Síkbeli alakzatok

Szakaszok, szögek

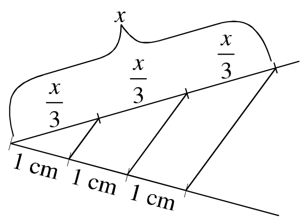
2132. Alapszerkesztések.

2133. Alapszerkesztések.

2134. Alapszerkesztések.

2135. Ha x és y az egyes szakaszok hossza, akkor $x + y = a$ és $x - y = b$. Így $x = \frac{a+b}{2}$; $y = \frac{a-b}{2}$. Az *e)* és az *f)* pont adatainak megfelelő szakaszok nem léteznek.

2136. $a = \frac{c+d}{6}$; $b = \frac{c-d}{6}$. Az a hosszúságú szakasz szerkesztéséhez harmadolnunk is kell, ami az ábrán látható módon végezhető el. Az *e)* pont adatainak megfelelő szakaszok nem léteznek.



2137. Alapszerkesztések.

2138. $F_1F_2 = \frac{AB + BC}{2}$

a) 2, 5 cm *b)* 2,25 cm *c)* 4,1 cm *d)* 9,5 cm *e)* 37,54 cm *f)* 7,65 cm

2139. $BC = AC + BD - AD$

a) 3 cm *b)* 6 cm *c)* 5 cm *d)* $B = C$ *e)* 4,19 cm

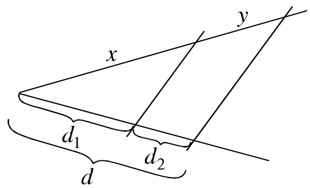
f) Az adatok nem felelnek meg a feltételeknek.

2140.

AB	BC	CD	AC	BD	AD
4 cm	5 cm	6 cm	**9 cm**	**11 cm**	**15 cm**
8 cm	**3 cm**	45 mm	**11 cm**	0,7 dm	**15 cm**
0,9 cm	73 mm	**6,7 cm**	0,82 dm	14 cm	**14,9 cm**
130 cm	**1,8 m**	1,2 m	**3,1 m**	3 m	**4,3 m**
1,3 km	**200 m**	**1,5 km**	1500 m	1700 m	3 km
1 mm	3,9 cm	13 mm	**4 cm**	**5,2 cm**	53 mm
x dm	**(7,2 – x) dm**	6 dm	72 cm	**(13,2 – x) dm**	1320 mm

Az utolsó sor adatai alapján B a feltételnek megfelelően szabadon választható.

2141. A feladatban egy adott hosszúságú szakaszt kell arányosan felosztani. (Lásd az ábrát.)



$$d_1 + d_2 = d$$
$$\frac{x}{y} = \frac{d_1}{d_2}$$

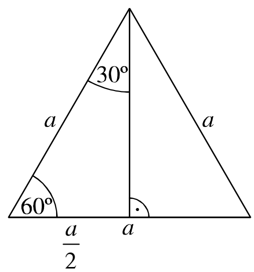
2142. *a)* $\frac{10}{3}$ cm *b)* $\frac{10}{7}$ cm *c)* 4 cm *d)* $\frac{20}{7}$ cm *e)* 6 cm *f)* $\frac{40}{11}$ cm

g) 5,5 cm *h)* 6,5 cm *i)* $\frac{10p}{p+q}$ cm

2143. *a)* 3 m *b)* 4,5 m *c)* 6 m *d)* 1,8 m *e)* 2,25 m *f)* $\frac{27}{11}$ m

g) 2 m *h)* 2,5 m *i)* $\left|9-\frac{18p}{p+q}\right|$ m $=\left|9-\frac{18q}{p+q}\right|$ m

2144. *a)* – *b)* Egy szabályos háromszögnek megszerkesztem az egyik magasságát.



c) $15° = \frac{30°}{2}$

d) $75° = 60° + 15° = 60° + \frac{30°}{2}$

e) $22{,}5° = \frac{45°}{2}$. 45º az egyenlő szárú derékszögű háromszög átfogóján fekvő szög.

f) $37{,}5° = 30° + 7{,}5° = 30° + \frac{15°}{2}$

2145. *c)* $22{,}5° = \frac{45°}{2}$

d) $67{,}5° = 60° + 7{,}5° = 60° + \frac{15°}{2} = 60° + \frac{30°}{4}$

e) 82°30’ = 82,5° = 60° + 22,5°

f) 135° = 90° + 45°

g) 120° = 2 · 60°

h) $105° = 90° + 15° = 90° + \frac{30°}{2}$

i) $112°30’ = 112{,}5° = 90° + 22{,}5° = 90° + \frac{45°}{2}$

j) 225° = 180° + 45°

2146. *a)* 270° = 180° + 90° = 360° – 90°

b) 330° = 360° – 30°

c) $210° = 180° + 30°$

d) $217{,}5° = 180° + 37{,}5° = 180° + \dfrac{75°}{2} = 180° + 30° + \dfrac{30°}{4}$

e) $202°30' = 202{,}5° = 180° + 22{,}5° = 180° + \dfrac{45°}{2}$

f) $285° = 270° + 15° = 270° + \dfrac{30°}{2}$

g) $262{,}5° = 270° - 7{,}5° = 270° - \dfrac{30°}{4}$

h) $405° = 360° + 45°$

i) $375° = 360° + 15° = 360° + \dfrac{30°}{2}$

2147. Alapszerkesztések.

2148. Alapszerkesztések.

2149. $\alpha = \dfrac{(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)}{2}$; $\beta = \dfrac{(\alpha+\beta)-(\alpha-\beta)}{2}$

a) $\alpha = 45°$, $\beta = 15°$
b) $\alpha = 60°$, $\beta = 30°$
c) $\alpha = 30°$, $\beta = 15°$
d) $\alpha = 100°$, $\beta = 20°$
e) $\alpha = 180°$, $\beta = 30°$
f) $\alpha = 134{,}5°$, $\beta = 44{,}5°$
g) $\alpha = 88°38'$, $\beta = 50°8'$
h) $\alpha = 168{,}55°$, $\beta = 39{,}25°$
i) $\alpha = 300°$, $\beta = 30°$
j) $\alpha = 224°30'$, $\beta = 67°17'$

2150. Lásd a 2149. feladatot!

2151. Lásd a 2149. feladatot!

2152. Lásd a 2149. feladatot!

2153. Alapszerkesztések.

2154. $\alpha = \dfrac{\gamma+\delta}{4}$; $\beta = \dfrac{\gamma-\delta}{2}$

a) $\alpha = 22{,}5°$, $\beta = 15°$
b) $\alpha = 37{,}5°$, $\beta = 15°$
c) $\alpha = 26{,}25°$, $\beta = 7{,}5°$
d) $\alpha = 48{,}75°$, $\beta = 22{,}5°$
e) $\alpha = 43{,}125°$, $\beta = 18{,}75°$
f) $\alpha = 48{,}75°$, $\beta = 15°$
g) $\alpha = 105°$, $\beta = 60°$
h) $\alpha = 135°$, $\beta = 45°$
i) $\alpha = 183{,}75°$, $\beta = 52{,}5°$

2155. *a)* $38°, 38°$ *b)* $25\frac{1}{3}°$, $50\frac{2}{3}°$ *c)* $19°, 57°$ *d)* $30{,}4°, 45{,}6°$

e) $33\frac{7}{9}°$, $42\frac{2}{9}°$ *f)* $53{,}2°, 22{,}8°$ *g)* $31\frac{2}{3}°$, $44\frac{1}{3}°$ *h)* $33{,}25°, 42{,}75°$

2156. Ha α a kérdéses szög, akkor

$$\frac{3}{5}\alpha-\frac{2}{5}\alpha=36°$$
$$\alpha=180°.$$

2157. $\alpha+\beta=\alpha+\frac{5}{7}\alpha=\frac{12}{7}\alpha=\frac{12}{7}\cdot 105°=180°$

2158. $\alpha+\beta=230°$

a) $180°+\frac{\beta}{2}=230° \to \beta=100°,\ \alpha=130°$

b) Két eset lehetséges.

1. $180°+\frac{\beta}{3}=230° \to \beta=150°,\ \alpha=80°$
2. $180°+\frac{2\beta}{3}=230° \to \beta=75°,\ \alpha=155°$

c) Két eset lehetséges.

1. $180°+\frac{\beta}{4}=230° \to \beta=200°,\ \alpha=30°$
2. $180°+\frac{3\beta}{4}=230° \to \beta=66\frac{2}{3}°,\ \alpha=163\frac{1}{3}°$

d) Két eset lehetséges.

1. $180°+\frac{2\beta}{5}=230° \to \beta=125°,\ \alpha=105°$
2. $180°+\frac{3\beta}{5}=230° \to \beta=83\frac{1}{3}°,\ \alpha=146\frac{2}{3}°$

2159. Nagyság szerint rendezve a szögeket a középső mindegyik esetben 60°-os.

a) 35°; 60°; 85° *b)* 30°; 60°; 90° *c)* 15°; 60°; 105°
d) 10°; 60°; 110° *e)* 6°46’; 60°; 113°14’

2160. Nagyság szerint rendezve a szögeket a középső legyen α.

a) $\frac{\alpha}{2}+\alpha+2\alpha=180° \to \alpha=51\frac{3}{7}°\approx 51{,}43°$. A szögek: $25\frac{5}{7}°$, $51\frac{3}{7}°$, $102\frac{6}{7}°$

b) $\frac{2}{3}\alpha+\alpha+\frac{3}{2}\alpha=180° \to \alpha=56\frac{16}{19}°\approx 56{,}84°$. A szögek: $37\frac{17}{19}°$, $56\frac{16}{19}°$, $85\frac{5}{19}°$

c) $\frac{\alpha}{3}+\alpha+3\alpha=180° \to \alpha=41\frac{7}{13}°\approx 41{,}54°$. A szögek: $13\frac{11}{13}°$, $41\frac{7}{13}°$, $124\frac{8}{13}°$

d) $\frac{\alpha}{4}+\alpha+4\alpha=180° \to \alpha=34\frac{2}{7}°\approx 34{,}29°$. A szögek: $8\frac{4}{7}°$, $34\frac{2}{7}°$, $137\frac{1}{7}°$

2161. Nagyság szerint rendezve a szögeket a középső mindegyik esetben 72°-os.

a) 12°; 42°; 72°; 102°; 132° *b)* 8°; 40°; 72°; 104°; 136°
c) 52°; 62°; 72°; 82°; 92° *d)* 27°; 49°30’; 72°; 94°30’; 117°

2162. *a)* 72°; 72°; 72°; 144° *b)* 40°; 80°; 120°; 120°

c) 30°; 90°; 90°; 150° *d)* $51\frac{3}{7}°$; $77\frac{1}{7}°$; $102\frac{6}{7}°$; $128\frac{4}{7}°$

e) $69\frac{3}{13}°$; $83\frac{1}{13}°$; $96\frac{12}{13}°$; $110\frac{10}{13}°$ *f)* 45°; 75°; 105°; 135°

2163. *a)* 90° *b)* 120° *c)* 150° *d)* 20°

e) $30° - \frac{30°}{4} = \frac{3}{4} \cdot 30° = 22{,}5°$ *f)* $60° - 5° = 55°$

2164.

