséges, hogy k_1'-nek és k_2-nek legyen közös pontja.

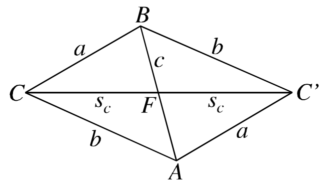


2640. Jelöljük ki a belső kör egy tetszőleges P pontját és tükrözzük a kört erre a pontjára. (Lásd az ábrát!) Ha A' jelöli a külső kör és a képkör egyik közös pontját, akkor az $A'P$ egyenes megfelel, ugyanis a tükrözésből adódóan $AP = PA'$, ahol A az A' pont őse. P-t tetszőlegesen választottuk, így a feladatnak végtelen sok megoldása van.

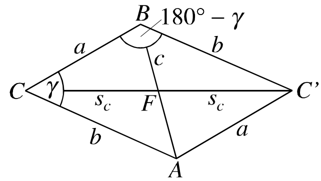


2641. Alkalmazzuk a 2633. feladat módszerét a négyszög szemközti oldalegyeneseire. Az így kapott négy pont által meghatározott négyszög átlói P-ben felezik egymást.

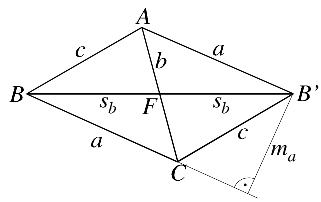
2642. Az ábrán látható $CC'B$ háromszög szerkeszthető, hiszen adottak oldalai (a, b, $2s_c$). A CC' oldal F felezőpontjára tükrözve B-t, kapjuk a háromszög A csúcsát. Az adatokra fenn kell állnia az $a + b > 2s_c$ egyenlőtlenségnek, így az *a)* és a *d)* esetben nincs megoldás.



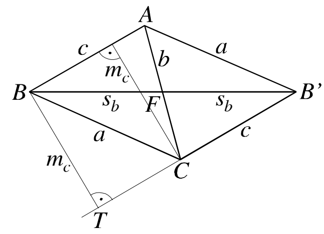
2643. A $CC'B$ háromszög szerkeszthető (lásd az ábrát), ugyanis adott két oldala (a, $2s_c$) és a nagyobbikkal szemközti szög ($180° - \gamma$). Az A csúcs B-nek a CC' oldal felezőpontjára vonatkozó tükörképe. A szögek szerkesztésére nézve lásd a 2144. és 2145. feladatokat!



2644. Az ábrán látható BCB' háromszög szerkeszthető, hiszen adott két oldala (a, $2s_b$) és az egyikhez tartozó magasság (m_a). (Lásd a 2357/*d)* feladatot!) C-nek a BB' oldal F felezőpontjára vonatkozó tükörképe az A csúcs.



2645. *a)* A 2645/1. ábrán látható *BCB'* háromszög szerkeszthető két oldalából (a, $2s_b$) és a harmadik oldalhoz tartozó magasságból (m_c).



2645/1. ábra

1. Ha $m_c = a < 2s_b$, akkor az *ABC* háromszög derékszögű (b az átfogó), és így $s_b = \frac{b}{2}$. (Lásd a 2348/*b)* feladatot!)
2. Tegyük fel, hogy $m_c < a$ és $m_c < 2s_b$ ($m_c > a$ és $m_c \geqq 2s_b$ esetén nincs megoldás.) A $2s_b$ hosszúságú *BB'* szakasz fölé szerkesztett Thalesz-körből a *B* középpontú, m_c sugarú kör kimetszi a *T* pontot. (Lásd a 2645/1. ábrát!) A *B'T* egyenesből a *B* középpontú, a sugarú kör kimetszi a *C* csúcsot. (*C*-re most két lehetőségünk van, az ábra csak az egyiket tünteti fel.) *C*-nek a *BB'* szakasz *F* felezőpontjára vonatkozó tükörképe az *A* csúcs.

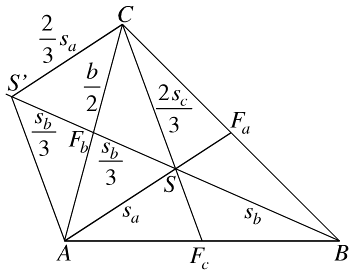
Az 1. esetben kapott megoldás egyértelmű, a 2. esetben két nem egybevágó megoldást kapunk.

b) Lásd a 2642. feladatot! Egyértelmű megoldást kapunk, ha $a + c > 2s_b$.

c) Lásd a 2643. feladatot! $2s_b \geqq a$ esetén a megoldás egyértelmű. Ha $2s_b < a$, akkor két nem egybevágó megoldást kapunk.

d) Lásd a 2644. feladatot! Ha $2s_b \geqq m_c$, akkor amegoldás egyértelmű, ellenkező esetben nincs megoldás.

e) A háromszög súlypontja 2 : 1 arányban osztja a súlyvonalakat, így 2645/2. ábrán látható *SCS'* háromszög oldalai $\frac{2}{3}s_a$, $\frac{2}{3}s_b$, $\frac{2}{3}s_c$. (*S'* az *S* súlypontnak az *AC* oldal F_b felezőpontjára vonatkozó tükörképe.) Az *SCS'* háromszög tehát szerkeszthető, és így szerkeszthetők ezen háromszög súlyvonalai is, amelyek hossza éppen $\frac{a}{2}$, $\frac{b}{2}$, $\frac{c}{2}$.

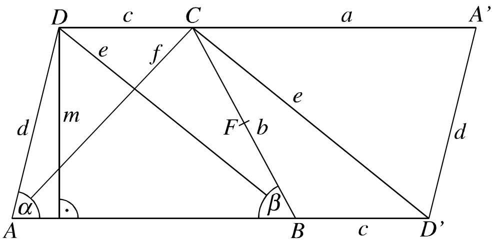


2645/2. ábra

A feladatnak egyértelmű megoldása van, ha $s_a + s_b > s_c$ és $s_a + s_c > s_b$.

Az adott súlyvonalak harmadolására nézve lásd a 2760/*a)* feladatot!

2646. *a)* Ha a trapézt egyesítjük a BC oldal F felezőpontjára vonatkozó tükörképével, akkor egy olyan paralelogrammát kapunk, amelynek oldalai $a + c$ és d, az $a + c$ hosszúságú oldalhoz tartozó magassága pedig m (lásd az ábrát). Ezekből az adatokból a paralelogramma $d \geqq m$ esetén egyértelműen szerkeszthető a 2368/*f)* feladat alapján. A kapott paralelogramma átlóinak metszéspontja F, ahonnan $\frac{b}{2}$-vel körívezve megkapjuk a trapéz B és C csúcsát. ($b \geqq m$ esetén van csak megoldás és az egyértelmű.)



b) Az ábrán látható $AD'A'D$ paralelogramma szerkeszthető egyik oldalából ($a + c$), a hozzá tartozó magasságból (m) és egyik szögéből (α). (Lásd a 2368/*c)* feladatot!) Az AD' oldalra, az ábrának megfelelően felvett β szög szárát toljuk el úgy, hogy illeszkedjen a paralelogramma átlóinak F metszéspontjára. A megoldás egyértelmű.

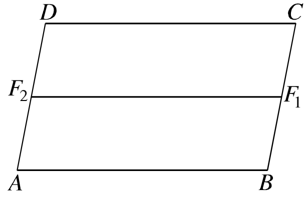
c) Az ábrán látható $AD'C$ háromszögnek adott három oldala, így szerkeszthető, ha $e + f > a + c$. C-ből b-vel körívezve az AD' szakaszon kijelölhető a B pont. D'-t a BC szakasz felezőpontjára tükrözve kapjuk a D csúcsot. A megoldás egyértelmű.

d) Az ábrán látható $AD'C$ háromszög szerkeszthető, hiszen adott két oldala (e, f) és a közbezárt szög ($180° - \delta$). A-ból az ábrának megfelelően a-t felmérve kapjuk az AD' szakaszon a B csúcsot. Az AD'-vel párhzamos, C-re illeszkedő egyenesre az ábrának megfelelően C-ből felmérve az $AD' - a = c$ hosszúságú szakaszt adódik a D csúcs. Ha B az AD' szakasz belső pontja, akkor a megoldás egyértelmű.

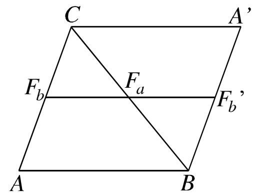
e) Az ábra $AD'C$ háromszöge szerkeszthető, így szerkeszthető az $AD' = a + c$ szakasz is. $a + c$ és $a - c$ tehát adott, amiből a 2135. feladat alapján a szerkeszthető. Innen lásd az előző pontot!

2647. A háromszög oldalainak felezőpontjai átal meghatározott egyenesek (és csak ezek) megfelelnek. Három ilyen egyenes van.

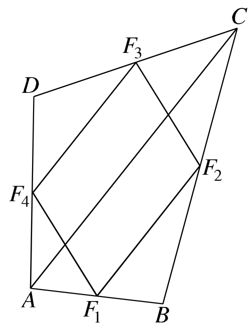
2648. Mivel F_1 és F_2 felezőpontok, ezért az ABF_1F_2 négyszögben az AF_2 és BF_1 oldalak párhuzamosak és egyenlő hosszúak. Ebből viszont adódik, hogy az ABF_1F_2 négyszög paralelogramma, így AB párhuzamos és egyenlő hosszú F_1F_2-vel.



2649. Az állítást az F_aF_b középvonalra látjuk be, a többire hasonlóan megy. Tükrözzük a háromszöget a BC oldal F_a felezőpontjára. A kapott $ABA'C$ négyszög paralelogramma, amelyben az $A'B$ oldal F_b' felezőpontja az F_b képe. Az előző feladat alapján $F_bF_b' = AB$ és párhuzamosak, tehát valóban $F_aF_b = \dfrac{AB}{2}$ és párhuzamosak.



2650. Az ábrán látható ACD háromszögben F_3F_4 középvonal, így az előző feladat alapján F_3F_4 párhuzamos az AC átlóval és $F_3F_4 = \dfrac{AC}{2}$. Ugyanez mondható el az ABC háromszög F_1F_2 középvonaláról is, ezért F_1F_2 párhuzamos és egyenlő hosszú F_3F_4-gyel, amiből adódóan az $F_1F_2F_3F_4$ négyszög paralelogramma.



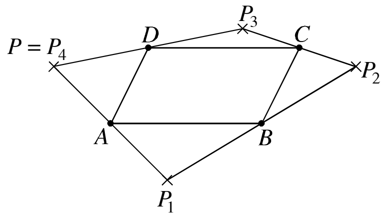
2651. Lásd az előző feladatot!

a) A négyszög átlói egyenlő hosszúak.

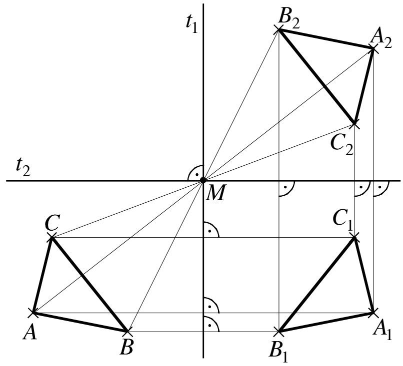
b) A négyszög átlói merőlegesek egymásra.

c) A négyszög átlói egyenlő hosszúak és merőlegesek egymásra.

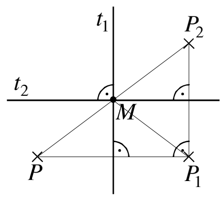
2652. A négy középpontos tükrözés végrehajtása után visszajutunk az eredeti pontba. ($P_4 = P$, lásd az ábrát!) Ez a 2649. és a 2650. feladat alapján abból adódik, hogy a PP_2 és P_2P_4 szakaszok párhuzamosak és egyenlő hosszúak, és mivel egyik végpontjuk közös, ezért egybeesnek.



2653. Az ábra ABC és $A_2B_2C_2$ háromszögei egymás középpontos tükörképei a merőleges egyenesek M metszéspontjára nézve.
Két egymásra merőleges tengelyre vonatkozó tükrözés egymásutánja a metszéspontjukra vonatkozó középpontos tükrözés.



2654. A tengelyek merőlegességéből adódóan az ábrán látható PP_1P_2 háromszög derékszögű, és mivel $PM = P_1M = P_2M$, ezért Thalesz tételének megfordításából adódóan M a PP_2 szakasz felezőpontja.



2655. *a)* hamis *b)* igaz *c)* hamis *d)* igaz *e)* igaz *f)* hamis
g) igaz *h)* igaz *i)* hamis *j)* igaz *k)* hamis *l)* hamis
m) igaz *n)* igaz *o)* igaz *p)* igaz *q)* igaz

2656. *a)* $A'(-2; -7)$, $B'(4; -5)$, $C'(1; 4)$ *b)* $A'(-2; -5)$, $B'(4; -3)$, $C'(1; 6)$
c) $A'(0; 1)$, $B'(6; 3)$, $C'(3; 12)$ *d)* $A'(-4; -13)$, $B'(2; -11)$, $C'(-1; -2)$
e) $A'(-10; 3)$, $B'(-4; 5)$, $C'(-7; 14)$ *f)* $A'(-4; 5)$, $B'(2; 7)$, $C'(-1; 16)$
g) $A'\left(-4; -\frac{5}{3}\right)$, $B'\left(2; \frac{1}{3}\right)$, $C'\left(-1; \frac{28}{3}\right)$

Ha a $P(x; y)$ pontnak az $O(a; b)$ pontra vonatkozó tükörképe $P_1(x_1; y_1)$, akkor O felezi a PP_1 szakaszt, amiből adódóan

$$a = \frac{x + x_1}{2} \quad \text{és} \quad b = \frac{y + y_1}{2}.$$

A fenti két kifejezésből a P_1 pont koordinátái:

$$x_1 = 2a - x \quad \text{és} \quad y_1 = 2b - y.$$

2657. $A(-2; 5)$, $B(2; 2)$, $C(5; 7)$, $D(2; 9)$, $E(0; 9)$
$A'(-2; -5)$, $B'(2; -2)$, $C'(5; -7)$, $D'(2; -9)$, $E'(0; -9)$
$A''(2; -5)$, $B''(-2; -2)$, $C''(-5; -7)$, $D''(-2; -9)$, $E''(0; -9)$
A két tengelyes tükrözés egymásutánja az origóra vonatkozó középpontos tükrözés. (Mindkét koordináta előjelet vált.)
Lásd még a 2653. és 2654. feladatokat!

2658. Mindegyik esetben két megfelelő négyzet teljesíti a feltételt.
Ha a csúcspontok koordinátái abszolútértékének összege S, akkor a megfelelő négyzetek csúcsainak koordinátái:

1. $\left(\frac{S}{4}; 0\right)$, $\left(0; \frac{S}{4}\right)$, $\left(-\frac{S}{4}; 0\right)$, $\left(0; -\frac{S}{4}\right)$

2. $\left(\frac{S}{8}; \frac{S}{8}\right)$, $\left(-\frac{S}{8}; \frac{S}{8}\right)$, $\left(-\frac{S}{8}; -\frac{S}{8}\right)$, $\left(\frac{S}{8}; -\frac{S}{8}\right)$

a) (2; 0), (0; 2), (–2; 0), (0; –2)
(1; 1), (–1; 1), (–1; –1), (1; –1)

b) (4; 0), (0; 4), (–4; 0), (0; –4)
(2; 2), (–2; 2), (–2; –2), (2; –2)

c) (6; 0), (0; 6), (–6; 0), (0; –6)
(3; 3), (–3; 3), (–3; –3), (3; –3)

d) (12; 0), (0; 12), (–12; 0), (0; –12)
(6; 6), (–6; 6), (–6; –6), (6; –6)

e) (16; 0), (0; 16), (–16; 0), (0; –16)
(8; 8), (–8; 8), (–8; –8), (8; –8)

2659. Aladár Berci lépéseitől függetlenül mindkét esetben megnyerheti a játékot. A nyerő stratégia a következő:

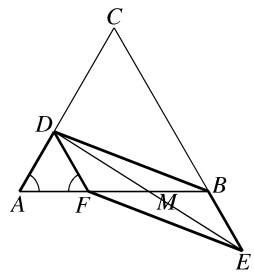
1. lépés: Aladár az asztal szimmetriaközéppontjába teszi az első zsetont.

További lépések: Aladár Berci utoljára letett zsetonjának a középpontra vonatkozó tükörképét lépi, azaz úgy teszi le a zsetonját, hogy a Berci és az ő zsetonja által meghatározott szakasz felezőpontja az asztal szimmetriaközéppontja legyen.

2660. A középpontosan szimmetrikusan elhelyezkedő párok: $b - c$; $c - e$; $c - f$.

2661. Mivel a paralelogramma átlói felezik egymást, ezért a 2633. és a 2639. feladat eljárását kell kétszer alkalmazni.
Megoldást akkor kapunk, ha az átlók metszéspontjára vonatkozó tükrözések után létrejönnek a megfelelő metszéspontok.
Az *a)* esetben a megoldás (ha van) egyértelmű, a *b)* esetben legfeljebb négy nem egybevágó megoldást kaphatunk.

2662. Vegyük fel az F pontot az AB szakaszon úgy, hogy DF párhuzamos legyen BC-vel. (Lásd az ábrát!) Mivel $AC = BC$, ezért $AD = DF$. Az $EBDF$ négyszög két szemközti oldala (BE és DF) párhuzamos és egyenlő, így a négyszög paralelogramma. A paralelogramma átlói felezik egymást, tehát $DM = ME$.



Pont körüli elforgatás

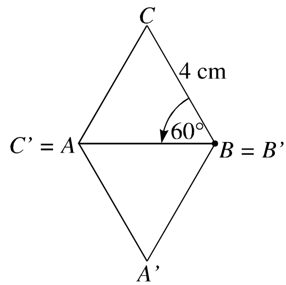
2663. Alapszerkesztések. A szögek szerkesztésére nézve lásd a 2144-2146. feladatokat!

2664. Alapszerkesztések. A szögek szerkesztésére nézve lásd a 2144-2146. feladatokat!

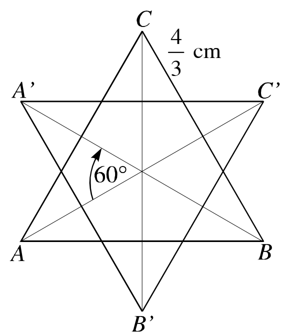
2665. Alapszerkesztések. A szögek szerkesztésére nézve lásd a 2144-2146. feladatokat!

2666. Alapszerkesztések. A szögek szerkesztésére nézve lásd a 2144-2146. feladatokat!

2667. *a)* Az egyesített síkidom egy olyan rombusz, amelynek van 60° nagyságú belső szöge. Lásd a 2589. feladatot!



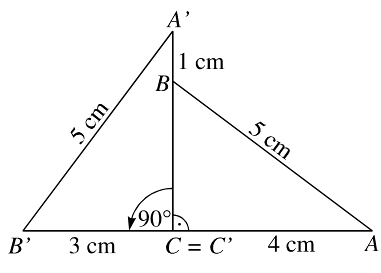
b) Az egyesített síkidom egy konkáv tizenkétszög (hatágú csillag), amelynek mindegyik oldala $\frac{4}{3}$ cm hosszú. Lásd a 2629/*b)* feladatot!



2668. Az erdeti háromszög Pitagorasz tételének megfordítása értelmében derékszögű.

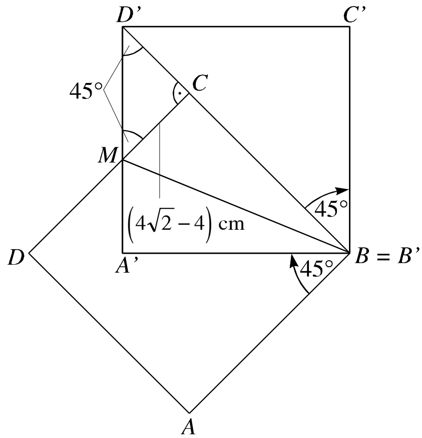
a) Az egyesített síkidom az ábrán látható konkáv négyszög. $K = 18$ cm, $T = 12\ \text{cm}^2$.

b) Lásd az előző pontot!



2669. *a)* A közös rész egy deltoid (a 2669/1. ábrán $A'BCM$), amelynek szögei: 45°, 90°, 90°, 135°; oldalainak hoszsza pedig: $A'B = BC = 4$ cm, $A'M = MC = \left(4\sqrt{2} - 4\right)$ cm $\approx 1{,}65$ cm. $k \approx 11{,}31$ cm,

$t = 4 \cdot \left(4\sqrt{2} - 4\right)$ cm$^2 \approx 6{,}63$ cm^2.



2669/1. ábra

Az egyesítés egy tengelyesen szimmetrikus konkáv hatszög (a 2669/1. ábrán $ABC'D'MD$), amelynek négy oldala 4 cm, két oldala pedig $\left(4 - \left(4\sqrt{2} - 4\right)\right)$ cm $= \left(8 - 4\sqrt{2}\right)$ cm hosszú. A belső szögek között négy derékszög van, egy szög 135°-os, egy pedig 225°-os.

$K = 4 \cdot 4$ cm $+\ 2 \cdot \left(8 - 4\sqrt{2}\right)$ cm $=$

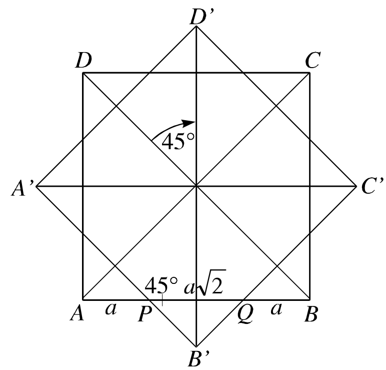
$\left(32 - 8\sqrt{2}\right)$ cm $\approx 20{,}7$ cm. Az egyesített terület megkapható, ha a két négyzet területének összegéből levonjuk az ily módon kétszer számolt közös rész területét, tehát $T = 32$ cm$^2 - t \approx$ $\approx 25{,}37$ cm^2.

b) A közös rész egy szabályos nyolcszög, az egyesítés pedig egy egyenlő oldalú konkáv tizenhatszög (nyolcágú csillag). Határozzuk meg mindkét síkidom oldalának hosszát. Jelölje a 2669/2. ábrán látható AP szakasz hosszát a. Ekkor

$$2a + a\sqrt{2} = 4 \text{ cm},$$

ahonnan

$$a = \frac{4}{2 + \sqrt{2}} \text{ cm} \approx 1{,}17 \text{ cm}.$$



2669/2. ábra

Tehát az egyesített síkidom oldalának hossza $a \approx 1{,}17$ cm, a közös rész oldalának hossza pedig $a\sqrt{2} = 1{,}65$ cm. Így a közös rész kerülete: $k \approx 8 \cdot 1{,}65$ cm $= 13{,}2$ cm, az egyesítés kerülete pedig $K \approx 16 \cdot 1{,}17$ cm $= 18{,}72$ cm. A közös rész területét megkapjuk, ha a négyzet területéből kivonjuk négy darab a befogójú egyenlőszárú derékszögű háromszög területét. Így $t = 16$ cm$^2 -\ 4 \cdot \dfrac{a^2}{2} \approx 16$ cm$^2 - 2{,}74$ cm$^2 = = 13{,}26$ cm^2. Az egyesített síkidom esetén a négyzet területéhez hozzá kell adnunk a közös résznél levont területet, így $T \approx 16\ \text{cm}^2 + 2{,}74\ \text{cm}^2 = 18{,}74\ \text{cm}^2$.

2670. A 2504. feladat alapján a fokokban mérve α nagyságú középponti szöghöz tartozó r sugarú körcikk kerülete:

$$K = 2r\left(1 + \pi \cdot \frac{\alpha}{360°}\right),$$

területe pedig

$$T = r^2\pi \cdot \frac{\alpha}{360°}.$$

a) A metszet középponti szöge 90°, így

$$k = 2r\left(1 + \frac{\pi}{4}\right) \approx 10{,}71\ \text{cm}, \quad t = r^2\frac{\pi}{4} \approx 7{,}06\ \text{cm}^2.$$

Az egyesítés középponti szöge 150°, így

$$K = 2r\left(1 + \frac{5\pi}{12}\right) \approx 13{,}85\ \text{cm}, \quad T = r^2\frac{5\pi}{12} \approx 11{,}78\ \text{cm}^2.$$

b) A metszet középponti szöge 75°, így

$$k = 2r\left(1 + \frac{5\pi}{24}\right) \approx 9{,}92\ \text{cm}, \quad t = r^2\frac{5\pi}{24} \approx 5{,}89\ \text{cm}^2.$$

Az egyesítés középponti szöge 165°, így

$$K = 2r\left(1 + \frac{11\pi}{24}\right) \approx 14{,}63\ \text{cm}, \quad T = r^2\frac{11\pi}{24} \approx 12{,}95\ \text{cm}^2.$$

c) A metszet középponti szöge 30°, így

$$k = 2r\left(1 + \frac{\pi}{12}\right) \approx 7{,}57\ \text{cm}, \quad t = r^2\frac{\pi}{12} \approx 2{,}35\ \text{cm}^2.$$

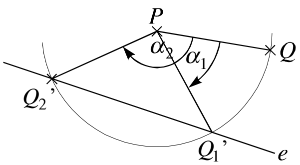
Az egyesítés középponti szöge 210°, így

$$K = 2r\left(1 + \frac{7\pi}{12}\right) \approx 17\ \text{cm}, \quad T = r^2\frac{7\pi}{12} \approx 16{,}49\ \text{cm}^2.$$

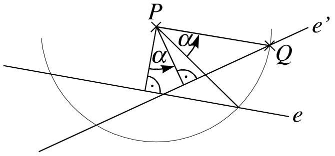
d) A két körcikknek nincs metszete.
Az egyesítés középponti szöge 240°, így

$$K = 2r\left(1 + \frac{2\pi}{3}\right) \approx 18{,}56\ \text{cm}, \quad T = r^2\frac{2\pi}{3} \approx 18{,}84\ \text{cm}^2.$$

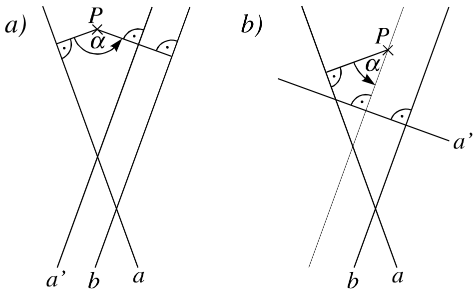
2671. Lásd az ábrát!



2672. Lásd az ábrát!



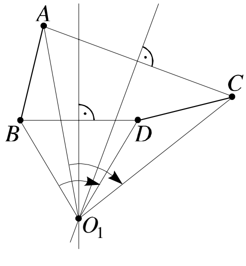
2673. Lásd az ábrákat!



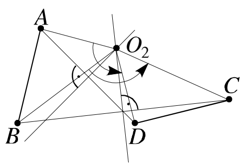
2674. A kérdéses ponthalmaz az AB szakasz felezőmerőlegese.

2675. Legyen a két szakasz AB és CD. Ha AB-t szeretnénk CD-re forgatni, akkor két lehetőségünk van: $A \to C$ és $B \to D$, illetve $A \to D$ és $B \to C$. Az előző feladat alapján az egymásnak megfelelő végpontok által meghatározott szakaszok felezőmerőlegeseinek közös pontja lesz a forgatás középpontja. (Lásd az alábbi két ábrát!)

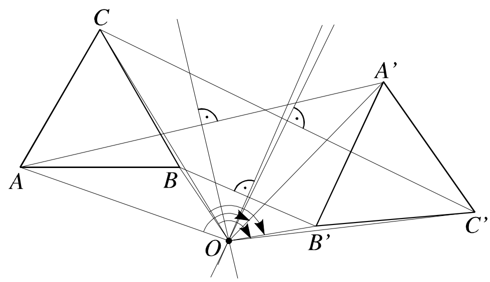
$O_1B = O_1D,\ O_1A = O_1C$



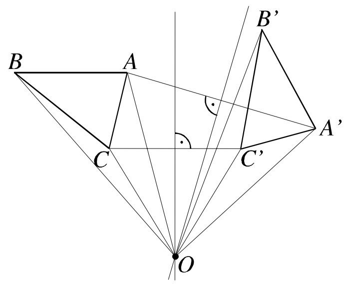
$O_2A = O_2D,\ O_2B = O_2C$



2676. Az előző feladat alapján az egymásnak megfelelő pontok által meghatározott szakaszok felezőmerőlegeseinek közös pontja lesz a forgatás centruma. A két háromszög körüljárásának meg kell egyeznie, ezért három megoldása van a feladatnak. Egyik lehetséges megoldás az ábrán látható.
(A következő feladat kapcsán bizonyítjuk általánosabban, hogy a három szakaszfelező merőlegesnek van közös pontja.)



2677. A forgási középpont meghatározása az előző két feladat módszerével történik. Belátjuk, hogy a három szakaszfelező merőlegesnek valóban van közös pontja. Legyen O az AA' és CC' szakaszok felezőmerőlegeseinek közös pontja. (O létrejön, ugyanis a feltétel értelmében AC és $A'C'$ nem párhuzamosak.)



Az ACO és $A'C'O$ háromszögek megfelelő oldalai rendre megegyeznek, a két háromszög tehát egybevágó. Ebből adódóan $OAC\sphericalangle = OA'C'\sphericalangle$. A feltételből kapjuk, hogy $CAB\sphericalangle = C'A'B'\sphericalangle$, így OAB és $OA'B'$ háromszögek egybevágóak, ugyanis $AB = A'B'$, $OA = OA'$ és $OAB\sphericalangle = OAC\sphericalangle + CAB\sphericalangle = OA'C'\sphericalangle + C'A'B'\sphericalangle = OA'B'\sphericalangle$. Ez viszont azt jelenti, hogy $OB = OB'$, azaz a BB' szakasz felezőmerőlegese illeszkedik az O pontra.