0 óra	0°	5 óra	150°	9 óra	90°
1 óra	30°	6 óra	180°	10 óra	60°
2 óra	60°	7 óra	150°	11 óra	30°
3 óra	90°	8 óra	120°	12 óra	0°
4 óra	120°				

Megjegyzés: A mutatók által bezárt két szögből mindig a kisebbet tekintettük.

2165. *a)* 22,5° *b)* 49,2° *c)* 224,9° *d)* $106{,}40\dot{6}°$ *e)* 93,095°

2166. *a)* 33°30’ *b)* 42°42’ *c)* 53°36’ *d)* 134°14’24” *e)* 215°3’
f) 139°0’36”

2167. $\alpha° = \frac{180°}{\pi} \cdot \alpha(\text{rad})$

a) 180° *b)* 360° *c)* 90° *d)* 120° *e)* 30°
f) 135° *g)* 67,5° *h)* 15° *i)* 25° *j)* 75°

k) $\frac{180°}{\pi} \approx 57{,}2958° \approx 57°17'45''$ *l)* $\frac{288°}{\pi} \approx 91{,}67°$

2168. $\alpha(\text{rad}) = \frac{\pi}{180°} \cdot \alpha°$

a) 2π *b)* π *c)* $\frac{\pi}{3}$ *d)* $\frac{\pi}{2}$ *e)* $\frac{\pi}{6}$ *f)* $\frac{\pi}{4}$

g) $\frac{3\pi}{2}$ *h)* $\frac{5\pi}{3}$ *i)* $\frac{\pi}{12}$ *j)* $\frac{5\pi}{12}$ *k)* $\frac{\pi}{36}$

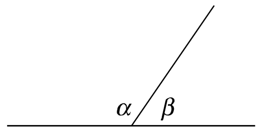
2169. β az α szög pótszöge, ha $\alpha + \beta = 90°$. Ha δ jelöli a feladatban megadott különbséget, akkor $\alpha = \beta + \delta = 90° - \alpha + \delta$, amiből $\alpha = \frac{90° + \delta}{2}$.

a) 50° *b)* 51° *c)* 57,5° *d)* 65° *e)* 75° *f)* 82,5°
g) 59,06° *h)* 60°39’30”

2170. *a)* 30° *b)* 36° *c)* 27° *d)* 40° *e)* 45° *f)* $\frac{p}{p+q} \cdot 90°$

2171. Jelöljük a k számmal megjelölt szöget β_k-val ($k = 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7$). Ekkor $\beta_2 = \beta_4 = \beta_6 = \alpha$, $\beta_1 = \beta_3 = \beta_5 = \beta_7 = 180° - \alpha$.

2172. Két szög egymás mellékszögei, ha egyik szögszáruk közös, másik szögszáruk pedig ugyanazon egyenes két félegyenese. Ha δ jelöli a feladatban megadott különbséget és a β szögre vagyunk kíváncsiak, akkor $\beta = \alpha - \delta = 180° - \beta - \delta$, ahonnan $\beta = \dfrac{180° - \delta}{2}$.

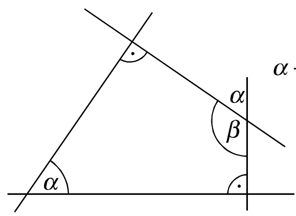


$\alpha + \beta = 180°$

a) 85° *b)* 79° *c)* 75°
d) 67,5° *e)* 53,5° *f)* 40°
g) 30° *h)* 24°21’

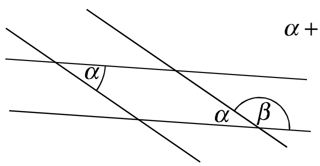
2173. *a)* 90° *b)* 120° *c)* 72°
d) $77\frac{1}{7}°$ *e)* 75° *f)* 126°
g) 81° *h)* $\dfrac{p}{p+q} \cdot 180°$

2174. *a)* $\alpha = 90°$, $\beta = 90°$
b) $\alpha = 120°$, $\beta = 60°$
c) $\alpha = 72°$, $\beta = 108°$
d) $\alpha = 67{,}5°$, $\beta = 112{,}5°$
e) $\alpha = 114{,}\dot{5}\dot{4}°$, $\beta = 65{,}\dot{4}\dot{5}°$
f) $\alpha = 70°$, $\beta = 110°$
g) $\alpha = 67{,}5°$, $\beta = 112{,}5°$
h) $\alpha = \dfrac{p}{p+q} \cdot 180°$, $\beta = \dfrac{q}{p+q} \cdot 180°$



$\alpha + \beta = 180°$

2175. *a)* $\alpha = 90°$, $\beta = 90°$
b) $\alpha = 60°$, $\beta = 120°$
c) $\alpha = 72°$, $\beta = 108°$
d) $\alpha = 80°$, $\beta = 100°$
e) $\alpha = 54°$, $\beta = 126°$
f) $\alpha = 63°$, $\beta = 117°$
g) $\alpha = 82{,}5°$, $\beta = 97{,}5°$

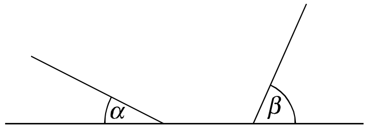


$\alpha + \beta = 180°$

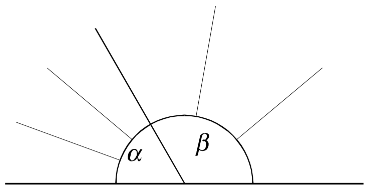
h) $\alpha = \dfrac{p}{p+q} \cdot 180°$, $\beta = \dfrac{q}{p+q} \cdot 180°$

2176. A derékszög.

2177. Jelölje a két szöget α és β. Mivel a szögfelezők merőlegesek egymásra, ezért $\dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{\beta}{2} = 90°$, azaz $\alpha + \beta = 180°$. Ez viszont azt jelenti, hogy mivel az egyik szögszár közös, ezért a szögek egymás mellékszögei, azaz a nem közös szögszárak valóban egy egyenesre illeszkednek. Az állítás megfordítása: Ha két szög egy-egy szára ugyanarra az egyenesre illeszkedik, akkor a másik száruk közös és szögfelezőik merőlegesek egymásra. A megfordítás nyilvánvalóan nem igaz. (lásd az ábrát.) Igaz viszont a következő állítás: Ha két szög egyik szára közös, másik száruk pedig egy egyenesre illeszkedik, akkor szögfelezőik merőlegesek egymásra. A feltételből adódóan ugyanis a szögek egymás mellékszögei, így $\alpha + \beta = 180°$, amiből $\dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{\beta}{2} = 90°$.



2178. $\alpha + \beta = 180°$, így $\dfrac{\alpha}{3} + \dfrac{\beta}{3} = 60°$.



A kérdéses szög lehet:

1. $2 \cdot \dfrac{\alpha}{3} + \dfrac{\beta}{3} = \dfrac{\alpha}{3} + 60°$

2. $\dfrac{\alpha}{3} + 2 \cdot \dfrac{\beta}{3} = \dfrac{\beta}{3} + 60°$

$0° < \alpha < 90°$, így $0° < \dfrac{\alpha}{3} < 30°$.

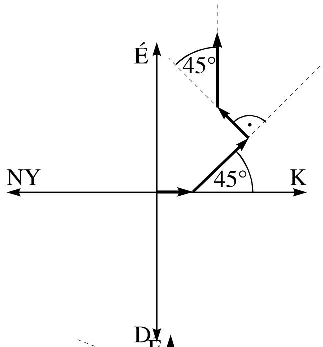
$90° < \beta < 180°$, így $30° < \dfrac{\beta}{3} < 60°$.

A kérdéses szögösszegekre nézve:

1. $60° < \dfrac{\alpha}{3} + 60° < 90°$;

2. $90° < \dfrac{\beta}{3} + 60° < 120°$.

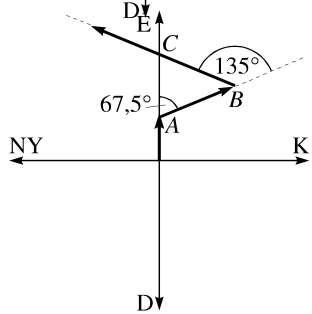
2179. Rajzoljuk le a repülőgép útját. Az eredeti irányra merőlegesen, észak felé repül.



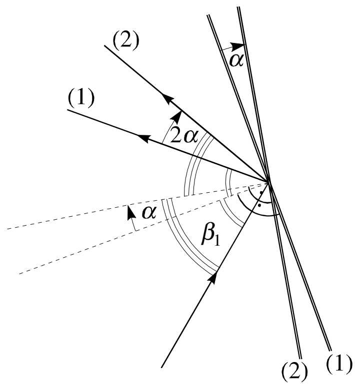
2180. Az ABC háromszög C-nél levő szöge:

$$180° - 67{,}5° - 45° = 67{,}5°.$$

A hajó tehát az eredeti útirányhoz képest $+67{,}5°$-kal elfordulva halad.



2181. Beesési szög az (1) helyzetben β_1, a (2) helyzetben $\beta_1 + \alpha$. Mindkét helyzetben egyenlő a beesési és a visszaverődési szög az aktuális beesési merőlegeshez viszonyítva. A tükörrel együtt a beesési merőleges is α szöggel elfordul, így a beesési szög α-val változik. A beesési merőleges új, α-val elfordult helyzetéhez képest a visszaverődési szög α-val változik, így az eredeti helyzethez képest valóban 2α-val fordul el.



Kombinatorika a síkon

2182. n pont az egyenest $n + 1$ részre osztja, ezek között $n - 1$ szakasz és 2 félegyenes van.

2183. n részre az egyeneset $n - 1$ pont osztja.

2184. Az egyenesen n szakaszt $n + 1$ pont határoz meg.

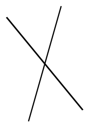
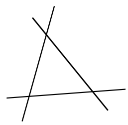
2185. Bármelyik pontból a többi ponthoz $n - 1$ egyenes húzható. Így összeszámlálva az egyeneseket mindegyiket kétszer számláljuk, ezért n olyan pont, amelyek közül semelyik három nincs egy egyenesen $\frac{n(n-1)}{2}$ egyenest határoz meg.

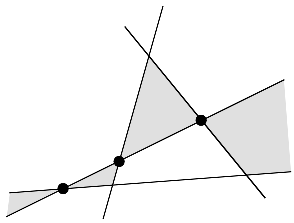
a) 0 *b)* 1 *c)* 3 *d)* 6 *e)* 10 *f)* 15

2186. Bármely két egyenes meghatároz egy metszéspontot, és erre már más egyenes nem illeszkedik. Az előző feladat gondolatmenetéhez teljesen hasonló módon adódik, hogy n egyenes $\frac{n(n-1)}{2}$ metszéspontot határoz meg.

a) 0 *b)* 1 *c)* 3 *d)* 6 *e)* 10 *f)* 15

2187. n párhuzamos egyenes $n + 1$ részre osztja a síkot.

2188. *a)* 2  *b)* 4  *c)* 7 



d) Eddig a rajzok alapján könnyű volt az egyes síkrészeket megszámolni, viszont ahogy az egyenesek száma nő, ez egyre nehezebb lesz. Megfigyelhetjük, hogy a *d)* esetben a negyedik egyenes behuzása után ezen az egyenesen három metszéspont keletkezett, ami ezt az egyenest négy részre osztotta. Minden ilyen rész elvágott egy eddigi síkrészt, így a három egyenes helyzetéhez képest a síkrészek száma néggyel nőtt, azaz 11 lett.

e) – *f)* Az ötödik egyenes behúzása után hasonló gondolatmenettel adódik, hogy a síkrészek száma 16, míg hat egyenes esetén 22.

g) Jelölje a_n n db, a feladat feltételeit kielégítő egyenes esetén a keletkezett síkrészek számát. A fenti gondolatmenetet alkalmazzuk.

$$a_0 = 1$$
$$a_1 = 2 = a_0 + 1$$
$$a_2 = 2 + 2 = a_1 + 2 = 4$$
$$a_3 = 4 + 3 = a_2 + 3 = 7$$
$$a_4 = 7 + 4 = a_3 + 4 = 11$$
$$\vdots$$
$$a_n = a_{n-1} + n$$

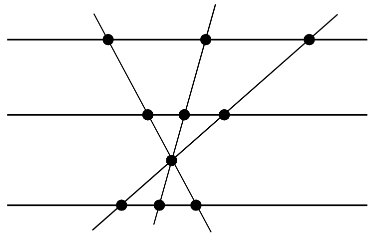
Összeadva ezeket, kapjuk, hogy $a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_n = a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} +$ $+ 1 + 1 + 2 + ... + n$, azaz

$$a_n = 1 + 1 + 2 + \ldots + n = 1 + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2 + n + 2}{2}$$

(Felhasználtuk, hogy az első n pozitív egész szám összege $\frac{n(n+1)}{2}$.)

2189. Az előző feladat alapján 5 egyenes a síkot legfeljebb 16 részre oszthatja, ugyanis ha vannak közöttük párhuzamosak, vagy van olyan pont, amire legalább 3 egyenes illeszkedik, akkor a síkrészek száma kevesebb lesz, mint 16. A válasz tehát: nem lehet.

2190. A három párhuzamos és a három egy pontra illeszkedő egyenes összesen 10 metszéspontot határoz meg. (Lásd az ábrát.) Ezek után egyesével húzzuk be az egyeneseket. Egy új egyenes behúzása a metszéspontok számát annyival növeli, ahány egyenes a behúzás előtt a rajzon volt. Így a tizedik egyenes behúzása után a metszéspontok száma:

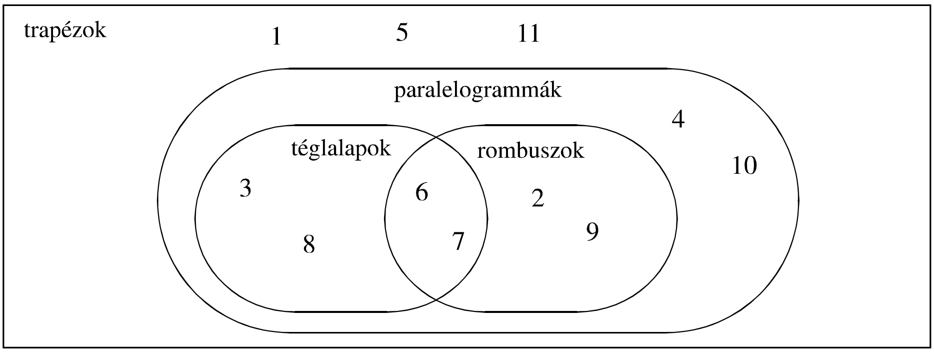


$$10 + 6 + 7 + 8 + 9 = 40.$$

2191. A legkevesebb részre akkor osztja, ha az egyenesek párhuzamosak, ekkor a keletkező részek száma 5. A legtöbb részre akkor osztja, ha az egyenesek páronként metszik egymást a kör belsejében és semelyik metszésponton sem megy át három egyenes. Ekkor a részek száma 11. (Lásd a 2188. feladat *e)* pontját!)

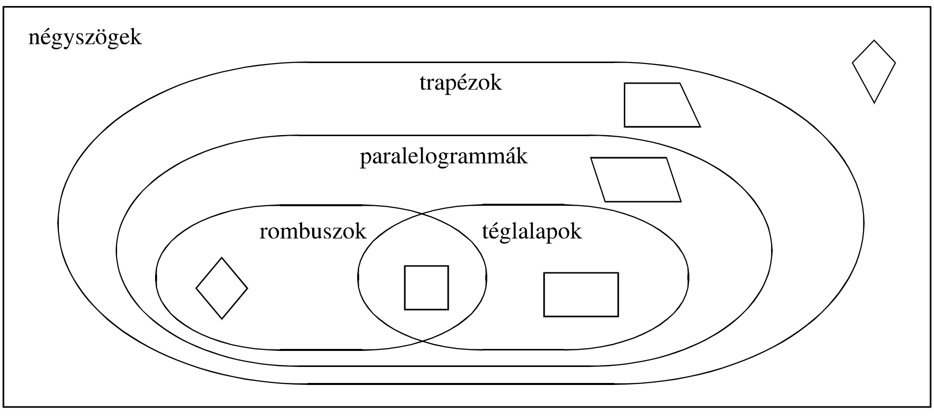
Sokszögek tulajdonságai

2192.

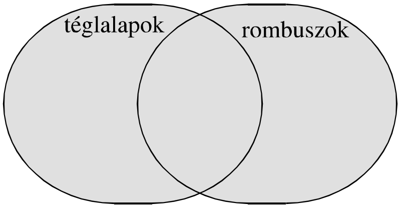


A 12. sorszámú síkidom deltoid, egyik helyre sem írható.

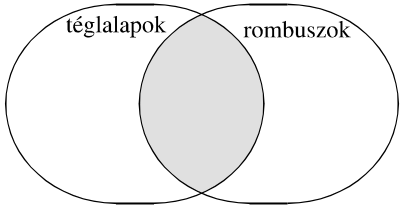
2193.



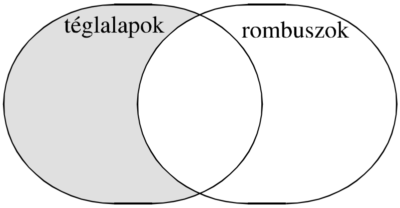
2194. *a)*



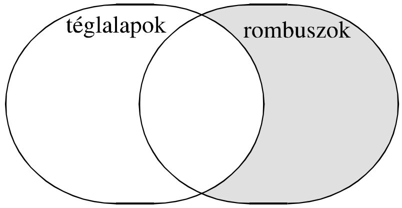
b)



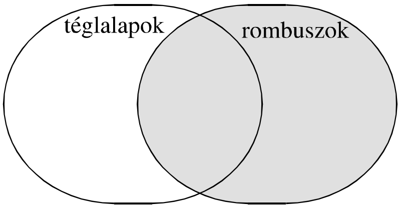
c)



d)



e)



2195. *a)* hamis *b)* igaz *c)* hamis *d)* igaz *e)* hamis *f)* igaz
g) igaz *h)* igaz *i)* igaz *k)* hamis *l)* igaz

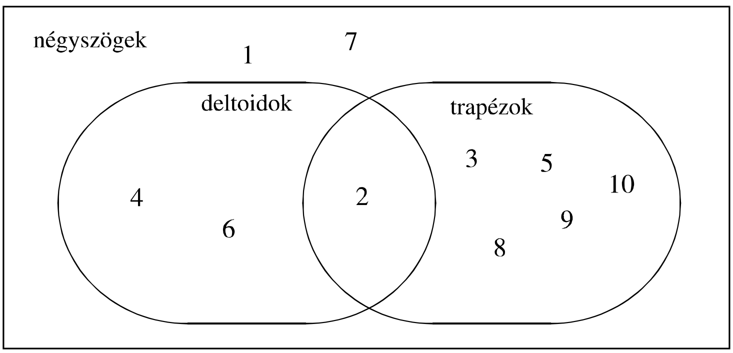
2196. *a)* igaz *b)* hamis *c)* igaz *d)* igaz *e)* hamis *f)* igaz
g) igaz *h)* igaz *i)* igaz *j)* hamis *k)* hamis *l)* hamis
m) igaz

2197. *a)* igaz *b)* igaz *c)* hamis *d)* igaz *e)* igaz *f)* igaz
g) igaz *h)* hamis

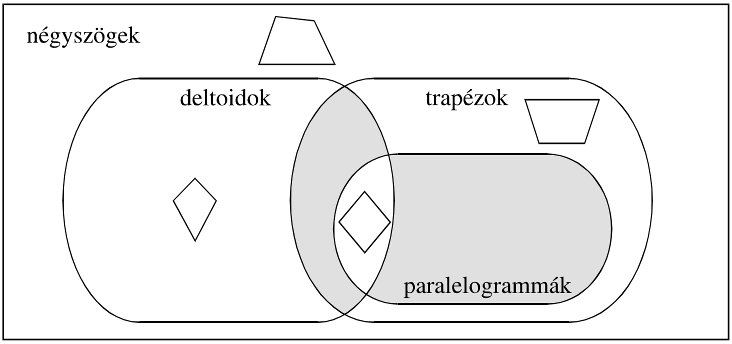
2198. *a)* igaz *b)* igaz *c)* hamis *d)* igaz *e)* hamis *f)* igaz
g) igaz *h)* igaz *i)* igaz *j)* igaz

2199. *a)* igaz *b)* igaz *c)* igaz *d)* igaz *e)* hamis *f)* igaz
g) igaz *h)* igaz *i)* igaz *j)* igaz

2200.



2201.



A szürkén satírozott tartományokba nem került rajz.