2678. *a)* Az AB szakasz fölé írt Thalesz-körből az AB felezőmerőlegese metszi ki az előjel miatt egyértelműen meghatározott pontot.

b) AB felezőpontja a megfelelő pont.

c) A pozitív körüljárási irányú ABC szabályos háromszög C csúcsa a megfelelő pont.

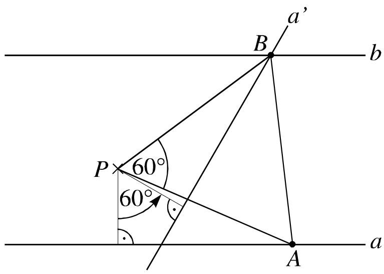
d) Lásd az előző pontot!

e) Azon pozitív körüljárási irányú ABC egyenlő szárú háromszög C csúcsa a megfelelő pont, amely háromszögben az alapon fekvő szög nagysága 75°.

f) Azon negatív körüljárási irányú ABC egyenlő szárú háromszög C csúcsa a megfelelő pont, amely háromszögben az alapon fekvő szög nagysága 67,5°.

A szögek szerkesztésére nézve lásd a 2144-2146. feladatokat!

2679. Az a egyenes P körüli +60°-os a' elforgatottjának és b-nek a közös pontja a háromszög második csúcsa (B). Ezt P körül –60°-kal „visszaforgatva” kapjuk az a egyenesen az A csúcsot. (Lásd az ábrát.)

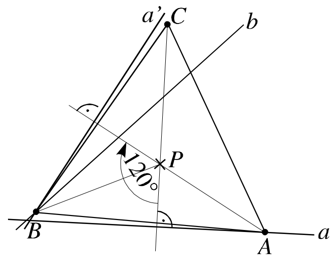


2680. Az előző feladat módszerével szerkeszthető olyan PAB egyenlő szárú derékszögű háromszög, amelynek A és B csúcsa az adott egyeneseken van. (A forgatás szögének nagysága most 90°.) P-t az AB egyenesre tükrözve kapjuk a négyzet negyedik csúcsát.

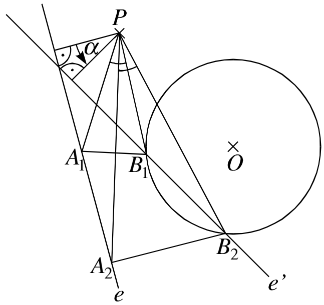
2681. Jelöljünk ki a középső egyenesen egy pontot. Innen lásd a 2679. feladatot!

2682. A szabályos háromszög a 2679. feladat módszerével szerkeszthető. Ha az adott szög kisebb 60°-nál, akkor két nem egybevágó megoldás van, ellenkező esetben a megoldás egyértelmű.

2683. A szabályos háromszög középpontjából a csúcsokhoz húzott szakaszok 120°-os szöget zárnak be, ezért az egyik szögszár adott pont körüli 120°-os elforgatottjának és a másik szögszárnak a közös pontja lesz a szerkesztendő háromszög egyik csúcsa. Ezt a csúcsot mindkét irányban 120°-kal elforgatva kapjuk a másik két csúcsot. (Lásd az ábrát!)

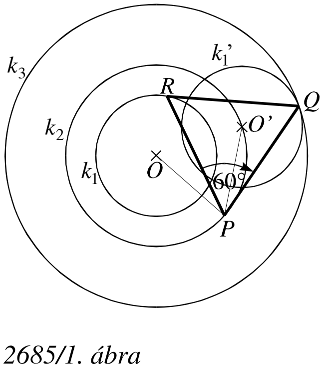


2684. Jelölje α a szerkesztendő háromszög szárainak szögét. Az e egyenes P körüli α szögű elforgatottjának és az adott körnek közös pontja lesz az alap egyik végpontja. Az alap másik végpontja az e egyenes azon pontja, amelynek képe a tekintett közös pont. (Lásd az ábrát!) A forgatás mindkét irányban elvégezhető, a megoldások száma attól függ, hogy a kapott két képegyenesnek és az adott körnek hány közös pontja van. (A szögek szerkesztésére nézve lásd a 2144-2145. feladatokat!)

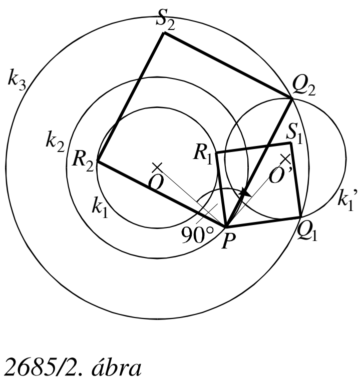


2685. *a)* A k_2 kör tetszőleges P pontja körül a k_1 kört 60°-kal elforgatva (mindegy milyen irányban) egy olyan k_1' kört kapunk, amely a Q pontban belülről érinti a k_3 kört. (Lásd a 2685/1. ábrát!) Ha R jelöli azt a k_1-re illeszkedő pontot, amelynek a tekintett forgással kapott képe Q, akkor a PQR háromszög megfelel a feladat feltételeinek. Ezt a háromszöget O körül tetszőlegesen elforgatva az eredetivel egybevágó megoldásokat kapunk.

b) A feladat megoldása az *a)* esethez hasonlóan történik, csak most k_2 tetszőleges P pontja körül 90°-kal kell k_1-et elforgatnunk. Két nem egybevágó megoldást kapunk. (Lásd a 2685/2. ábrát!)



2685/1. ábra



2685/2. ábra

2686. A szerkesztés az előző feladat kapcsán leírt módszerrel hajtható végre a körök tetszőleges elhelyezkedése esetén is. Az előző feladat jelöléseit használva a megoldások száma attól függ, hogy a k_2 kiszemelt pontja körüli (mindkét irányban végrehajtott) forgatások után k_1'-nek és k_3-nak hány közös pontja van.

2687. A két tengelyes tükrözés egymásutánja forgatás, amely szögének nagysága a tengelyek által bezárt szög kétszerese, iránya pedig a tengelyes tükrözések sorrendjétől függ. A *c)* esetben a két tengelyes tükrözés egymásutánja középpontos tükrözés.

2688. Mindkét tengely illeszkedik a forgatás centrumára, az általuk bezárt szög nagysága a forgásszög nagyságának fele. (A tengelyeket ezen feltételek teljesülése mellett tetszőlegesen vehetjük fel.) A tükrözések sorrendje a forgatás irányától függ.

2689. Az eredő forgatás középpontja mindegyik esetben az O pont, szöge pedig

a) $+15°$; *b)* $+60°$; *c)* $+60°$; *d)* $-30°$.

2690. *a)* $A'(-5; -2)$, $B'(3; 1)$, $C'(-2; 8)$ *b)* $A'(2; -5)$, $B'(-1; 3)$, $C'(-8; -2)$

c) $A'(5; 2)$, $B'(-3; -1)$, $C'(2; -8)$ *d)* $A'(5; 2)$, $B'(-3; -1)$, $C'(2; -8)$

2691. *a)* Origó körüli $+90°$-os forgatás.

b) Origó körüli $-90°$-os forgatás.

2692. Mindegyik esetben két lehetőségünk van. A megfelelő pontok koordinátái az előző két feladat alapján könnyen adódnak.

a) $(-4; 2)$ vagy $(4; -2)$ *b)* $(6; 5)$ vagy $(-6; -5)$ *c)* $(1; 0)$ vagy $(-1; 0)$

d) $(5; -4)$ vagy $(-5; 4)$

2693. A forgatás centruma mindegyik esetben a sokszög középpontja, a megfelelő pozitív forgásszögek pedig

a) 0°, 120°, 240°; *b)* 0°, 90°, 180°, 270°;

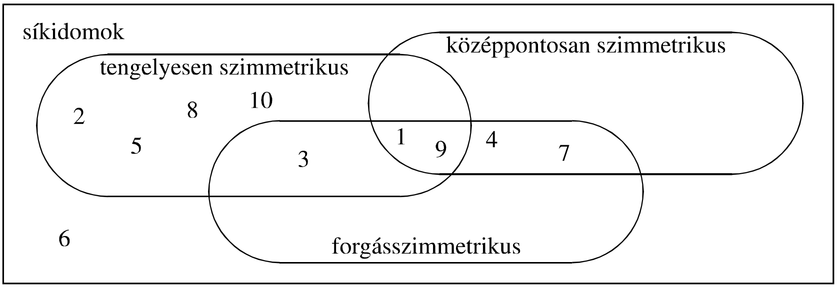
c) 0°, 72°, 144°, 216°, 288°; *d)* 0°, 60°, 120°, 180°, 240°, 300°;

e) $k \cdot \frac{360°}{n}$, ahol $k = 0; 1; 2; ...; n-1$.

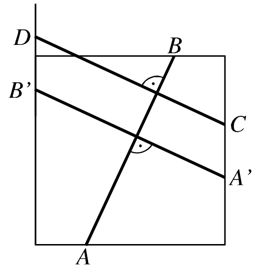
2694. *a)* igaz *b)* hamis *c)* hamis *d)* igaz *e)* hamis *f)* igaz

g) igaz *h)* hamis *i)* igaz *j)* hamis *k)* igaz *l)* hamis

2695.



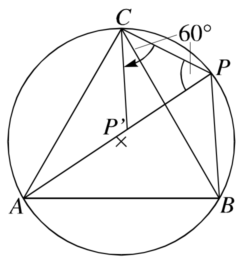
2696. Legyen két, a feltételeknek megfelelő szakasz AB és CD. Az AB szakasznak a négyzet középpontja körüli 90°-os elforgatottja, $A'B'$ merőleges AB-re, és így párhuzamos CD-vel. Viszont ekkor az $A'CDB'$ négyszög paralelogramma, így $AB = A'B' = CD$. (Nyilván akkor is igaz az állítás, ha $A'B'$ egybeesik CD-vel.)



2697. Legyenek a szemközti oldalegyeneseken adott pontok A és B, illetve C és D. C-ből állítsunk merőlegest AB-re, majd mérjük fel erre C-ből az AB távolságot. Az így kapott CD' szakasz merőleges AB-re és vele egyenlő hosszú, így az előző feladat állítása alapján a DD' egyenes a négyzet egyik oldalegyenese. Erre az egyenesre A-ból és B-ből merőlegest állítva kapjuk a négyzet másik két oldalegyenesét, a negyedik oldal pedig C-re illeszkedik és DD'-vel párhuzamos.
Ha D egybeesik D'-vel, akkor a feladatnak végtelen sok megoldása van.

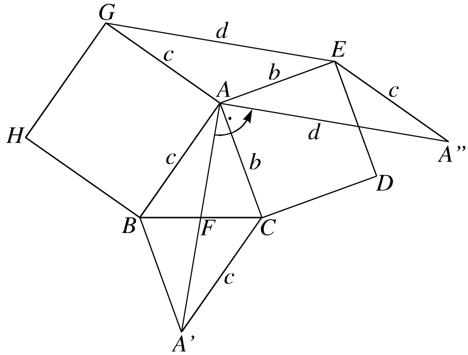
2698. Forgassuk el C körül a BPC háromszöget $-60°$-kal. (Lásd az ábrát!) Ennél a forgatásnál a B képe A, és mivel $APC\sphericalangle = APB\sphericalangle = 60°$, ezért P képe az AP szakasz azon P' pontja, amelyre $PP' = PC$. A BPC háromszög képe tehát az $AP'C$ háromszög és így

$$PA = PP' + P'A = PC + PB.$$

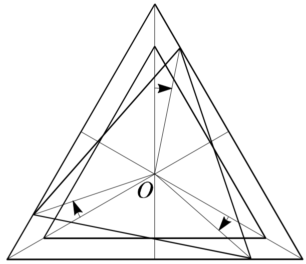


2699. Jelölje A' az A csúcsnak a BC oldal F felezőpontjára vonatkozó tükörképét. Forgassuk el az $AA'C$ háromszöget az A pont körül 90°-kal az ábrán látható módon. Mivel $AG = A'C = A''E$ és a forgatás miatt AG párhuzamos $A''E$-vel, ezért az $AA''EG$ négyszög paralelogramma. Így

$$d = EG = AA'' = AA' = 2 \cdot AF.$$



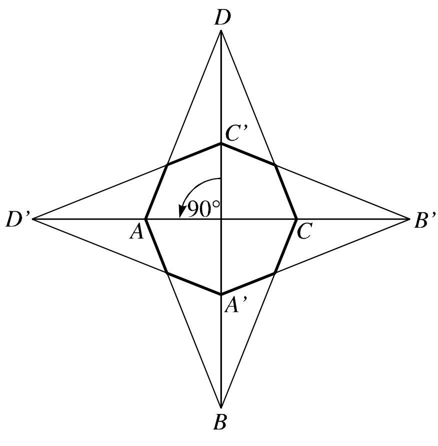
2700. Előbb belátjuk, hogy egy szabályos háromszögbe beírt szabályos háromszög középpontja egybeesik az eredeti háromszög középpontjával. Forgassuk el az eredeti háromszöget a középpontja körül 120°-kal. Ennél a forgatásnál az eredeti háromszög képe önmaga, a beírt háromszög pedig egy olyan szintén az eredeti háromszögbe írt szabályos háromszögbe transzformálódik, amelynek oldalai párhuzamosak az először beírt háromszög oldalaival. Ez viszont csak akkor teljesülhet, ha a beírt háromszög is önmagára transzformálódik a forgatás során, azaz ő is a középpontja körül fordult el.



A szerkesztés az előző állítás alapján könnyen adódik. Vegyük fel a 4 cm oldalú szabályos háromszöget és kicsinyítsük a középpontjából $\frac{3}{4}$-ére. A kapott kis háromszöget a középpont körül forgassuk el úgy, hogy csúcsai a nagy háromszög oldalaira essenek. (Lásd az ábrát!)

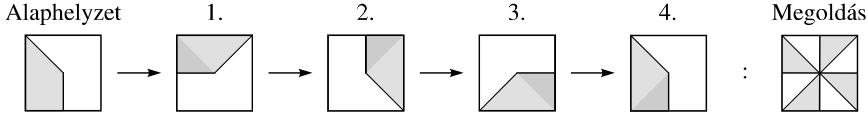
2701. A feladatbeli állítás felhasználásával könnyen adódik a szerkesztés. Forgassuk el az átlók metszéspontja körül a paralelogramma egyik oldalegyenesét 90°-kal. A képegyenesnek a szomszédos oldalegyenesekkel alkotott metszéspontjai a négyzet két szemközti csúcsát adják. Innen a feltételnek megfelelő négyzet már egyszerűen adódik.