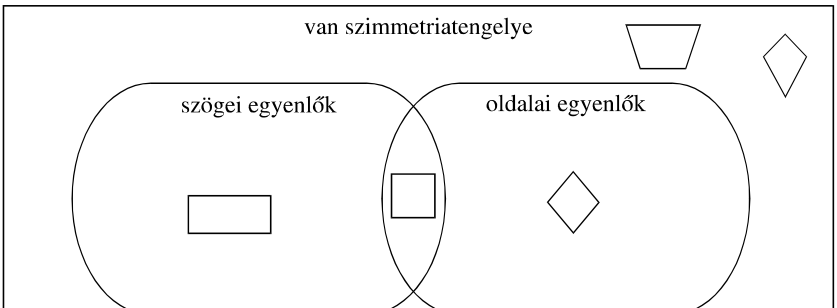
2202. *a)* igaz *b)* hamis *c)* igaz *d)* hamis *e)* igaz *f)* igaz
g) hamis *h)* igaz *i)* hamis *j)* igaz *k)* hamis *l)* hamis
m) igaz

2203. *a)* hamis *b)* igaz *c)* hamis *d)* igaz *e)* igaz *f)* igaz
g) igaz *h)* hamis *i)* igaz *j)* igaz *k)* igaz

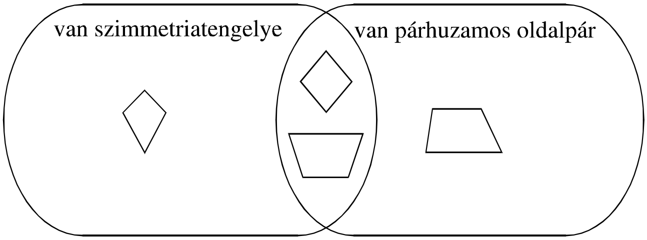
2204. *a)* igaz *b)* igaz *c)* igaz *d)* hamis *e)* igaz *f)* igaz
g) igaz *h)* igaz

2205. *a)* igaz *b)* hamis *c)* igaz *d)* hamis *e)* igaz *f)* igaz
g) igaz *h)* hamis *i)* igaz *j)* igaz *k)* igaz *l)* igaz
m) igaz *n)* hamis *o)* igaz *p)* hamis

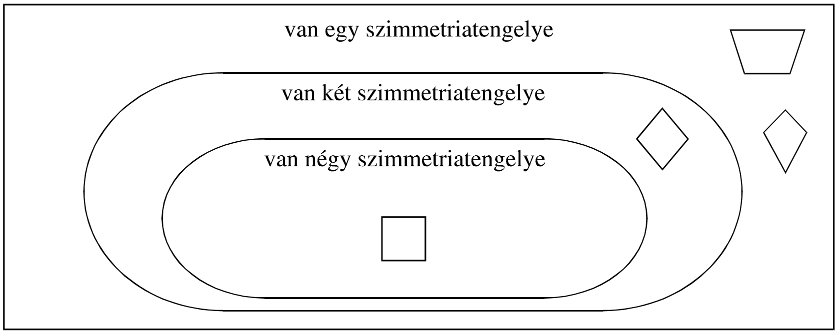
2206. *a)*



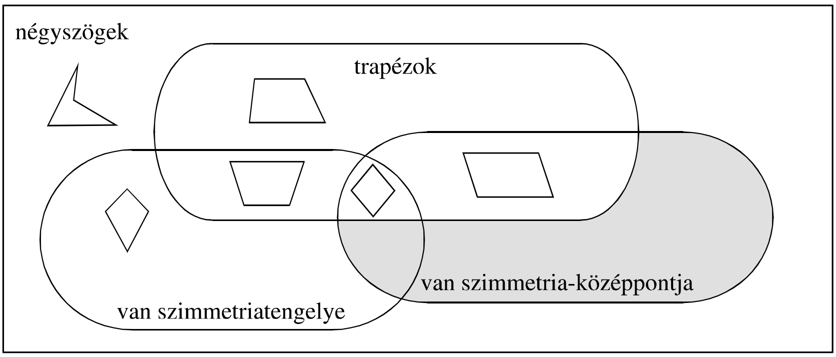
b)



c)

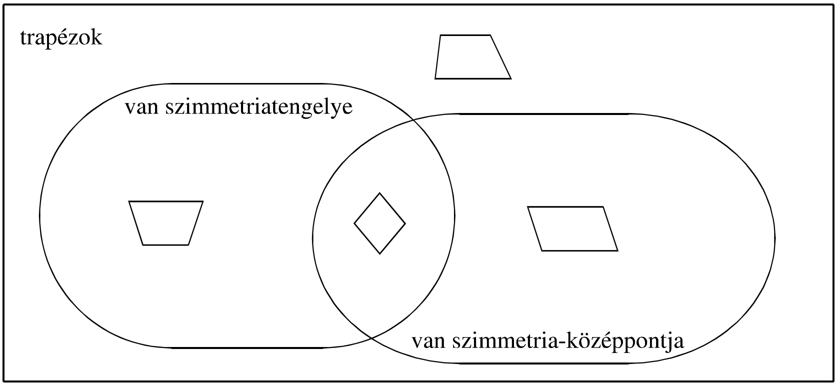


2207. *a)*

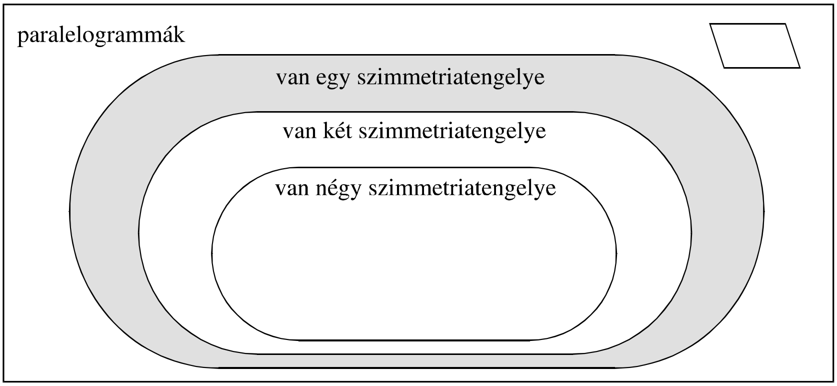


A szürkén satírozott részek üresen maradtak.

b)

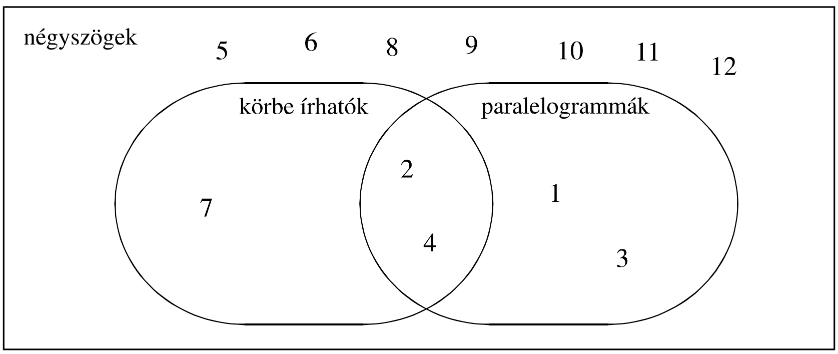


c)

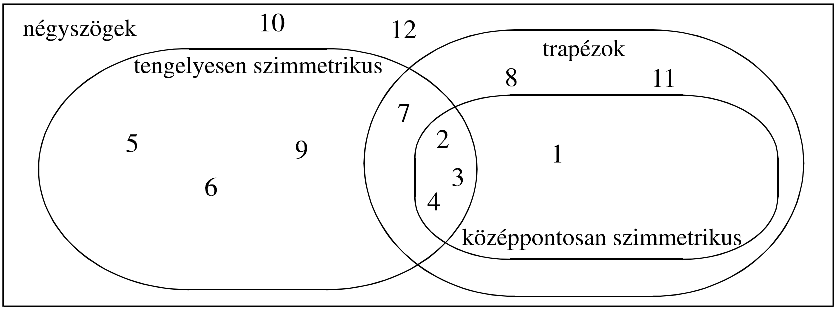


A szürkén satírozott rész üresen maradt.

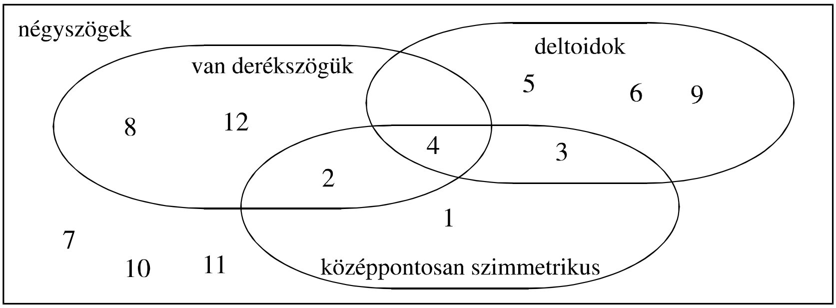
2208. *a)*



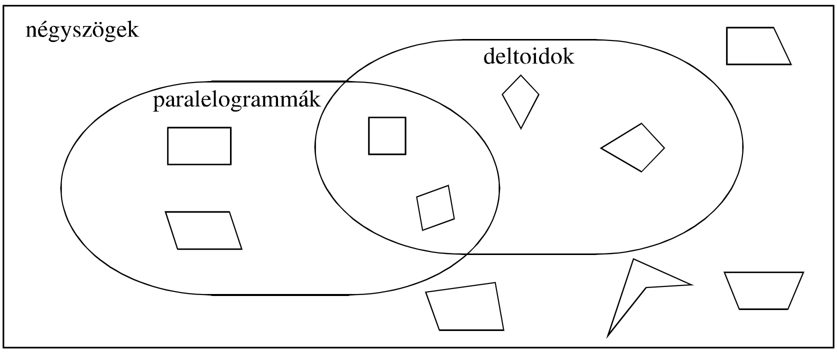
b)


négyszögek
10
12
tengelyesen szimmetrikus
trapézok
8
11
7
5
9
2
1
3
6
4
középpontosan szimmetrikus

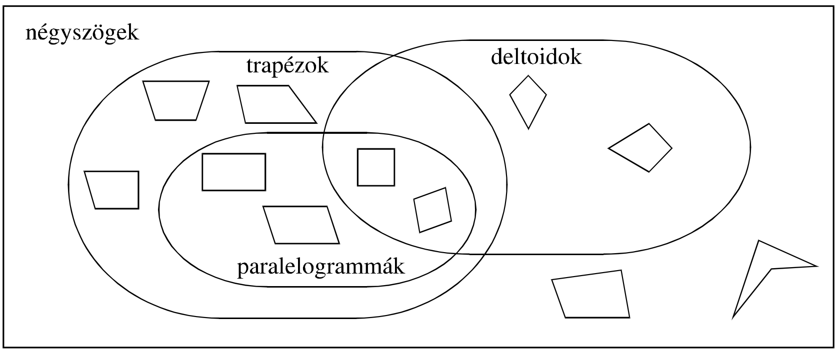
c)


négyszögek
deltoidok
van derékszögük
5
6
9
8
12
4
3
2
1
7
10
11
középpontosan szimmetrikus

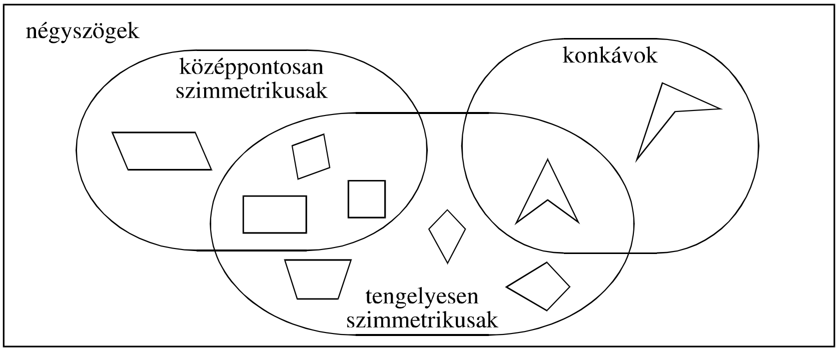
2209. *a)*


négyszögek
deltoidok
paralelogrammák

b)


négyszögek
trapézok
deltoidok
paralelogrammák

c)

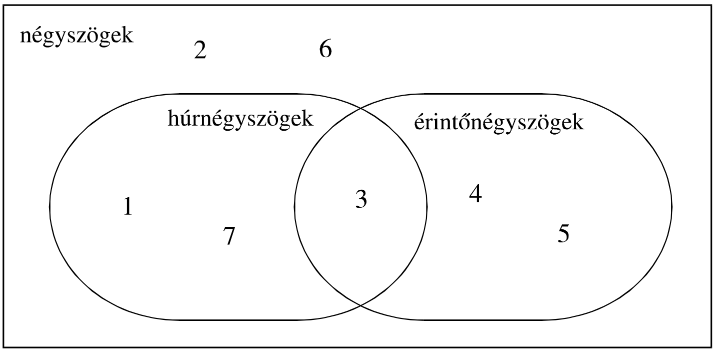


2210. *a)* igaz *b)* igaz *c)* igaz *d)* igaz *e)* hamis *f)* igaz
g) igaz *h)* igaz *i)* igaz *j)* hamis *k)* hamis *l)* igaz
m) hamis *n)* hamis *o)* igaz

2211. *a)* igaz *b)* igaz *c)* igaz *d)* hamis *e)* igaz *f)* hamis
g) igaz *h)* hamis *i)* hamis *j)* igaz

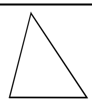
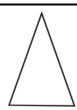
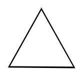
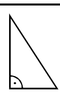
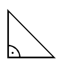
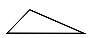
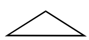
2212. *a)* igaz *b)* igaz *c)* hamis *d)* hamis *e)* igaz *f)* igaz
g) hamis *h)* igaz *i)* hamis *j)* hamis *k)* igaz *l)* igaz

2213.

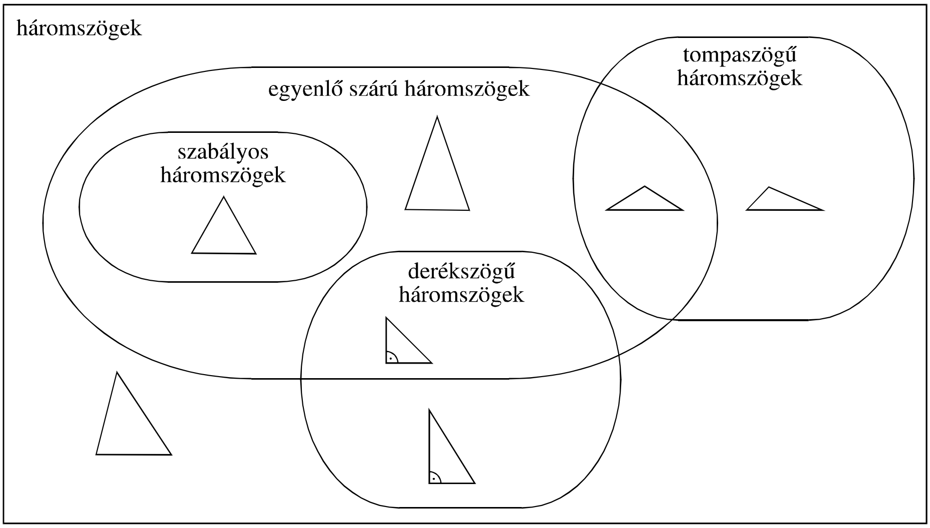


2214. *a)* igaz *b)* hamis *c)* igaz *d)* igaz *e)* igaz *f)* igaz

2215.

Háromszög	3 különböző oldala van	2 oldala egyenlő	Minden oldala egyenlő
Minden szöge hegyesszög			
Van derékszöge			–
Van tompaszöge			–

2216.



2217. Konvexek: 1., 6.
Nem konvexek: 2., 3., 4., 5., 7., 8.

2218. *a)* igaz *b)* hamis *c)* igaz *d)* hamis *e)* hamis *f)* hamis
g) hamis *h)* igaz *i)* hamis *j)* igaz

2219. Csak a páros oldalszámú szabályos sokszögeknek van szimmetria-középpontja.

2220. Szimmetria-átlója csak a páros oldalszámú szabályos sokszögeknek van, egy $2n$ oldalú szabályos sokszögnek n db.

2221. Az n oldalú konvex sokszög $n - 2$ megfelelő háromszögre bontható.

2222. A válasz ugyanaz, mint az előző feladatnál.

2223. Az n oldalú konvex sokszög egy csúcsából $n - 3$ átló húzható.

2224. Ha egy konvex sokszög egy csúcsából n átló húzható, akkor a sokszög oldalszáma $n + 3$.

2225. Ha egy konvex sokszöget az egy csúcsból húzható átlók n háromszögre bontanak, akkor a sokszög oldalszáma $n + 2$.

2226. Az n oldalú konvex sokszög belső szögeinek összege $(n - 2) \cdot 180°$.

a) 180° *b)* 360° *c)* 720° *d)* 900° *e)* 1080° *f)* 1260°
g) 1980° *h)* 3240° *i)* 5940°

2227. Bármely n oldalú sokszög belső szögeinek összege $(n - 2) \cdot 180°$.

a) 360° *b)* 540° *c)* 900° *d)* 1260° *e)* 1800° *f)* 2340°
g) 3060°

2228. Bármely konvex sokszög külső szögeinek összege 360°.

2229. Az n oldalú szabályos sokszög egy belső szöge $\frac{(n-2)\cdot 180°}{n}$.

a) 60° *b)* 90° *c)* 108° *d)* 120° *e)* ≈ 128,57° *f)* 135°
g) 144° *h)* 160° *i)* 162°

2230. A középponti háromszögek szárszöge: $\frac{360°}{n}$.

A középponti háromszögek alapon fekvő szöge a belső szög fele, azaz $\frac{(n-2)\cdot 90°}{n}$.

Jelölje α a középponti háromszögek szárszögét, β az alapon fekvő szöget.

a) $\alpha = 120°$, $\beta = 30°$ *b)* $\alpha = 90°$, $\beta = 45°$ *c)* $\alpha = 72°$, $\beta = 54°$
d) $\alpha = 60°$, $\beta = 60°$ *e)* $\alpha = 36°$, $\beta = 72°$ *f)* $\alpha \approx 27{,}7°$, $\beta \approx 76{,}15°$
g) $\alpha = 20°$, $\beta = 80°$ *h)* $\alpha \approx 17{,}14°$, $\beta \approx 81{,}43°$ *i)* $\alpha = 12°$, $\beta = 84°$

2231. Jelölje α a középponti szöget, ekkor a sokszög oldalszáma: $n = \frac{360°}{\alpha}$.

Jelölje β a sokszög belső szögét.

a) $n = 3$, $\beta = 60°$, szögösszeg: 180° *b)* $n = 4$, $\beta = 90°$, szögösszeg: 360°
c) $n = 5$, $\beta = 108°$, szögösszeg: 540° *d)* $n = 6$, $\beta = 120°$, szögösszeg: 720°
e) $2n$, $\beta = \frac{(2n-2)\cdot 180°}{2n} = \frac{(n-1)\cdot 180°}{n}$, szögösszeg: $(n-1)\cdot 360°$

A külső szögek összege mindegyik esetben 360°.

2232. Ha β a külső szög és α a megfelelő belső szög, akkor $\alpha = 180° - \beta$.

Ha a sokszög n oldalú, akkor $n = \frac{360°}{\beta}$.

A belső szögek összege $(n-2)\cdot 180°$, az átlók száma pedig $N = \frac{n(n-3)}{2}$.

a) $\alpha = 60°$, $n = 3$, $N = 0$, szögösszeg: 180°
b) $\alpha = 90°$, $n = 4$, $N = 2$, szögösszeg: 360°
c) $\alpha = 120°$, $n = 6$, $N = 9$, szögösszeg: 720°
d) $\alpha = 150°$, $n = 12$, $N = 54$, szögösszeg: 1800°
e) $\alpha = 156°$, $n = 15$, $N = 90$, szögösszeg: 2340°
f) $\alpha = 168°$, $n = 30$, $N = 405$, szögösszeg: 5040°
g) $\alpha = 174°$, $n = 60$, $N = 1710$, szögösszeg: 10440°
h) $\alpha = \frac{(n-1)\cdot 180°}{n}$, $2n$, $N = n(2n-3)$, szögösszeg: $(n-1)\cdot 360°$

2233. Az n oldalú szabályos sokszögnek $\frac{n(n-3)}{2}$ átlója van.

a) 0 *b)* 2 *c)* 5 *d)* 9 *e)* 27 *f)* 44
g) 135 *h)* 189 *i)* 527

2234. Az átlók száma ugyanaz, mint az előző feladatban.
a) 2 *b)* 5 *c)* 9 *d)* 14 *e)* 35 *f)* 65
g) 135 *h)* 230 *i)* 527

2235. Ha a belső szögek összege fokokban mérve *S*, akkor $n = \dfrac{S° + 360°}{180°}$.
a) 3 *b)* 4 *c)* 5 *d)* 8 *e)* 11 *f)* 15
g) 19 *h)* 22 *i)* 27 *j)* 33

2236. A szögösszeg $n \cdot 180°$, ahol *n* a háromszögek száma.

2237. Ha a sokszög egy csúcsából *n* átló húzható, akkor a létrejövő háromszögek száma $n + 1$, így a szögösszeg $(n + 1) \cdot 180°$.