2702. A rombuszra tett feltételből és a rombusz szimmetriájából adódóan a metszet szabályos nyolcszög.

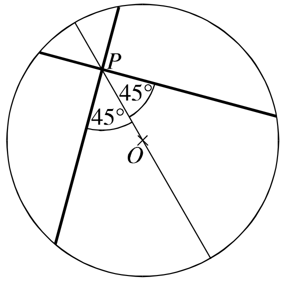


2703. Az adott csúcsnak a középpont körüli +120°-os illetve −120°-os elforgatottjai lesznek a háromszög hiányzó csúcsai.

2704. Az egyes forgatások utáni helyzet és a megoldás az ábrán látható.



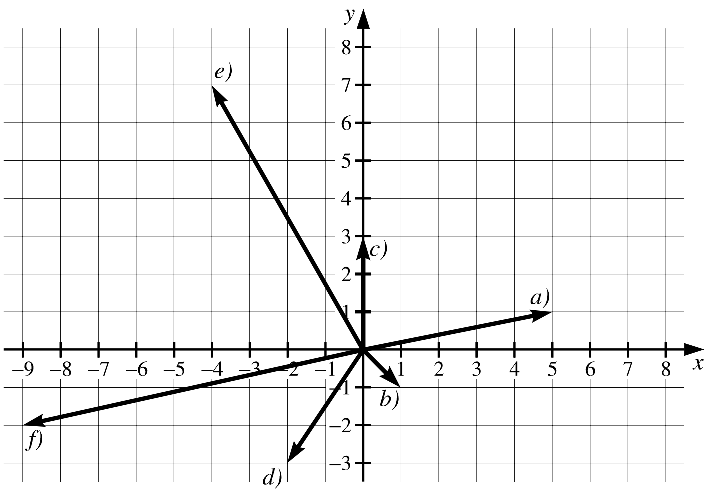
2705. A P-ben egymást metsző két húr csak akkor lehet egyenlő hosszú, ha a kör P-re illeszkedő átmérőjére nézve szimmetrikusan helyezkednek el. A tekintett átmérőre P-ben mindkét irányban az ábrának megfelelően 45°-os szöget felmérve adódik a két húr.



Párhuzamos eltolás

2706. Egyenlőek: 2. és 4.; 3. és 6.
Ellentettek: 1. és 3.; 1. és 6.; 2. és 5.; 4. és 5.

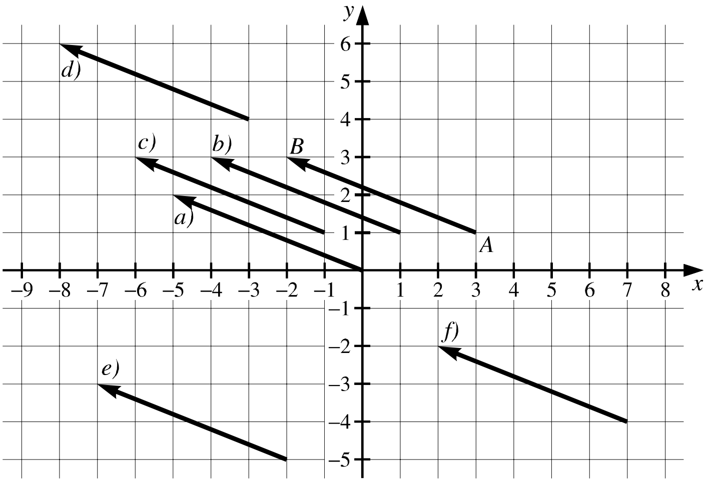
2707.



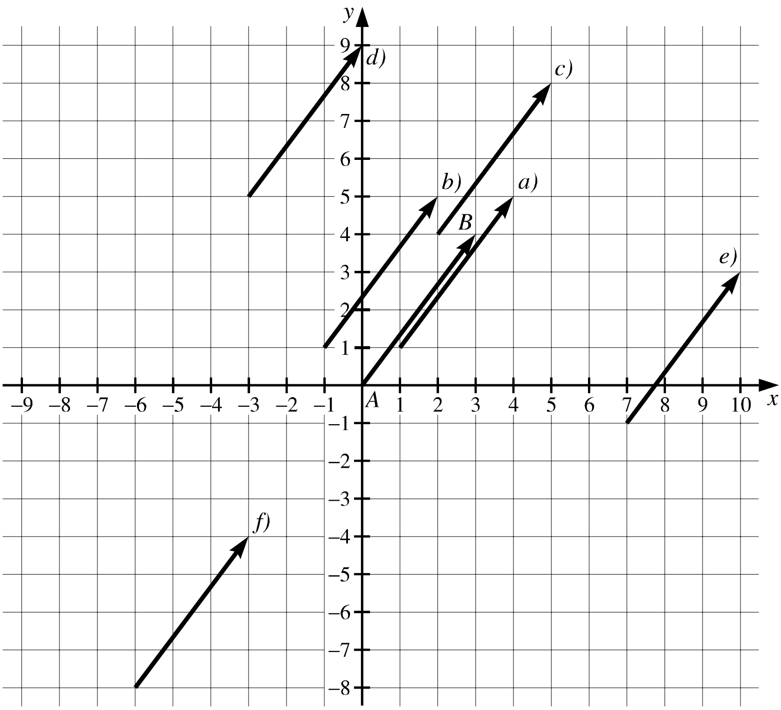
2708.

A végpontok koordinátái:

a) (–5; 2)
b) (–4; 3)
c) (–6; 3)
d) (–8; 6)
e) (–7; –3)
f) (2; –2)



2709.

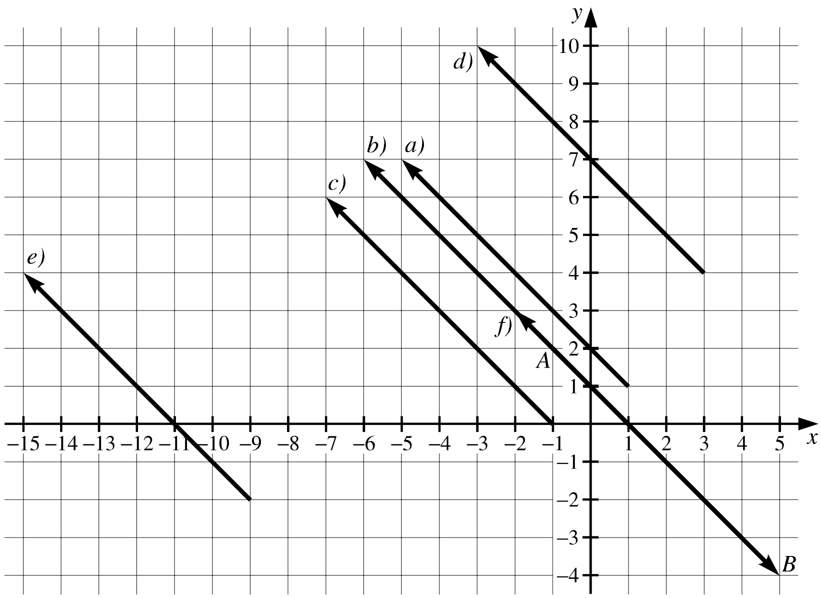


A végpontok koordinátái:

a) (4; 5)
b) (2; 5)
c) (5; 8)
d) (0; 9)
e) (10; 3)
f) (–3; –4)

Általánosan, ha egy origó kezdőpontú vektor végpontja $(x_0; y_0)$, akkor a vele egyenlő, $(a; b)$ kezdőpontú vektor végpontja $(x_0 + a; y_0 + b)$.

2710.

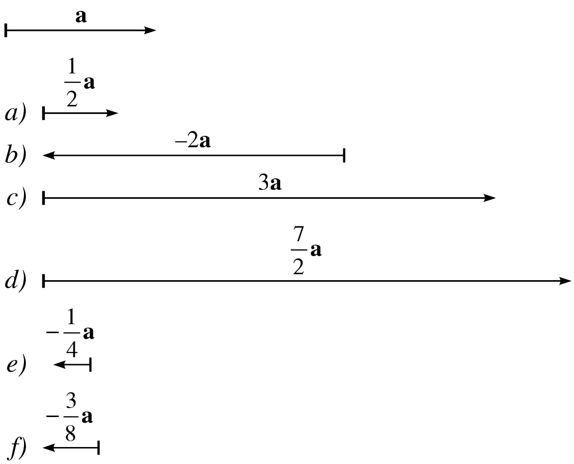


A végpontok koordinátái:

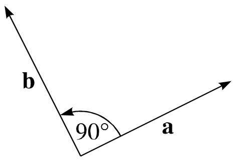
a) (–5; 7) *b)* (–6; 7) *c)* (–7; 6) *d)* (3; 10) *e)* (–15; 4) *f)* (–2; 3)

Az $\overrightarrow{AB}$ -ral egyenlő, origó kezdőpontú vektor végpontja az előző feladat alapján (6; –6). Az $\overrightarrow{AB}$ ellentettjével egyenlő, origó kezdőpontú vektor végpontja így (–6; 6). Innen az előző feladat alapján adódnak a fenti értékek.

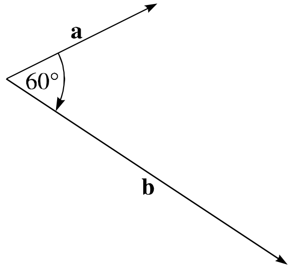
2711.



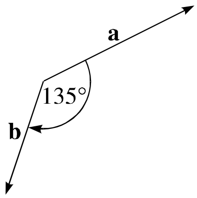
2712. *a)*



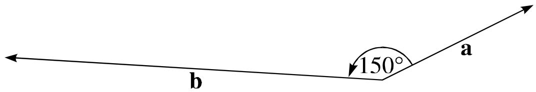
b)



c)



d)



2713. Alapszerkesztések.

2714. Alapszerkesztések.

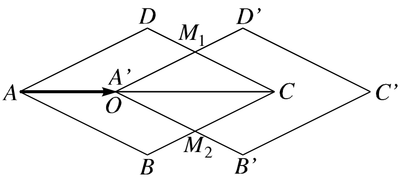
2715. Alapszerkesztések.

2716. *a)* A közös rész egy az eredetihez hasonló rombusz, amelynek oldala fele olyan hosszú, mint az eredeti rombuszé. (Pl. AM_1 középvonal az ACD háromszögben. Lásd még a 2649. feladatot!)

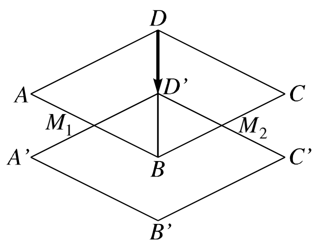
Az egyesítés egy konkáv nyolcszög ($ABM_2B'C'D'M_1D$), amelynek oldalai 4 cm és 2 cm hosszúak.

Jelölje rendre k és t a közös rész, K és T az egyesítés kerületét és területét. Mivel a tekintett rombuszt rövidebb átlója két egybevágó szabályos háromszögre vágja szét, ezért a területek a 2446. feladat alapján számolhatók. $t = 2 \cdot \frac{2^2\sqrt{3}}{4}\ \text{cm}^2 = 2\sqrt{3}\ \text{cm}^2 \approx 3{,}46\ \text{cm}^2$; $T = 2 \cdot \frac{4^2\sqrt{3}}{4}\ \text{cm}^2 - 2\sqrt{3}\ \text{cm}^2 = 6\sqrt{3}\ \text{cm}^2 \approx 10{,}39\ \text{cm}^2$; $k = 8$ cm; $K = 24$ cm.

b) A közös rész egybevágó az *a)* pontban kapottal. Az egyesítés most is egy konkáv nyolcszög, amelynek kerülete és területe megegyezik az *a)* pontbeli egyesítés kerületével és területével.

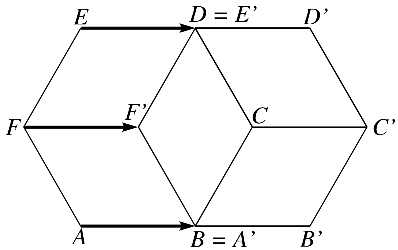


2716/1. ábra



2716/2. ábra

2717. A közös rész egy olyan rombusz, amelynek szögei 60° és 120°-osak, oldala pedig 4 cm hosszú. Az egyesítés egy hatszög (*AB'C'D'EF*).



Az előző feladat alapján

$$t = 2 \cdot \frac{4^2\sqrt{3}}{4}\ \text{cm}^2 = 8\sqrt{3}\ \text{cm}^2 \approx$$

$$\approx 13{,}85\ \text{cm}^2.$$

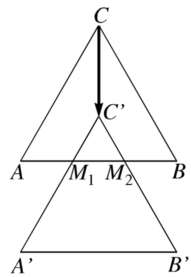
A kerületek:

$k = 16$ cm, $K = 32$ cm.

Az ábráról leolvasható, hogy az egyesített terület ötszöröse a közös rész területének, így

$$T = 40\sqrt{3}\ \text{cm}^2 \approx 69{,}25\ \text{cm}^2.$$

2718. Mivel a szabályos háromszög magasságpontja harmadolja a magasságot, ezért a képháromszög egyik csúcsa a magasságpont lesz.



A közös rész szabályos háromszög, amelynek oldala harmad olyan hosszú, mint az eredeti háromszögé, az egyesítés pedig az ábrán látható konkáv hétszög. A 2446. feladat alapján a területek

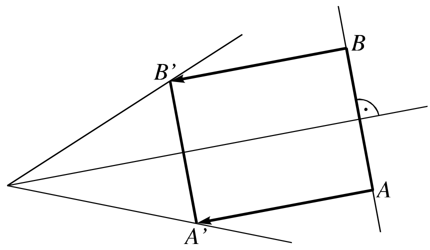
$$t = \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{4}\ \text{cm}^2 = \frac{4 \cdot \sqrt{3}}{3}\ \text{cm}^2 \approx 2{,}31\ \text{cm}^2,$$

$$T = 2 \cdot \frac{4^2 \cdot \sqrt{3}}{4}\ \text{cm}^2 - t = 8\sqrt{3}\ \text{cm}^2 - \frac{4}{3}\sqrt{3}\ \text{cm}^2 = \frac{20}{3}\sqrt{3}\ \text{cm}^2 \approx 11{,}54\ \text{cm}^2.$$

A harmadolásból adódóan $AM_1 = M_1M_2 = M_2B = \frac{4}{3}$ cm és $A'M_1 = M_2B' = \frac{8}{3}$ cm. (Lásd az ábrát!) Így

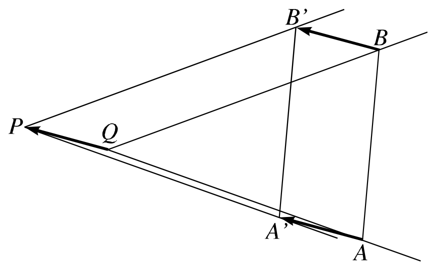
$k = 4$ cm, $K = 5 \cdot 4$ cm $= 20$ cm.