2238. Figyelembe véve a 2236. feladat eredményét, ha a háromszögek száma *n*, akkor egy belső szög: $\dfrac{n \cdot 180°}{n+2}$.
a) 90° *b)* 108° *c)* 120° *d)* ≈ 128,57° *e)* 140° *f)* 150°
g) ≈ 158,82° *h)* $163{,}\dot{6}\dot{3}°$ *i)* $169{,}\dot{0}\dot{9}°$

2239. Figyelembe véve a 2237. feladat eredményét, ha az egy csúcsból húzható átlók száma *n*, akkor egy belső szög: $\dfrac{(n+1) \cdot 180°}{n+3}$.
a) 90° *b)* 108° *c)* 120° *d)* ≈ 128,57° *e)* 144° *f)* 150°
g) ≈ 154,29° *h)* 162° *i)* 165,6°

2240. Ha a szögösszeg α-nál nagyobb és β-nál kisebb, akkor

$$\alpha < (n - 2) \cdot 180° < \beta,$$

amiből

$$\frac{\alpha}{180°} + 2 < n < \frac{\beta}{180°} + 2 \quad (n \text{ pozitív egész szám})$$

a sokszög oldalszáma.
a) 3 *b)* 4 *c)* 5 *d)* 6 *e)* 9 *f)* 17
g) Több lehetőségünk van, *n* lehet: 14; 15; 16; 17; 18.

2241. Ha egy belső szög α-nál nagyobb és β-nál kisebb, akkor a sokszög *n* oldalszámára nézve:

$$\alpha < \frac{(n-2) \cdot 180°}{n} < \beta.$$

A két egyenlőtlenséget külön-külön alakítva, és felhasználva, hogy $\alpha < 180°$ és $\beta < 180°$, kapjuk, hogy

$$\frac{360°}{180°-\alpha} < n < \frac{360°}{180°-\beta}.$$

a) Két lehetőség van, n lehet: 3; 4. *b)* Két lehetőség van, n lehet: 4; 5.
c) Két lehetőség van, n lehet: 6; 7. *d)* Egy lehetőség van, $n = 8$.
e) Kilenc lehetőségünk van, $9 \leqq n \leqq 17$. *f)* Nem lehetséges.

2242. Az n oldalú sokszög átlóinak a száma $\frac{n(n-3)}{2}$. Ha a sokszögnek k-szor annyi átlója van, mint oldala, akkor

$$k \cdot n = \frac{n(n-3)}{2}.$$

Ebből

$$n = 2k + 3.$$

a) 5 *b)* 7 *c)* 9 *d)* 11 *e)* 17 *f)* 23
g) 33
Megjegyzés: n ilyen feltételek mellett mindig páratlan.

2243. Ha α jelöli a legkisebb szöget és a sokszög oldalszáma n, akkor

$$\alpha + (\alpha + 5°) + (\alpha + 2 \cdot 5°) + ... + (\alpha + (n - 1) \cdot 5°) = (n - 2) \cdot 180°.$$

Felhasználva, hogy az első $n - 1$ pozitív egész összege $\frac{n(n-1)}{2}$, kapjuk, hogy

$$n \cdot \alpha + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 5° = (n-2) \cdot 180°.$$

Ebből

$$\alpha = \frac{n-2}{n} \cdot 180° - \frac{n-1}{2} \cdot 5°$$

a) A legkisebb szög: $\alpha = 82,5°$, a legnagyobb szög: 97,5°.
b) A legkisebb szög: $\alpha = 98°$, a legnagyobb szög: 118°.
c) A legkisebb szög: $\alpha \approx 128,57°$, a legnagyobb szög: $\approx 158,57°$.
d) A legkisebb szög: $\alpha = 120°$, a legnagyobb szög: 160°.
e) A legkisebb szög: $\alpha = 122,5°$, a legnagyobb szög: 177,5°.
f) A legkisebb szög: $\alpha = 114,5°$, a legnagyobb szög: 209,5°.
Az utóbbi esetben a sokszögnek 6 konkáv szöge van.

Sokszögek szögei

2244. A külső szögek összege mindig 360°, így ha n a sokszög oldalszáma, és a belső szögösszeg k-szor akkora, mint a külső, akkor

$$(n - 2) \cdot 180° = k \cdot 360°,$$

amiből

$$n = 2(k + 1).$$

a) 6 *b)* 8 *c)* 12 *d)* 22 *e)* 28

Megjegyzés: n ilyen feltételek mellett mindig páros.

2245. Jelölje α', β', γ' a megfelelő külső szögeket, γ a harmadik belső szöget.

a) $\gamma = 67°$, $\alpha' = 127°$, $\beta' = 120°$, $\gamma' = 113°$

b) $\gamma = 58°$, $\alpha' = 168°$, $\beta' = 70°$, $\gamma' = 122°$

c) $\gamma = 90°$, $\alpha' = 150°$, $\beta' = 120°$, $\gamma' = 90°$

d) $\gamma = 140°$, $\alpha' = \beta' = 160°$, $\gamma' = 40°$

e) Nem lehetséges. ($96° + 85° > 180°$).

f) $\gamma = 9°$, $\alpha' = 179°$, $\beta' = 10°$, $\gamma' = 171°$

2246. *a)* $\beta = 30°$, $\alpha' = 120°$, $\beta' = 150°$, $\gamma' = 90°$

b) $\alpha = 105°$, $\gamma = 35°$, $\beta' = 140°$, $\gamma' = 145°$

c) $\beta = 138°22'$, $\gamma = 2°22'$, $\alpha' = 140°44'$, $\gamma' = 177°38'$

d) $\gamma = 70°$, $\beta = 20°$, $\alpha' = 90°$, $\beta' = 160°$

e) $\alpha = 57°29'$, $\beta = 115°44'$, $\gamma = 6°47'$, $\gamma' = 173°13'$

f) Nem lehetséges.

g) Mivel $73°11' + 106°49' = 180°$, ezért β szabadon választható és $\gamma = 106°49' - \beta$.

h) $\gamma = 108°28'43''$, $\beta = 6°14'32''$, $\alpha' = 114°43'15''$, $\beta' = 173°45'28''$

2247. *a)* $\gamma = 40°$, $\alpha' = 135°$, $\beta' = 85°$

b) $\alpha' = 143°$, $\beta = 102°$, $\gamma = 41°$

c) $\alpha = 67°$, $\beta = 48°$, $\gamma = 65°$

d) Nem lehetséges, ugyanis $\alpha + \beta + \gamma = 179°59'$.

e) Nem lehetséges, ugyanis $\alpha' \neq \beta + \gamma$.

f) Nem lehetséges, ugyanis $\beta = 45°44'$ lenne, viszont ezzel $\alpha' \neq \beta + \gamma$.

2248. *a)* A háromszög szabályos.

b) $\alpha = 30°$, $\gamma = 105°$.
A b oldal egyik végpontjába az α, másik végpontjába a β szöget felvéve adódik a harmadik csúcs.
A szögek szerkesztésére nézve lásd a 2144. feladatot!

c) Két oldal és a közbezárt szög adott, így a b oldalra egyik csúcsához felmérve α-t, majd a másik szögszárra felmérve c-t adódik a harmadik csúcs.

d) $\gamma = 60°$. Lásd az előző alpontot!

e) A háromszög nem szerkeszthető, mivel $a + b < c$.

f) A háromszög csak hasonlóság erejéig meghatározott, ezért egy tetszőleges szakaszra egyik végpontjába az α, másik végpontjába a β szöget felmérve adódik egy megfelelő háromszög. A szögek szerkesztésére nézve lásd a 2144-2145. feladatot!

g) $\beta = 75°$. Lásd az előző alpontot!

h) $\alpha = 45°$, $\beta = 60°$. Lásd a *b)* alpontot!

2249. Legyenek a háromszög szögei rendre α, β, γ.

(1) $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{p}{q} \rightarrow \beta = \alpha \cdot \frac{q}{p}$ (2) $\alpha + 10° = \gamma$

Felírva a háromszög belső szögeinek összegét:

$$180° = \alpha + \beta + \gamma = \alpha + \alpha\frac{q}{p} + \alpha + 10° = \alpha \cdot \left(2 + \frac{q}{p}\right) + 10°$$

Ebből $\alpha = \frac{170°}{2 + \frac{q}{p}} = \frac{170° \cdot p}{2p + q}$.

a) $p = 2$, $q = 3$

$\alpha = 48\frac{4}{7}° \approx 48{,}57°$, $\gamma = 58\frac{4}{7}° \approx 58{,}57°$, $\beta = 72\frac{6}{7}° \approx 72{,}86°$

$\alpha' \approx 131{,}43°$, $\gamma' \approx 121{,}43°$, $\beta' \approx 107{,}14°$

b) $p = 4$, $q = 5$

$\alpha \approx 52{,}31°$, $\gamma \approx 62{,}31°$, $\beta \approx 65{,}38°$

$\alpha' \approx 127{,}69°$, $\gamma' \approx 117{,}69°$, $\beta' \approx 114{,}62°$

c) $p = 5$, $q = 7$

$\alpha = 50°$, $\gamma = 60°$, $\beta = 70°$

$\alpha' = 130°$, $\gamma' = 120°$, $\beta' = 110°$

2250. $\alpha = 50°$, így $\beta + \gamma = 130°$. Ha $\beta : \gamma = p : q$, akkor

$$\beta = \frac{p}{p+q} \cdot 130° \quad \text{és} \quad \gamma = \frac{q}{p+q} \cdot 130°.$$

a) $\beta = 52°$, $\gamma = 78°$

$\beta' = 128°$, $\gamma' = 102°$

b) $\beta = 48{,}75°$, $\gamma = 81{,}25°$

$\beta' = 131{,}25°$, $\gamma' = 98{,}75°$

c) $\beta = 59{,}\dot{0}\dot{9}°$, $\gamma = 70{,}\dot{9}\dot{0}°$

$\beta' = 120{,}\dot{9}\dot{0}°$, $\gamma' = 109{,}\dot{0}\dot{9}°$

d) $\beta = 54{,}1\dot{6}°$, $\gamma = 75{,}8\dot{3}°$

$\beta' = 125{,}8\dot{3}°$, $\gamma' = 104{,}1\dot{6}°$

2251. Csak a belső szögeket határozzuk meg. A külső szögek meghatározására nézve lásd pl. a 2245. feladatot!

Ha $\alpha : \beta : \gamma = p : q : r$, akkor

$$\alpha = \frac{p}{p+q+r} \cdot 180°, \quad \beta = \frac{q}{p+q+r} \cdot 180°, \quad \gamma = \frac{r}{p+q+r} \cdot 180°.$$

a) $\alpha = 30°$, $\beta = 60°$, $\gamma = 90°$

b) $\alpha = 45°$, $\beta = 60°$, $\gamma = 75°$

c) $\alpha \approx 38{,}57°$, $\beta \approx 64{,}29°$, $\gamma \approx 77{,}14°$

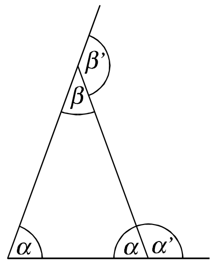
d) $\alpha = 45°$, $\beta = 56{,}25°$, $\gamma = 78{,}75°$

e) $\alpha = 30°$, $\beta = 70°$, $\gamma = 80°$

2252. Legyenek a háromszög belső szögei α, β, γ. Legyen $\alpha = 35°17'$ és $\gamma = \beta + 18°3'$. Ekkor $\beta + \gamma = 2\beta + 18°3' = 180° - \alpha = 144°43'$. Ebből $\beta = 63°20'$, és így $\gamma = 81°23'$. A megfelelő külső szögek: $\alpha' = 144°43'$, $\beta' = 116°40'$, $\gamma' = 98°37'$.