2719. Az adott szög szögfelezőjére, annak tetszőleges pontjában állítsunk merőlegest, majd erre a metszéspontból mindkét irányba mérjük fel az adott szakasz hosszának felét. A kapott végpontokra illeszkedő, a szögfelezővel párhuzamos egyenesek metszik ki a szögszárakból a szerkesztendő szakasz végpontjait. Ez utóbbi úgy is fogalmazható, hogy a megfelelően felvett AB szakaszt az $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$-ral eltolva kapjuk a kívánt szakaszt. (Lásd az ábrát!)

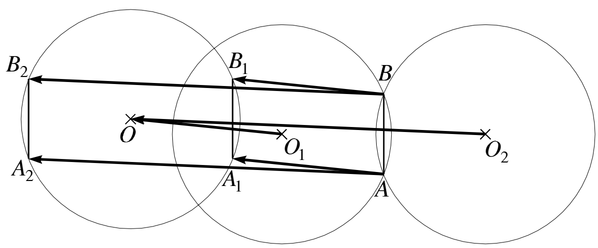


2720. Szerkesszünk a háromszög kiszemelt pontján át párhuzamost az eltolás irányát megadó egyenessel. Ha a háromszög kiszemelt pontja P, és a párhuzamos egyenesnek a másik adott egyenessel vett metszéspontja Q, akkor az eltolás vektora $\overrightarrow{PQ}$. (Ha Q nem jön létre, akkor a feladatnak nincs megoldása.)

2721. Szerkesszünk az adott szakasz végpontjain keresztül párhuzamost a szögszárakkal. Ha a párhuzamosok metszéspontja Q, akkor AB-t a $\overrightarrow{QP}$-ral eltolva kapjuk a megfelelő $A'B'$ szakaszt. ($\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$)

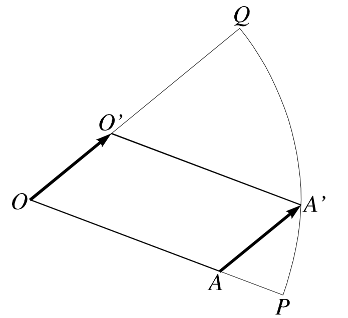


2722. Szerkesszünk az adott szakaszhoz olyan, az adott körrel egybevágó köröket, amelyeknek az adott szakasz húrja. (Az adott szakasz felezőmerőlegesének a végpontoktól 4 cm-re levő pontjai lesznek a tekintett körök középpontjai.) Ha a kapott körök középpontjai O_1 és O_2, akkor az AB szakasznak az $\overrightarrow{O_1O}$-ral, illetve az $\overrightarrow{O_2O}$-ral eltolt képe lesz a két megfelelő húr. (Lásd az ábrát!)

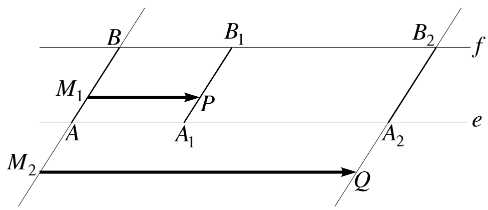


2723. Az előző feladat szerkesztési módszerének felhasználásával toljuk el az adott szakaszt úgy, hogy az adott körnek húrja legyen. Az eredeti és az eltolással kapott szakasz végpontjai által meghatározott paralelogramma átlóinak metszéspontja a megfelelő pont. Két megoldást kapunk.

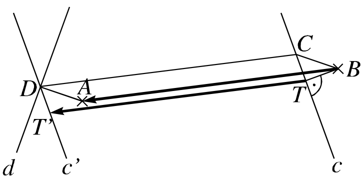
2724. A körcikk OP határoló sugarára O-ból mérjünk fel 3 cm-t. (Lásd az ábrát!) Az így kapott A ponton keresztül húzzunk párhuzamost az OQ sugárral. Ennek a körívvel vett A' metszéspontja lesz a megfelelő szakasz egyik végpontja. O-t az $\overrightarrow{AA'}$-ral eltolva kapjuk az OQ sugáron a szakasz másik végpontját (O').



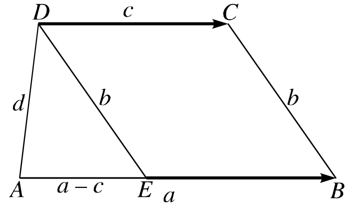
2725. Vegyünk fel a párhuzamosok között egy 4 cm hosszú szakaszt, majd ennek egyenesét toljuk el úgy, hogy illeszkedjen az adott pontra. (Lásd az ábrát!) A feladatnak mindkét esetben két megoldása van.



2726. Toljuk el a c egyenest a $\overrightarrow{BA}$-ral. (Ez történhet például úgy, hogy B-ből c-re merőlegest állítunk, az így kapott T talppontot eltoljuk a $\overrightarrow{BA}$-ral, majd a T' képponton keresztül párhuzamost szerkesztünk c-vel.) c' és d közös pontja lesz a D csúcs, ennek $\overrightarrow{AB}$-ral való eltoltja a C csúcs. (Lásd az ábrát!) Nem kapunk megoldást, ha c'-nek és d-nek nincs közös pontja, illetve ha a D közös pont illeszkedik az AB egyenesre. Ha c' és d egybeesik, akkor végtelen sok megoldás van. Az előző speciális esetek kivételével a megoldás egyértelmű.



2727. Az ábrán látható AED háromszög oldalai adottak, tehát szerkeszthető. A DE oldalt az AE-vel párhuzamos, c hosszúságú $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{EB}$ vektorral eltolva adódik a B és a C csúcs. Egyértelmű megoldást kapunk, ha az AED háromszög szerkeszthető. (Lásd még a 2360/*d)* és a 2364/*a)* feladatot!)



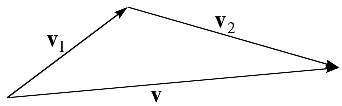
2728. Két párhuzamos egyenesre történő tükrözés egymásutánja párhuzamos eltolás, amelynek vektora merőleges az egyenesekre és hossza az egyenesek távolságának kétszerese. Az eltolás irányát a tükrözések sorrendje határozza meg.

2729. A feladatbeli eltolás előáll bármely két olyan tengelyre vonatkozó tükrözés egymásutánjaként, amely tengelyek merőlegesek a tekintett szögfelezőre és távolságuk a szögfelező hosszának fele. Az eltolás irányát a tengelyes tükrözések sorrendje határozza meg.

2730. A két középpontos tükrözés egymásutánja párhuzamos eltolás, amelynek vektora $2 \cdot \overrightarrow{AB}$ vagy $2 \cdot \overrightarrow{BA}$ attól függően, hogy melyik pontra tükrözünk először.

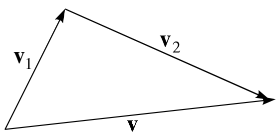
2731. Például az A és a B pont megfelel, de megfelel bármely két olyan pont, amelyek által meghatározott egyenes párhuzamos az eltolás vektorával és távolságuk fele akkora, mint az eltolás vektorának hossza. A tükrözések sorrendjét az eltolás iránya egyértelműen meghatározza.

2732. Két párhuzamos eltolás egymásutánja párhuzamos eltolás, amelynek vektora a két eltolás vektorának összege (lásd az ábrát!). Az eltolások sorrendjének felcserélésével is ugyanazt az eredő eltolást kapjuk.

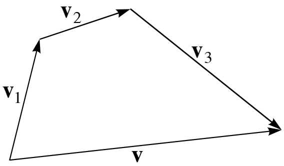


2733. Végtelen sok megfelelő felbontás létezik, és ezen felbontások az eltolások sorrendjétől függetlenül ugyanazt az adott eredő eltolást határozzák meg. Az adott eltolás vektorának egy-egy megfelelő felbontása az ábrákon látható.

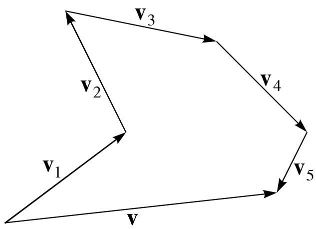
a)



b)



c)



2734. Ha $\mathbf{v}$ a tekintett eltolás vektora, akkor $\mathbf{v} = \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'}$. Ha $\mathbf{v}$ kezdőpontja az origó, akkor a 2709. feladat alapján $\mathbf{v}$ végpontja $(a_1' - 0; a_2' - 2) = (b_1' + 4; b_2' + 3) = (c_1' - 9; c_2' - 2)$, ahol $A'(a_1'; a_2')$, $B'(b_1'; b_2')$, $C'(c_1'; c_2')$.

a) (5; 0) *b)* (0; –2) *c)* (2; 2) *d)* (9; 4) *e)* (–2; –2) *f)* (2; –5)

2735. Ha $A(a_1; a_2)$, $B(b_1; b_2)$, $C(c_1; c_2)$, akkor $A'(a_1 - 3; a_2 + 2)$, $B'(b_1 - 3; b_2 + 2)$, $C'(c_1 - 3; c_2 + 2)$.

a) $A'(-3; 2)$, $B'(-1; 6)$, $C'(-8; 1)$ *b)* $A'(1; 3)$, $B'(-3; 7)$, $C'(-5; 2)$

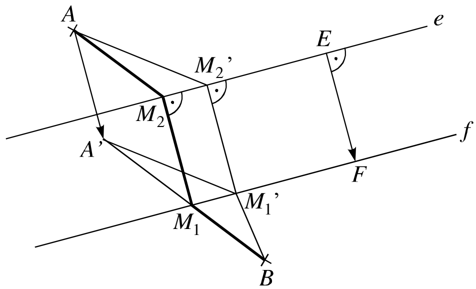
c) $A'(0; -2)$, $B'(-2; 5)$, $C'(-8; 3)$ *d)* $A'(-7; 1)$, $B'(-1; -2)$, $C'(0; 9)$

2736. Egymás párhuzamos eltoltjai: 1. és 3.; 2. és 7.; 4. és 6.

2737. *a)* igaz *b)* hamis *c)* igaz *d)* igaz *e)* hamis *f)* hamis
g) igaz *h)* igaz *i)* igaz

2738. Az egyik kört az $\overrightarrow{O_1O_2}$ -ral eltolva a másik kört kapjuk. Ha a tekintett szakaszok párhuzamosak O_1O_2-vel, akkor az eltolás egymásnak megfelelő pontjait kötik össze, így szükségképpen ugyanolyan hosszúak, mint az O_1O_2 szakasz.

2739. Az úttesten merőlegesen kell áthaladnunk, így arra kell törekednünk, hogy az úttesten kívüli út minimális legyen. Ennek a minimális útnak a szerkesztése végett toljuk el az A pontot az ábrán látható $\overrightarrow{EF}$ -ral ($\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AA'}$). Az $A'B$ szakasz kimetszi f-ből azt az M_1 pontot, ahol az úttestet el kell hagyni, és így a minimális út az AM_2M_1B töröttvonal.



(Az úttesten kívüli út hossza $AM_2 + M_1B = A'B$.) A megszerkesztett út minimalitása könnyen adódik a háromszög-egyenlőtlenségből, ugyanis ha M_1' és M_2' tetszőleges M_1-től és M_2-től különböző átkelési pontok, akkor

$$AM_2' + M_1'B = A'M_1' + M_1'B > A'B = A'M_1 + M_1B = AM_2 + M_1B.$$

2740. Lásd a 2645/*e)* feladatot!

Alakzatok egybevágósága. Vegyes feladatok

2741. Síkmozgások: *b) c) d) f) h) i) l)*
Irányításfordító transzformációk: *a) e) g) j) k)*

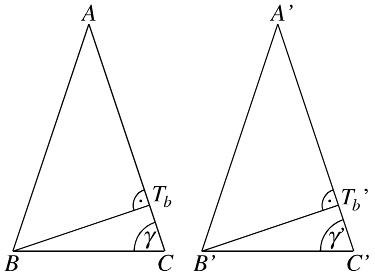
2742. Térmozgások: *b) c) d) e) g)*

2743. Mind a négy eset következik abból a tételből, hogy két háromszög egybevágó, ha megfelelő oldalaik hossza egyenlő. Ha a az oldal hossza, m a magasság hossza, r pedig a beírható kör sugarának a hossza, akkor Pitagorasz tétele alapján

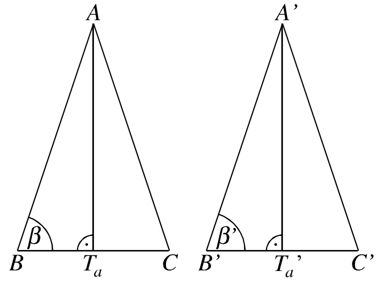
$$m = \frac{a\sqrt{3}}{2}; \qquad r = \frac{m}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{6},$$

és a szabályos háromszög súlyvonala egybeesik a magassággal. (Lásd még a 2347. és 2528. feladatokat!)

2744. *a)* A feltételből következik, hogy a két háromszög alapon fekvő szögei is megegyeznek.
b) A 2744/1. ábrán látható BCT_b és $B'C'T_b'$ háromszögek egybevágóak, ugyanis megegyeznek két oldalban és a nagyobbikkal szemközti szögben. Viszont ekkor $\gamma = \gamma'$, így az előző pont alapján teljesül az állítás.



2744/1. ábra



2744/2. ábra

c) Az alaphoz tartozó magasság felezi az alapot, így a 2744/2. ábrán látható ABT_a és $A'B'T_a'$ háromszögek egybevágók, ugyanis megegyeznek két oldalban és a közbezárt szögben. Viszont így $AB = A'B'$, tehát a két egyenlő szárú háromszög oldalai rendre megegyeznek, amiből adódik az állítás.

d) Egybevágósági alapeset.

e) A 2744/2. ábrán látható ABT_a és $A'B'T_a'$ háromszögek most is egybevágóak, ugyanis megfelelő szögeik megegyeznek és $AT_a = A'T_a'$. Innen lásd a *c)* pontot!

2745. *a)* Egybevágósági alapeset.

b) A két derékszögű háromszög megfelelő szögei megegyeznek és egy-egy befogójuk is egyenlő.

c) Egybevágósági alapeset. (A két háromszög megegyezik két oldalban és a nagyobbikkal szemközti derékszögben.)

d) Átfogójából és átfogóhoz tartozó magasságából a derékszögű háromszög egybevágóság erejéig egyértelműen szerkeszthető (lásd a 2348/*c)* feladatot), ugyanis a létrejövő négy háromszög közül bármelyik átvihető bármelyik másikba vagy tengelyes, vagy középpontos tükrözéssel.

2746. *a)* Két-két oldal és a közbezárt szögek megegyeznek.

b) Az átfogóhoz tartozó magasság hossza az átfogó fele, így lásd az előző feladat *d)* pontját!