2253. Nincs ilyen háromszög, hiszen $\alpha+\beta=\gamma$ ’, a feladat feltételei alapján viszont $\alpha+\beta=5\gamma$’.

2254. A feladat tulajdonképpen két feladat, ugyanis a külső szög lehet az alapon fekvő szögek külső szöge, és lehet a szárak által bezárt szög külső szöge.



1. eset: β’ adott.

Ekkor

$$\beta=180°-\beta’,$$

$$\alpha=\frac{\beta’}{2},$$

$$\alpha’=180°-\alpha=180°-\frac{\beta’}{2}.$$

a) $\beta=144°$, $\alpha=18°$, $\alpha’=162°$ *b)* $\beta=136°$, $\alpha=22°$, $\alpha’=158°$
c) $\beta=117°$, $\alpha=31{,}5°$, $\alpha’=148{,}5°$ *d)* $\beta=100°$, $\alpha=40°$, $\alpha’=140°$
e) $\beta=88°$, $\alpha=46°$, $\alpha’=134°$ *f)* $\beta=70°$, $\alpha=55°$, $\alpha’=125°$
g) $\beta=60°$, $\alpha=60°$, $\alpha’=120°$

2. eset: α’ adott.

Ekkor

$$\alpha=180°-\alpha’,$$

$$\beta=180°-2\alpha=\alpha’-\alpha,$$

$$\beta’=180°-\beta=2\alpha.$$

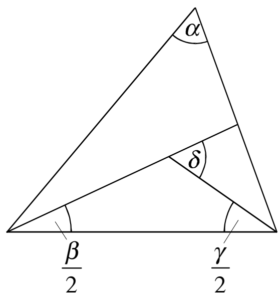
Mivel α hegyesszög, ezért most csak az *e), f), g)* esetek lehetségesek.

e) $\alpha=88°$, $\beta=4°$, $\beta’=176°$ *f)* $\alpha=70°$, $\beta=40°$, $\beta’=140°$
g) $\alpha=60°$, $\beta=60°$, $\beta’=120°$

2255. α adott, δ-t keressük.

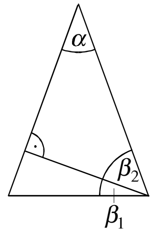
$$\delta=\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}=\frac{\beta+\gamma}{2}=\frac{180°-\alpha}{2}$$

a) 72° *b)* 67,5° *c)* 60°
d) 40° *e)* 30°
f) $\frac{5\pi}{12}=75°$



2256. α adott, β_1-et és β_2-őt keressük.

1. eset: A háromszög hegyesszögű ($\alpha < 90°$).



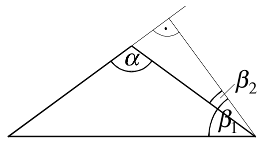
$$\beta_1 = \frac{\alpha}{2}, \quad \beta_2 = 90° - \alpha$$

a) $\beta_1 = 5°$, $\beta_2 = 80°$ *b)* $\beta_1 = 12{,}5°$, $\beta_2 = 65°$

c) $\beta_1 = 15°$, $\beta_2 = 60°$ *d)* $\beta_1 = 22{,}5°$, $\beta_2 = 45°$

e) $\beta_1 = 30°$, $\beta_2 = 30°$ *h)* $\beta_1 = \frac{5\pi}{24} = 37{,}5°$, $\beta_2 = \frac{\pi}{12} = 15°$

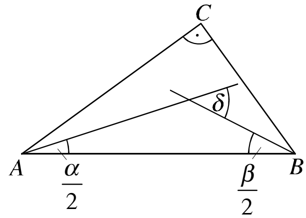
2. eset: A háromszög tompaszögű.



$$\beta_1 = \frac{\alpha}{2}, \quad \beta_2 = \alpha - 90°$$

f) $\beta_1 = 50°$, $\beta_2 = 10°$ *g)* $\beta_1 = 60°$, $\beta_2 = 30°$

2257. $\delta = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 45°$

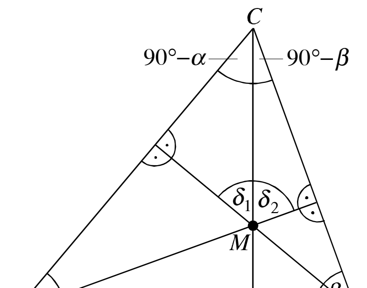


2258. Az *a)* és a *b)* eset hegyesszögű, a *c)* eset tompaszögű háromszöget eredményez. Mivel a magasságvonalak metszéspontja hegyesszögű esetben a háromszögön belül, míg tompaszögű esetben a háromszögön kívül van, ezért külön tárgyaljuk a két esetet.

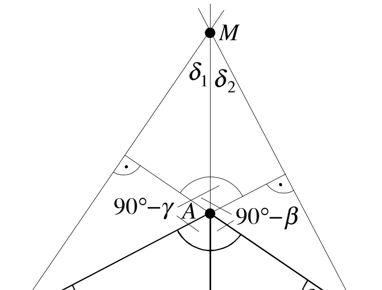
Célunk δ_1 és δ_2 meghatározása. A létrejövő derékszögű háromszögek miatt (lásd a 2258/1. ábrát) $\delta_1 = \alpha$ és $\delta_2 = \beta$.

a) $\delta_1 = 45°$, $\delta_2 = 80°$

b) $\delta_1 = 22{,}5°$, $\delta_2 = 82{,}5°$



2258/1. ábra



2258/2. ábra

A létrejövő derékszögű háromszögek és az *A* pontnál kialakuló csúcsszögek egyenlősége alapján (lásd a 2258/2. ábrát) $\delta_1 = \beta$ és $\delta_2 = \gamma$.

c) $\delta_1 = 60°$, $\delta_2 = 15°$

Megjegyzés: Természetesen indokolhattunk volna mindkét esetben a merőleges szárú szögek egyenlőségének figyelembevételével is.

2259. Tekintsük a 2255. feladat ábráját! Ott azt kaptuk, hogy $\delta = 90° - \frac{\alpha}{2}$. Nyilván $180° - \delta = 90° + \frac{\alpha}{2}$.

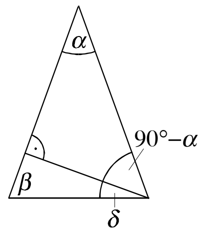
2260. A 2256. feladatban kaptuk, hogy az α szárszögű egyenlő szárú háromszögben az egyik szárral alkotott magasság a másik szárral hegyesszögű háromszög esetén $90° - \alpha$, míg tompaszögű háromszög esetén $\alpha - 90°$ nagyságú szöget zár be. Jelölje δ a feladatban megadott különbség(ek)et.

Hegyesszögű eset: A 2260/1. ábrán jól látható, hogy $\beta = 90° - \delta$, és így $\alpha = 2\delta$ ($\delta < 45°$).

a) $\beta = 80°$, $\alpha = 20°$ *b)* $\beta = 76°$, $\alpha = 28°$

c) $\beta = 70°$, $\alpha = 40°$ *d)* $\beta = 67°29'$, $\alpha = 45°2'$

e) $\beta = 62°$, $\alpha = 56°$



2260/1. ábra

Tompaszögű eset: A feltétel alapján

$$\beta - \delta = \alpha - 90°.$$

Felhasználva, hogy

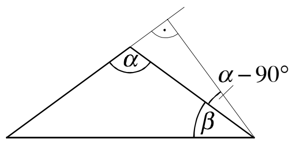
$$\alpha = 180° - 2\beta,$$

kapjuk

$$\beta - \delta = 180° - 2\beta - 90° = 90° - 2\beta.$$

Ebből

$$\beta = \frac{90° + \delta}{3}.$$



2260/2. ábra

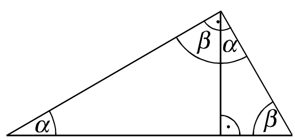
Teljesülnie kell a $90° < \alpha$ feltételnek, amiből $\beta < 45°$, azaz $\frac{90° + \delta}{3} < 45°$, ahonnan $\delta < 45°$.

a) $\beta = 33{,}\dot{3}°$, $\alpha = 113{,}\dot{3}°$ *b)* $\beta = 34{,}\dot{6}°$, $\alpha = 110{,}\dot{6}°$

c) $\beta = 36{,}\dot{6}°$, $\alpha = 106{,}\dot{6}°$ *d)* $\beta \approx 37°30'$, $\alpha \approx 105°$

e) $\beta = 39{,}\dot{3}°$, $\alpha = 101{,}\dot{3}°$

2261. Az ábrán látható, hogy az átfogóhoz tartozó magasság a derékszöget a két hegyesszöggel egyenlő szögekre bontja.



a) 15°, 75° *b)* 22°, 68°

c) 36°, 54° *d)* 45°, 45°

e) 60°, 30° *f)* 79°, 11°

2262. A két szögfelező által bezárt δ szögre nézve $\delta = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}$. (Lásd még a 2255. feladatot!)

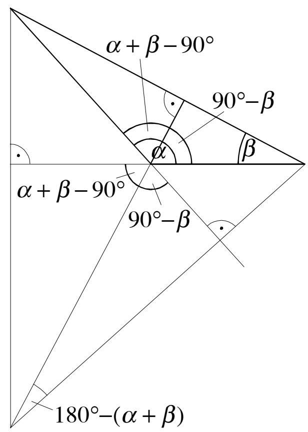
a) 39° *b)* 45° *c)* 62°15’ *d)* 39°44’30” *e)* 65°

A magasságvonalak szögét az egyes esetekben külön kell vizsgálni, attól függően, hogy a konkrét szögek mekkorák.