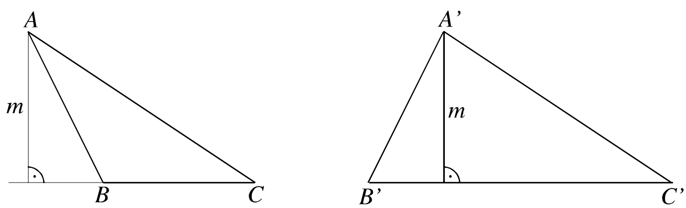
c) Lásd az előző pontot!

d) A köré írható kör sugara ugyanolyan hosszú, mint az átfogóhoz tartozó magasság, így lásd az előző két pontot!

2747. *a)* Igaz, ugyanis a feltételből adódik, hogy a két háromszög megegyezik egy oldalban és a rajta fekvő két szögben, ez pedig egybevágósági alapeset.

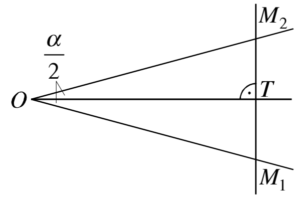
b) Nem igaz. A két háromszög hasonló, de nem feltétlenül egybevágó.

c) Nem igaz. Lásd az ábrát, ahol $AB = A'B'$ és $AC = A'C'$!

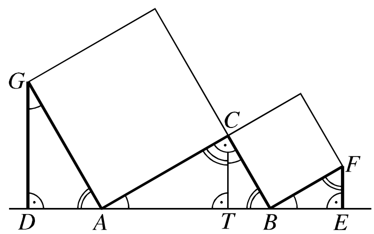


2748. A két háromszög hasonló, hiszen a feltétel alapján szögeik rendre megegyeznek. Viszont, ha az adott hosszúságú oldal az egyik háromszögben alap, a másikban szár, és a háromszögek nem szabályosak, akkor nem egybevágók.

2749. Az OM_1T és OM_2T háromszögek egybevágóak, ugyanis megegyeznek egy oldalban (OT) és a rajta fekvő két szögben $\left(90°, \dfrac{\alpha}{2}\right)$.



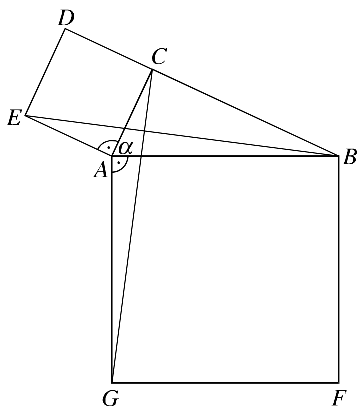
2750. Bocsássunk merőlegest C-ből az AB szakaszra az ábrának megfelelően, a merőleges talppontja legyen T. Az ábrán azonosan jelölt szögek egyenlőek, valamint $GA = AC$ és $CB = BF$, így az AGD és a CAT, valamint a BCT és az FBE háromszögek páronként egybevágóak. Ebből adódik, hogy $AD = CT = BE$.



2751. A *b)* állításból nyilvánvalóan következik *a)*, így a második állítást látjuk be először. $AB = AG$, $AC = AE$ és $EAB\sphericalangle = CAG\sphericalangle = 90° + \alpha$. (Lásd az ábrát!) Mivel az ABE és AGC háromszögek megegyeznek két oldalban és a közbezárt szögben, ezért egybevágóak.

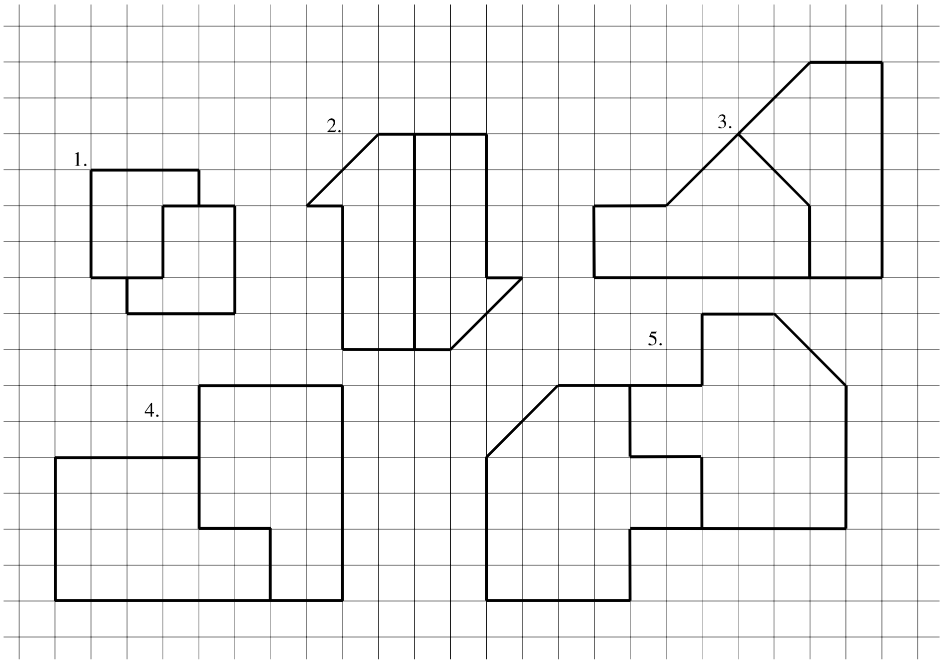
c) $T_{ABE} = \dfrac{AE \cdot AC}{2}$. Mivel az ABE háromszög egybevágó az AGC háromszöggel, ezért

$$T_{ABE} + T_{AGC} = AE \cdot AC = T_{ACDE}.$$

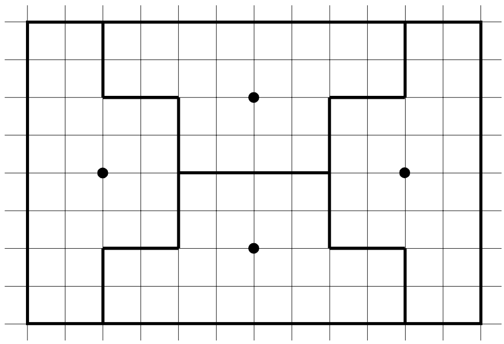


2752. Az egyenesnek illeszkednie kell a háromszög egyik csúcsára. Erre az egyenesre nézve a feltétel értelmében a háromszög tengelyesen szimmetrikus, tehát egyenlő szárú.

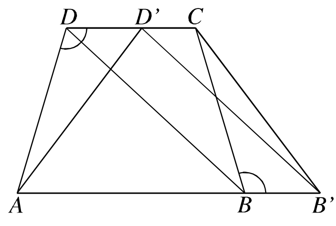
2753. Az alakzatok egy lehetséges felbontása az ábrán látható.



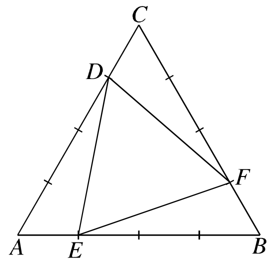
2754. A felbontás az ábrán látható.



2755. Mivel *ABCD* húrtrapéz, ezért $AD = BC$ és $ADD' \sphericalangle = CBB' \sphericalangle$. Az eltolásból adódóan $DD' = BB'$.
Az eddigiek alapján az *ADD'* és *CBB'* háromszögek megyegyeznek két oldalban és a közbezárt szögben, tehát egybevágóak. Ekkor viszont harmadik oldalaik is egyenlő hosszúak, azaz $AD' = B'C$.



2756. Az AED, BFE és CDF háromszögek egybevágóak, ugyanis megegyeznek két oldalban és a közbezárt szögben. Ebből adódóan $DE = EF = FD$, azaz a DFE háromszög valóban szabályos.



II. Hasonlósági transzformációk

Középpontos hasonlóság

2757. Alapszerkesztések.
Az *a)* pontbeli transzformáció helyben hagyja a háromszöget, a *b)* pontbeli pedig középpontos tükrözés.
Nagyítások: *c) f) g) h)*
Kicsinyítések: *d) e)*

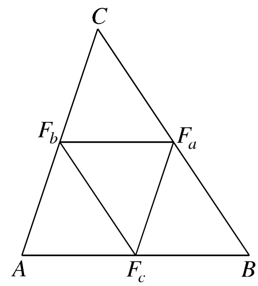
2758. Alapszerkesztések.
Nagyítások: *a) b) e) f)*
Kicsinyítés: *d)*
A *c)* pontbeli transzformáció középpontos tükrözés.

2759. A kerületek kétszeresére, a területek négyszeresére nőnek.

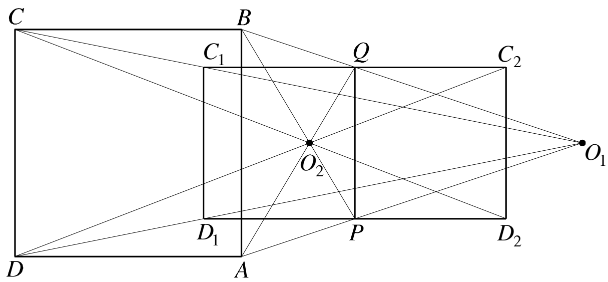
2760. Lásd a 2142. feladatot!

2761. Alapszerkesztések. Az eredeti hatszög oldala 3 cm hosszú.

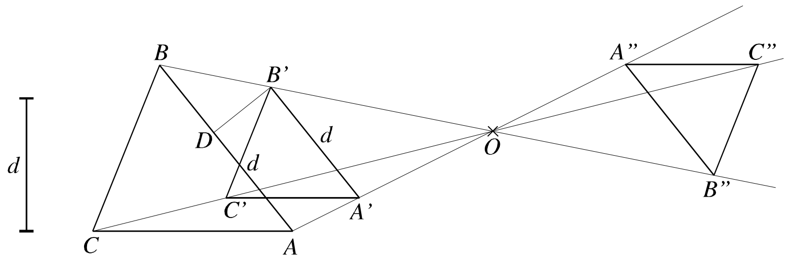
2762. Abból a tényből, hogy mindegyik csúcsból felére kicsinyítettünk adódik, hogy a képek levágásával kapott háromszög oldalai az eredeti háromszög középvonalai. Ezek a 2649. feladat alapján négy egybevágó háromszögre osztják az eredeti háromszöget, és ezen négy háromszög mindegyike az erdeti háromszög felére kicsinyített képe.



2763. Először tegyük fel, hogy a PQ szakasz az AB oldal képe, és $PQ \neq AB$. (Lásd az ábrát!) Ekkor két megfelelő középpontos hasonlóság van, az egyik középpontja az AP és a BQ, a másik középpontja az AQ és a BP egyenesek metszéspontja (O_1, O_2). Teljesen hasonló a helyzet, ha $PQ \neq AB$ és a PQ szakasz a CD oldal képe.
Ha $PQ = AB$, akkor két középpontos tükrözés felel meg a feladat feltételeinek, az egyiknél PQ az AB képe, a másiknál PQ a CD képe.

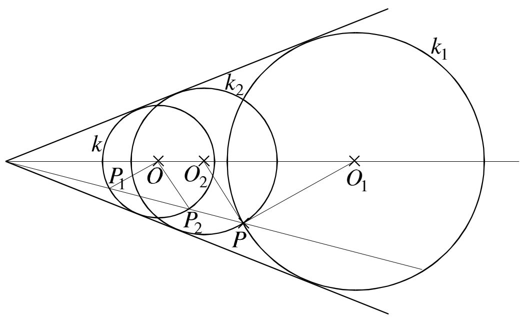


2764. A megoldást az AB oldal esetére adjuk meg.



Kössük össze az O középpontot az A és B csúcsokkal. Az adott szakaszt AB-vel párhuzamosan úgy kell elhelyezni az AOB szögtartományban, hogy végpontjai a szögszárakra essenek. Ehhez A-ból mérjük fel d-t az AB félegyenesre, a másik végpont legyen D. (Lásd az ábrát!) Az AO-val párhuzamos, D-re illeszkedő egyenes kimetszi BO-ból a B' pontot, az A' pont pedig a B-re illeszkedő, AB-vel párhuzamos egyenes és AO metszéspontjaként adódik. Ezután C' az ábráról leolvasható módon szerkeszthető. Az $A'B'C'$ háromszög O-ra vonatkozó $A''B''C''$ tükörképe is megoldása a feladatnak, tehát két megoldást kapunk.

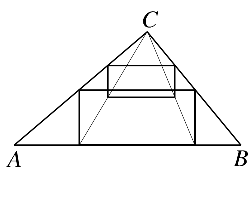
2765. A feladat tulajdonképpen azt kéri, hogy egy, az adott szög szárait érintő kört a szög csúcsából nagyítsunk vagy kicsinyítsünk úgy, hogy a kép illeszkedjék az adott pontra. A szerkesztés az ábráról leolvasható. A feltételeknek két kör felel meg (k_1, k_2).



$$OP_1 \| O_1P \quad \text{és} \quad OP_2 \| O_2P$$

2766. A feladatot csak az *a)* esetre oldjuk meg, a többire hasonlóan történik a szerkesztés.

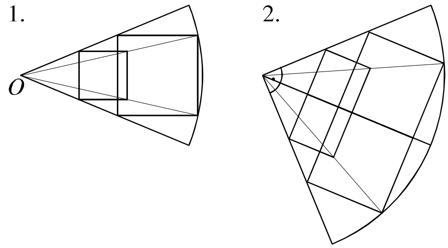
Vegyük fel a BCA szögtartományba egy, a szerkesztendőhöz hasonló téglalapot az ábrának megfelelően úgy, hogy



hosszabbik oldalának végpontjai a háromszög két rövidebb oldalára illeszkedjenek, és ez az oldal párhuzamos legyen a háromszög harmadik oldalával. Nagyítsuk ezt a téglalapot C-ből úgy, hogy a kép megfelelő oldala a háromszög AB oldalára illeszkedjen.

2767. Lásd az előző feladatot! Három különböző négyzet tesz eleget a feladat feltételének.

2768. A szerkesztés a 2766. feladat módszerével végezhető el. Két különböző elrendezés lehetséges, ezek az ábrán láthatók. A 2. elrendezés szerkesztéséhez előbb egy 90°-os körcikkbe helyeztünk be az ábrán látható módon egy olyan téglalapot, amelyben a szomszédos oldalak aránya 1 : 2, majd a kapott ábrát „megfeleztük”.

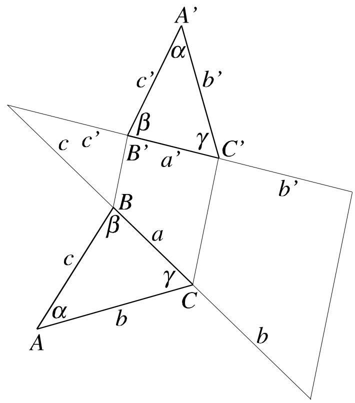


2769. *a) – c)* A szerkesztendő háromszögnek adottak a szögei, így tudunk szerkeszteni egy, az eredetihez hasonló $A'B'C'$ háromszöget. Ezek után az adott kerületet az $A'B'C'$ háromszög oldalainak arányában felosztva megkapjuk a szerkesztendő háromszög oldalait. A szerkesztés a 2769/1. ábráról leolvasható. (Lásd még a 2141-2143. és 2344/*c)* feladatokat!)

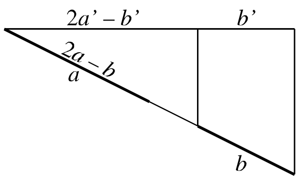
d) A szerkesztés az előző pontok módszerével történhet, most a szerkesztendő háromszög a és b oldalát tudjuk megszerkeszteni. (Lásd még a 2357/*f)* feladatot!)

e) A módszer hasonló az előző pontokban alkalmazott módszerhez. Az a és a b oldal szerkesztése a 2769/2. ábrán látható.

f) Lásd az *e)* pontot! $a = \dfrac{(2a+b)-b}{2}$.



2769/1. ábra



$$a = \frac{(2a-b)+b}{2}$$

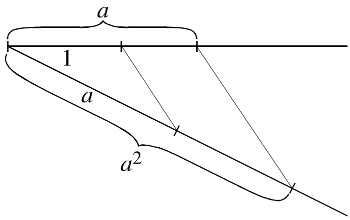
2769/2. ábra

2770. *a)* Lásd pl. a 2769/*a)* feladatot! *b)* Lásd a 2769/*d)* feladatot!
c) Lásd a 2769/*d)* feladatot! *d)* Lásd a 2769/*e)* feladatot!

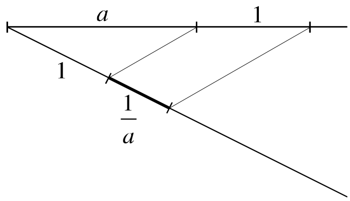
2771. Lásd a 2769/*a) – c)* feladatokat!

2772. Egy-egy lehetséges szerkesztési módszer az ábrákon látható.

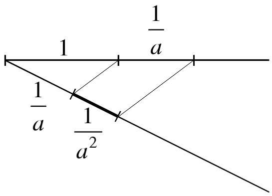
a)



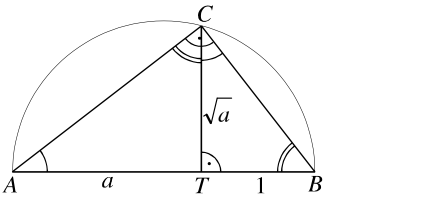
b)



c)



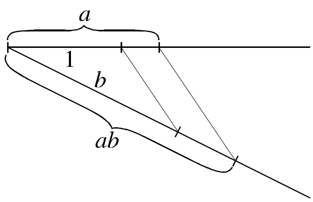
d)



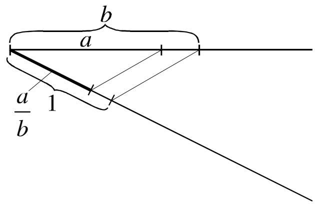
Az azonosan jelölt szögek egyenlőségéből adódóan $ATC_\triangle \sim CTB_\triangle$, ezért $\frac{AT}{CT} = \frac{CT}{TB}$, azaz $CT^2 =$ $= AT \cdot TB = a \cdot 1 = a$. Így $CT = \sqrt{a}$. (Lásd még a 2778. feladatot!)

2773. Egy-egy lehetséges szerkesztési módszer az ábrákról leolvasható.

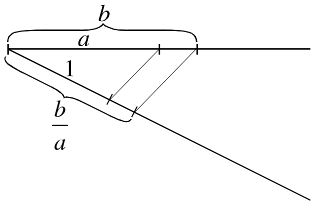
a)



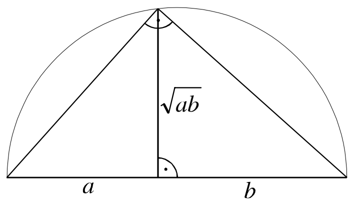
b)



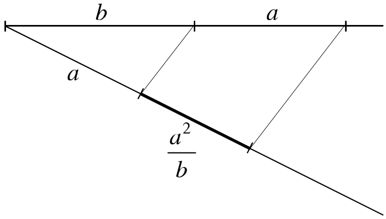
c)



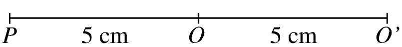
d)



e)

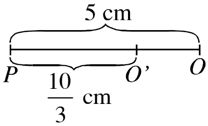


2774. *a)* $r' = 6$ cm, a középpont szerkesztésére nézve pedig lásd az ábrát!



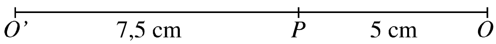
$PO' = 2 \cdot PO = 10$ cm

b) $r' = 2$ cm.



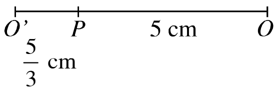
$$PO' = \frac{2}{3} \cdot PO = \frac{10}{3} \text{ cm}$$

c) $r' = |-1{,}5| \cdot r = 4{,}5$ cm.



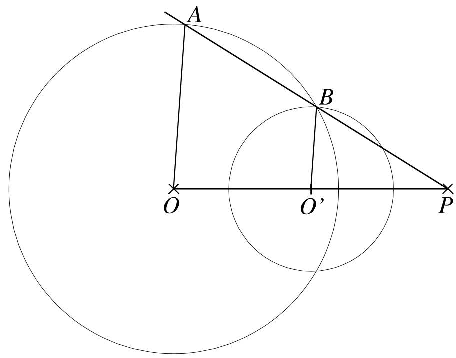
$$PO' = |-1{,}5| \cdot PO = 7{,}5 \text{ cm}$$

d) $r' = \left|-\frac{1}{3}\right| \cdot r = 1$ cm



$$PO' = \left|-\frac{1}{3}\right| \cdot PO = \frac{5}{3} \text{ cm}$$

2775. *a)* Kicsinyítsük a kört a P pontból felére az ábrának megfelelő módon. A szelő B pontja az eredeti és a képkör közös pontja. Ha A a PB szelőnek az eredeti körrel alkotott másik közös pontja, akkor $AB : PB = OO' : O'P = 1 : 1$, ugyanis a tekintett középpontos hasonlóságnál az A pont képe B.



b) A szerkesztés az előző pont módszerével hajtható végre, a középpontos hasonlósági transzformáció aránya $\frac{1}{3}$.

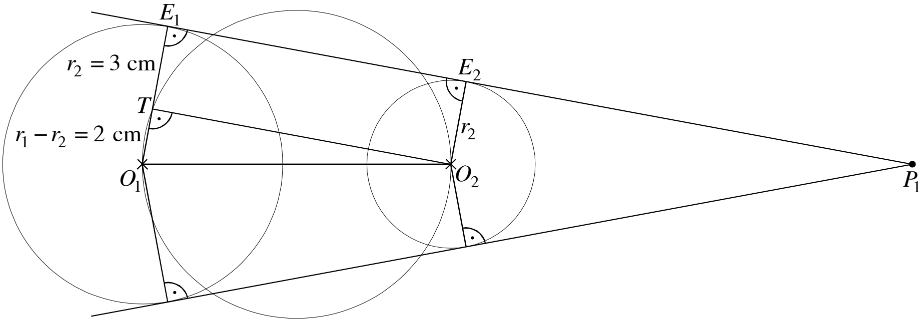
c) Lásd az *a)* pontot, az arány $\frac{2}{5}$.

d) Lásd az *a)* pontot, az arány $\frac{4}{9}$.

Megjegyzés: Mindegyik esetben két szelő felel meg a feltételnek, ezek az OP egyenesre szimmetrikusan helyezkednek el.

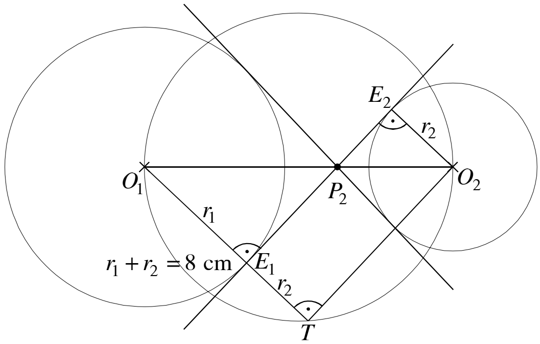
2776. Két hasonlósági középpontot kapunk, az egyik a két kör közös külső, a másik a két kör közös belső érintőinek metszéspontja.
A közös külső érintők Thalesz tételének alkalmazásával a 2776/1. ábrán látható módon szerkeszthetők.

Az O_1O_2T derékszögű háromszög szerkeszthető, hiszen O_1O_2 és $O_1T = 2$ cm adott. (Lásd pl. a 2348/*b)* feladatot!) O_1T T-n túli meghosszabbítására illeszkedik az E_1 érintési pont, E_2-re nézve pedig $O_1E_1 \parallel O_2E_2$. A másik közös külső érintő E_1E_2-nek az O_1O_2 egyenesre vonatkozó tükörképe.



2776/1. ábra

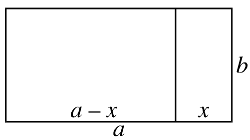
A közös belső érintők szerkesztésére nézve lásd a 2776/2. ábrát! Az O_1O_2T derékszögű háromszög O_1T oldalára merőleges az egyik közös belső érintő, és ennek O_1O_2-re vonatkozó tükörképe a másik.



2776/2. ábra

Alakzatok hasonlósága. Vegyes feladatok

2777. Az ábra jelöléseit használva: $\frac{b}{a} = \frac{x}{b}$, ahonnan $x = \frac{b^2}{a}$. A kis téglalap oldalai b és x.



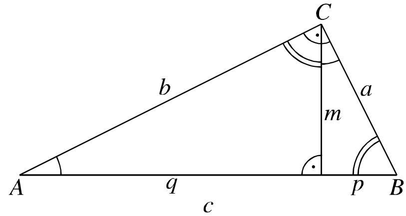
a) $x = 1$ cm; *b)* $x = 1{,}5$ cm;

c) $x = \frac{4}{3}$ cm; *d)* $x = 0{,}5$ cm.

2778. Az ábrán azonosan jelölt szögek nagysága megegyezik, ezért

$$ATC_{\triangle} \sim CTB_{\triangle} \sim ACB_{\triangle}.$$

Ezekből a hasonlóságokból szép összefüggések vezethetők le.



1. $ATC_\triangle \sim CTB_\triangle$, amiből a megfelelő oldalak arányára nézve

$$\frac{q}{m} = \frac{m}{p}, \quad \text{ahonnan} \quad m^2 = pq.$$

3. $CTB_\triangle \sim ACB_\triangle$, ezért

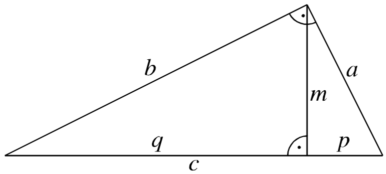
$$\frac{a}{c} = \frac{p}{a}, \quad \text{ahonnan} \quad a^2 = c \cdot p.$$

Hasonlóan látható, hogy

$$b^2 = c \cdot q.$$

2779. Lásd az előző feladatot!

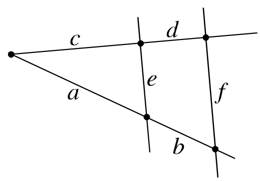
2780. A táblázat üres sorait az alábbi összefüggések segítségével határozzuk meg:



$a^2 + b^2 = c^2$; $m^2 + q^2 = b^2$;
$m^2 + p^2 = a^2$
$ab = cm$ $(= 2 \cdot T)$; $c = p + q$
$a^2 = cp$ (Lásd a 2778. feladatot!)
$b^2 = cq$ (Lásd a 2778. feladatot!)
$m^2 = pq$ (Lásd a 2778. feladatot!)

a	b	c	p	q	m
5	12	**13**	$\mathbf{\frac{25}{13}}$	$\mathbf{\frac{144}{13}}$	$\mathbf{\frac{60}{13}}$
3	4	5	$\mathbf{\frac{9}{5}}$	$\mathbf{\frac{16}{5}}$	$\mathbf{\frac{12}{5}}$
5	**12**	13	$\frac{25}{13}$	$\mathbf{\frac{144}{13}}$	$\mathbf{\frac{60}{13}}$
6	**8**	**10**	3,6	6,4	**4,8**
≈ 10,83	**26**	**≈ 28,17**	$\mathbf{\frac{25}{6}}$	24	10
20	$\mathbf{\frac{80}{3}}$	$\mathbf{\frac{100}{3}}$	**12**	$\mathbf{\frac{64}{3}}$	16

2781. A számításokhoz felhasznált összefüggések:



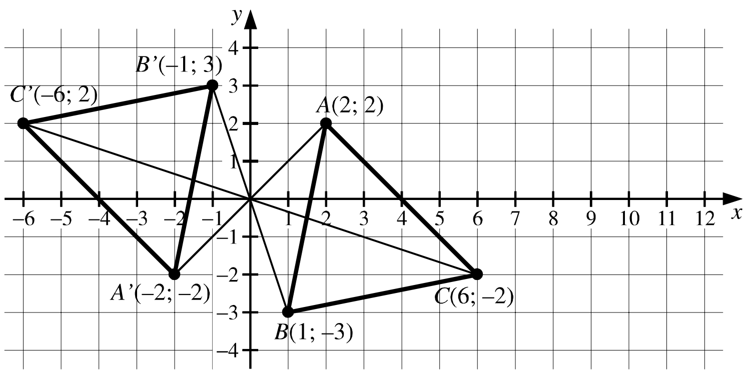
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d};$$

$$\frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c} = \frac{f}{e}$$

A táblázat harmadik sorában csak az $\frac{a}{b}$ arány határozható meg.

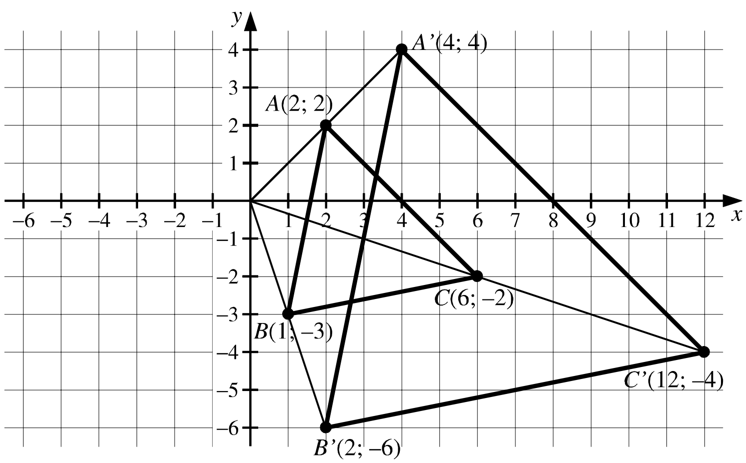
a	b	c	d	e	f
7	4	9	$\mathbf{\frac{36}{7}}$	6	$\mathbf{\frac{66}{7}}$
10	$\mathbf{\frac{60}{11}}$	11	6	8	$\mathbf{\frac{136}{11}}$
$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{\frac{3}{7}x}$	$\mathbf{\frac{28}{3}}$	4	7	10
10	$\mathbf{\frac{30}{11}}$	11	3	$\mathbf{\frac{99}{14}}$	9

2782. *a)*



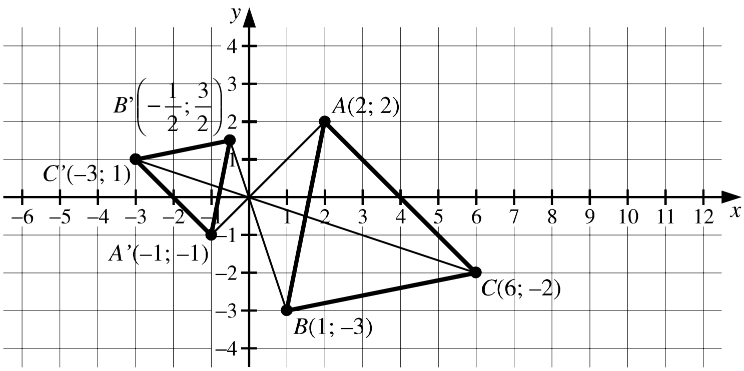
Origó középpontú tükrözés.

b)



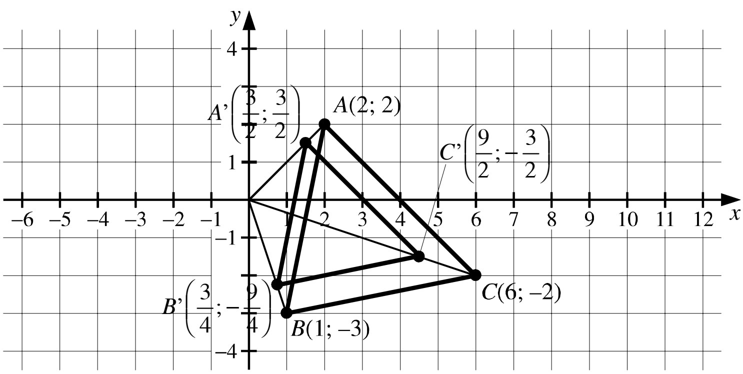
Origó centrumú, 2 arányú középpontos hasonlóság.

c)



Origó centrumú, $-\dfrac{1}{2}$ arányú középpontos hasonlóság.

d)



Origó centrumú, $\dfrac{3}{4}$ arányú középpontos hasonlóság.

e) Origó centrumú, *k* arányú középpontos hasonlóság.

2783. *a)* $A\left(\frac{5}{2};1\right)$, $B\left(\frac{7}{2};2\right)$, $C\left(-\frac{3}{2};-\frac{5}{2}\right)$

b) $A(10;4)$, $B(14;8)$, $C(-6;-10)$

c) $A\left(-\frac{5}{3};-\frac{2}{3}\right)$, $B\left(-\frac{7}{3};-\frac{4}{3}\right)$, $C\left(1;\frac{5}{3}\right)$

d) $A\left(-\frac{20}{3};-\frac{8}{3}\right)$, $B\left(-\frac{28}{3};-\frac{16}{3}\right)$, $C\left(4;\frac{20}{3}\right)$

e) $A\left(-7;-\frac{14}{5}\right)$, $B\left(-\frac{49}{5};-\frac{28}{5}\right)$, $C\left(\frac{21}{5};7\right)$

f) $A\left(\frac{25}{9};\frac{10}{9}\right)$, $B\left(\frac{35}{9};\frac{20}{9}\right)$, $C\left(-\frac{5}{3};-\frac{25}{9}\right)$

2784. *a)* igaz *b)* igaz *c)* hamis *d)* hamis *e)* igaz *f)* hamis
g) igaz *h)* igaz *i)* hamis *j)* igaz *k)* hamis *l)* igaz
m) hamis *n)* hamis *o)* igaz *p)* igaz

2785. *a)* hamis *b)* hamis *c)* igaz *d)* igaz *e)* igaz *f)* hamis
g) hamis

2786. Ha a és a' a két megfelelő oldal, a hasonlóság aránya pedig $0 < r < 1$, akkor $a' = r \cdot a$ és $a - a' = a - r \cdot a = a(1 - r) = 1$ m. Ebből

$$a = \frac{1}{1-r}\text{ m} \quad \text{és} \quad a' = \frac{r}{1-r}\text{ m.}$$

a) $a = 3$ m, $a' = 2$ m; *b)* $a = 5$ m, $a' = 4$ m; *c)* $a = \frac{7}{4}$ m, $a' = \frac{3}{4}$ m;

d) $a = 6{,}5$ m, $a' = 5{,}5$ m.

2787. $ABC_\triangle \sim A'B'C'_\triangle$, így a megfelelő oldalak aránya egyenlő.

AB	BC	AC	$A'B'$	$B'C'$	$A'C'$
10	14	**8**	25	**35**	20
1	1,5	2	**10**	15	**20**
30	20	**40**	12	8	16
100	210	125	**4**	**8,4**	5
$\mathbf{\frac{20}{3}}$	**10**	5	4	6	3
8	9	4	28	**31,5**	**14**

2788. A megfelelő oldalak aránya egyenlő, így ha k az adott kerület, akkor

$$x + \frac{x}{2} + \frac{2}{3}x + 2x = \frac{25x}{6} = k,$$

az oldalak pedig

$$x;\ \frac{x}{2};\ \frac{2}{3}x;\ 2x.$$

a) 2,4 m; 1,2 m; 1,6 m; 4,8 m
b) 18 cm; 9 cm; 12 cm; 36 cm
c) 67,2 mm; 33,6 mm; 44,8 mm; 134,4 mm
d) 28,8 dm; 14,4 dm; 19,2 dm; 57,6 dm

2789. *a)* 0,4 m; 0,6 m; 0,8 m; 1 m *b)* $\frac{2}{9}$ m; $\frac{3}{9}$ m; $\frac{4}{9}$ m; $\frac{5}{9}$ m

c) $\frac{2}{7}$ m; $\frac{3}{7}$ m; $\frac{4}{7}$ m; $\frac{5}{7}$ m *d)* $\frac{2}{7}$ m; $\frac{3}{7}$ m; $\frac{4}{7}$ m; $\frac{5}{7}$ m

2790. Ha az ötszög oldalainak hossza $\frac{x}{2}$; $\frac{2x}{3}$; $\frac{3x}{4}$; $\frac{4x}{5}$; x, és a tekintett különbség d, akkor $x = 2d$.

a) 1 m; $\frac{4}{3}$ m; $\frac{3}{2}$ m; $\frac{8}{5}$ m; 2 m

b) 25 cm; $\frac{100}{3}$ cm $= 33\frac{1}{3}$ cm; 37,5 cm; 40 cm; 50 cm

c) 44 dm; $\frac{176}{3}$ dm $= 58\frac{2}{3}$ dm; 66 dm; 70,4 dm; 88 dm

d) 130 mm; $\frac{520}{3}$ mm $= 173\frac{1}{3}$ mm; 195 mm; 208 mm; 260 mm

2791. Ha az oldalak aránya r, akkor a területek aránya r^2.

a) $\frac{10}{3}$ cm és $\frac{20}{3}$ cm; *b)* 2,5 cm és 7,5 cm; *c)* 4 cm és 6 cm;

d) $\frac{40}{9}$ cm és $\frac{50}{9}$ cm.

2792. A kerületek aránya megegyezik az oldalak arányával, a területek aránya pedig az oldalak arányának négyzetével.

a) 1 : 4; *b)* 9 : 16; *c)* 25 : 49; *d)* 81 : 121; *e)* 196 : 324; *f)* 529 : 676.

2793. A felszínek aránya az oldalak arányának négyzete, a térfogatok aránya az oldalak arányának köbe.

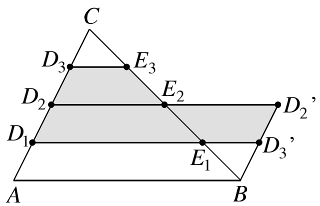
A felszínek aránya:

a) 1 : 4; *b)* 4 : 25; *c)* 9 : 49; *d)* 25 : 81; *e)* 121 : 81; *f)* 225 : 676.

A térfogatok aránya:

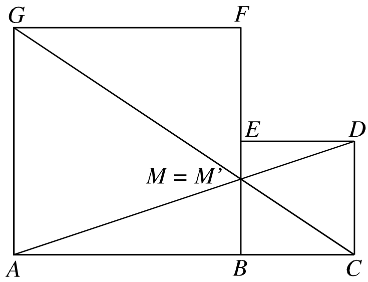
a) 1 : 8; *b)* 8 : 125; *c)* 27 : 343; *d)* 125 : 729; *e)* 1331 : 729;
f) 3375 : 17576.

2794. $ABC_\triangle \sim D_1E_1C_\triangle \sim D_2E_2C_\triangle \sim D_3E_3C_\triangle$, ugyanis megegyeznek két-két oldal arányában és az oldalak által közbezárt szögben. Ebből adódik, hogy az AB, D_1E_1, D_2E_2 és D_3E_3 szakaszok páronként párhuzamosak.



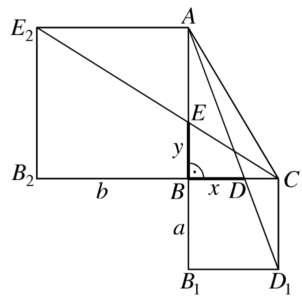
A vonalkázott terület meghatározása végett tükrözzük a D_2E_2C háromszöget az E_2 pontra (Lásd az ábrát!) Ekkor $T_{ABD_2'D_2} = T_{ABC}$ és $T_{D_2E_2E_3D_3} = T_{E_1D_3'D_2'E_2}$, és mivel $T_{D_1D_3'D_2'D_2} = T_{ABD_3'D_1}$ ezért $T_{D_1E_1E_3D_3} = \frac{T_{ABC}}{2}$.

2795. Legyen az AD és EB szakaszok metszéspontja M. Mivel $AB = \frac{2}{3}AC$, ezért $BM = \frac{2}{3}CD = \frac{2}{3}BE$. Messe a CG szakasz a BE szakaszt az M' pontban. Mivel $BC = \frac{AC}{3}$, ezért $BM' = \frac{AG}{3} = \frac{BF}{3}$. Másrészről viszont $BE = \frac{BF}{2}$, így $BM' = \frac{2}{3}BE$.



Kaptuk, hogy $BM = BM' = \frac{2}{3}BE$, ami csak úgy lehetséges, ha $M = M'$.
A két négyzet M-re nézve középpontosan szimmetrikus helyzetű, az $ABFG$ négyzet $-\frac{1}{2}$ arányú kicsinyített képe a $DEBC$ négyzet.

2796. Az ábra jelöléseit használva: $ABD_{\triangle} \sim AB_1D_{1\triangle}$, így $\frac{x}{a} = \frac{b}{a+b}$, ahonnan $x = \frac{ab}{a+b}$. Hasonlóan $EBC_{\triangle} \sim$ $\sim E_2B_2C_{\triangle}$, így $\frac{y}{b} = \frac{a}{a+b}$, ahonnan $y = \frac{ab}{a+b}$. A kapott eredményeket összevetve adódik az állítás.

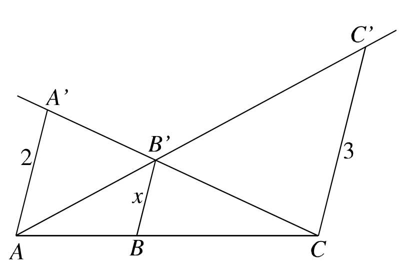


2797. Legyen $BB' = x$.
$ACA'_{\triangle} \sim BCB'_{\triangle}$, ezért

$$\frac{x}{2} = \frac{BC}{AC}.$$

$ACC'_{\triangle} \sim ABB'_{\triangle}$, ezért

$$\frac{x}{3} = \frac{AB}{AC}.$$



A kapott arányokat összeadva kapjuk, hogy

$$\frac{x}{3} + \frac{x}{2} = \frac{AB}{AC} + \frac{BC}{AC} = \frac{AB+BC}{AC} = \frac{AC}{AC} = 1,$$

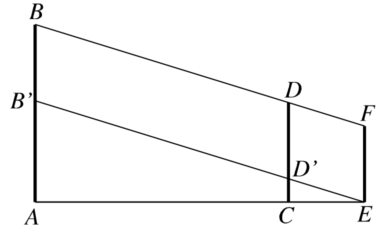
ahonnan

$$x = \frac{6}{5} = 1{,}2.$$

Általánosan: ha $AA' = a$, $CC' = b$, akkor $x = \dfrac{ab}{a+b}$.

2798. Legyen a fa magassága méterben mérve $h = AB$. Az ábra jelöléseit használva az adatok:

$AC = 18$ m, $CE = 2$ m,
$CD = 3{,}5$ m, $EF = 3$ m.



Legyen B' az AB szakasz azon pontja, amelyre a $B'EFB$ négyszög paralelogramma. Ekkor $AEB'_\triangle \sim CED'_\triangle$, amiből adódóan $\dfrac{AB'}{AE} = \dfrac{CD'}{CE}$. Mivel $AB' = h - EF$ és $CD' = CD - EF = 0{,}5$ m, ezért felírható a következő egyenlet

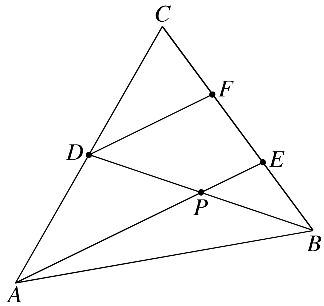
$$\frac{h-3}{20} = \frac{0{,}5}{2},$$

ahonnan

$$h = 8 \text{ m}.$$

2799. Legyen F a BC oldal és az AE-vel párhuzamos, D-re illeszkedő egyenes metszéspontja. $AEC_\triangle \sim DFC_\triangle$, így

$$\frac{CE}{CF} = \frac{AC}{DC} = 2.$$



Másrészt $BFD_\triangle \sim BEP_\triangle$, ezért

$$\frac{BF}{BE} = \frac{BD}{BP} = 2.$$

Mivel F a CE, E pedig a BF szakasz felezőpontja, ezért $BE = EF = FC$, amiből adódóan $BC = 3 \cdot BE$.

2800. Előbb szerkesszünk a kívánt háromszöghöz hasonló háromszöget, majd nagyítsuk (vagy kicsinyítsük) a megfelelő sugarak arányában. (Lásd még a 2769. és 2770. feladatokat!)

2801. Jelölje a, b, c és a', b', c' a feladat feltételeinek megfelelő két háromszög oldalainak hosszát. Ekkor $a : b : c = a' : b' : c'$ és $b = a'$ illetve $c = b'$. Végtelen sok megfelelő háromszög-pár konstruálható, egy ilyen például: $a = 17$, $b = 18$, $c = 12$, illetve $a' = 18$,

$b' = 12$, $c' = 8$. (A konstrukciónál figyelni kell arra, hogy a háromszög-egyenlőtlenség teljesüljön.)