Az *a)* és a *d)* esetben a γ szög tompaszög. Ekkor a 2258. feladat alapján a megfelelő magasságvonalak szöge $\alpha + \beta$. *a)* 78°; *d)* 79°29’.

A *b)* esetben a magasságvonalak a befogók egyenesei, így szögük 90°. (Itt is $\alpha + \beta = 90°$.)

A *c)* és az *e)* esetben az egyik adott szög a tompaszög. A magasságvonalak meghúzásával létrejövő derékszögű háromszögek, és a csúcsszögek egyenlősége alapján a keresett szög $180° - (\alpha + \beta)$. *c)* 55,5°; *e)* 50°.



2263. *a)* A 2255. és a 2262. feladat alapján $\delta = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}$.

b) Mivel az egy csúcsból kiinduló belső és külső szögfelező derékszöget zár be egymással, ezért a külső szögfelezők szöge is $\delta = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}$.

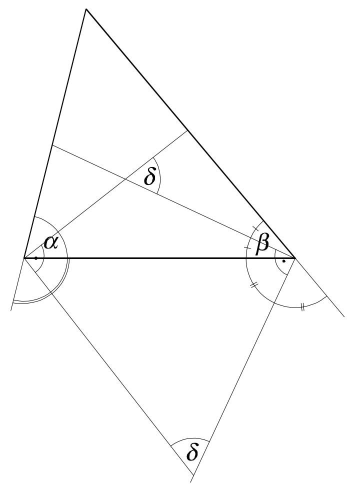
c) A 2258. és a 2262. feladat alapján:

– Ha $\alpha + \beta < 90°$, akkor $\delta = \alpha + \beta$.

– Ha $\alpha + \beta = 90°$, akkor $\delta = 90°$.

– Ha $\alpha + \beta > 90°$, akkor $\delta = 180° - (\alpha + \beta)$.

Megjegyzés: Itt is és a korábbi feladatoknál is két egyenes hajlásszögén a kisebbik szöget értettük.

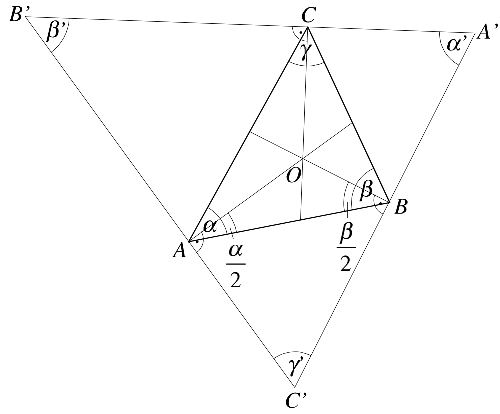


2264. Legyen α az adott szög és δ (< 90°) a két belső szögfelező által bezárt szög. (A másik belső szögfelező induljon a β szög csúcsából.) Csak az ismeretlen belső szögeket határozzuk meg.

a) $\delta = 80°$, $\beta = 2\delta - \alpha = 104°$, $\gamma = 40°$ *b)* Nem lehetséges.

c) $\delta = 74°$, $\beta = 92°$, $\gamma = 32°$ *d)* $\delta = 55°$, $\beta = 54°$, $\gamma = 70°$

e) $\delta = 50°$, $\beta = 44°$, $\gamma = 80°$ *f)* $\delta = 40°$, $\beta = 24°$, $\gamma = 100°$



2265. Jelölje α', β', γ' a külső szögfelezők által meghatározott háromszög belső szögeit az ábrának megfelelően.

A γ szöget határozzuk meg, a többi teljesen hasonlóan adódik.

$$AOB\sphericalangle = 180° - \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right)$$

Mivel $OAC'\sphericalangle = OBC'\sphericalangle = 90°$, ezért $\gamma' + AOB\sphericalangle = 180°$, ahonnan

$$\gamma' = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}$$

Hasonlóan adódik, hogy $\alpha' = \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}$ és $\beta' = \frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2}$.

a) $\alpha' = 70°$, $\beta' = 40°$, $\gamma' = 70°$

b) $\alpha' = \beta' = \gamma' = 60°$

c) $\alpha' = 75°$, $\beta' = 60°$, $\gamma' = 45°$

d) $\alpha' = 77°$, $\beta' = 68°$, $\gamma' = 35°$

e) $\alpha' = 73{,}5°$, $\beta' = 46{,}5°$, $\gamma' = 60°$

2266. Több esetet kell vizsgálnunk.

1. $\alpha < 90°$, $\beta < 90°$.

Ekkor a γ-hoz tartozó magasság is a háromszög belsejében van, így a 2266/1. ábra alapján

$$\delta = \frac{\gamma}{2} - (90° - \beta) = (90° - \alpha) - \frac{\gamma}{2}.$$

Itt $\beta > \alpha$, de a kétféle kifejezés egyesíthető:

$$\delta = \left|\alpha + \frac{\gamma}{2} - 90°\right| = \left|\beta + \frac{\gamma}{2} - 90°\right|$$

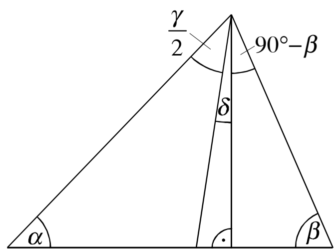
.

Mivel $\frac{\gamma}{2} = 90° - \frac{\alpha + \beta}{2}$, ezért

$$\delta = \left|\frac{\alpha - \beta}{2}\right| = \frac{|\alpha - \beta|}{2}.$$

Ennek az esetnek felelnek meg az *a)*, *b)*, *c)* alpontok.

a) $\delta = 11°$ *b)* $\delta = 15°$ *c)* $\delta = 0°$



2266/1. ábra

2. α és β közül valamelyik tompaszög. Legyen $\alpha > 90°$. Ekkor a 2266/2. ábra alapán

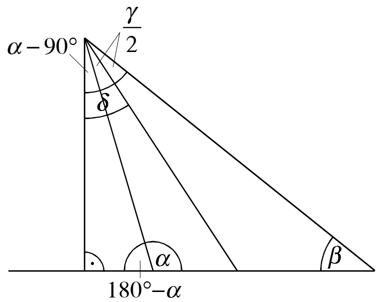
$$\delta = \alpha - 90° + \frac{\gamma}{2}.$$

Fejezzük ki $\frac{\gamma}{2}$-t α-val és β-val, írjuk be az előző kifejezésbe, majd vonjunk össze. Kapjuk

$$\delta = \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Eredményünk ugyanaz, mint az 1. esetnél. Ennek az esetnek felelnek meg a *d)* és *e)* alpontok.

d) $\delta = 42°$ *e)* $\delta = 57°$



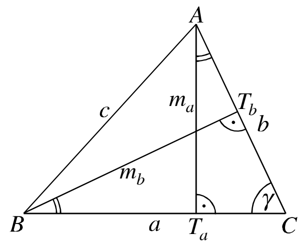
2266/2. ábra

2267. Három esetet különböztetünk meg.

1. eset: A háromszög hegyesszögű.

Jelölje T_a az a-hoz tartozó, T_b a b-hez tartozó magasság talppontját. Az AT_aC és a BT_bC háromszögek olyan derékszögű háromszögek, amelyeknek egyik hegyesszögük γ. Ebből adódóan

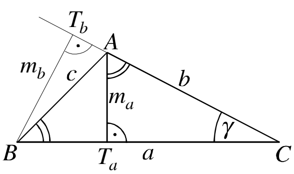
$$T_bBC\sphericalangle = T_aAC\sphericalangle = 90° - \gamma.$$



2267/1. ábra

2. eset: A háromszög tompaszögű és a a leghosszabb oldal.

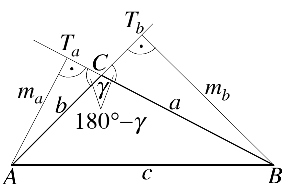
Itt is $T_bBC\sphericalangle = T_aAC\sphericalangle = 90° - \gamma$. (Az indoklás ugyanaz, mint az előző esetnél.)



2267/2. ábra

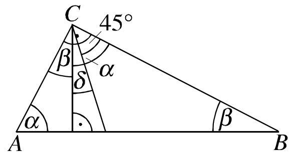
3. eset: A háromszög tompaszögű, valamint a és b a két rövidebbik oldal.

$T_aCA\sphericalangle = T_bCB\sphericalangle = 180° - \gamma$ (csúcsszögek), így $T_aAC\sphericalangle = T_bBC\sphericalangle = \gamma - 90°$.

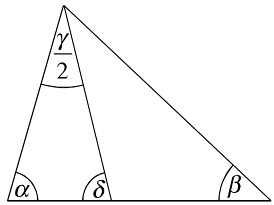


2267/3. ábra

2268. Az ábrán látható, hogy $\delta = 45° - \beta = \alpha - 45°$.



2269. Jelölje δ a kisebbik szöget. Ekkor



$$\delta = 180° - \alpha - \frac{\gamma}{2} = 180° - \alpha -$$

$$-\left(90° - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}\right) = 90° - \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Itt most az ábrán $\alpha > \beta$ teljesül. Az összefüggés ettől függetleníthető:

$$\delta = 90° - \frac{|\alpha - \beta|}{2}.$$

a) $\delta = 77°$ *b)* $\delta = 65°18'30''$

c) $\delta = 45{,}5°$ *d)* $\delta = 60°$

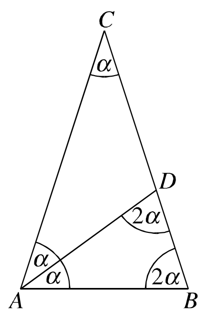
e) $\delta = 90°$ *f)* $\delta = 45°$

2270. Az előző feladat alapján a két szög különbsége:

$$\left(90° + \frac{|\alpha - \beta|}{2}\right) - \left(90° - \frac{|\alpha - \beta|}{2}\right) = |\alpha - \beta|.$$

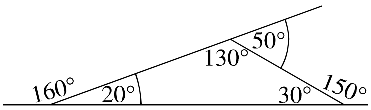
2271. A feltételek alapján a két részháromszög derékszögű, így az eredeti háromszög egyenlő szárú derékszögű háromszög.

2272. Jelölje α az alapon fekvő szög felét. Ekkor mivel $AD = AB$, ezért $ABD\sphericalangle = BOA\sphericalangle = 2\alpha$. Így $\alpha + 2\alpha + 2\alpha = 180°$, amiből $\alpha = 36°$. A háromszög szögei 72°, 72°, 36°.

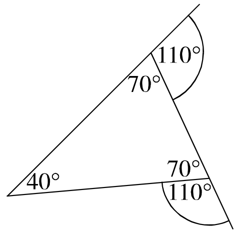


2273. Az előző feladat esetében $AD = DC$ is teljesül, ugyanis $ACB\sphericalangle = \alpha = 36°$.

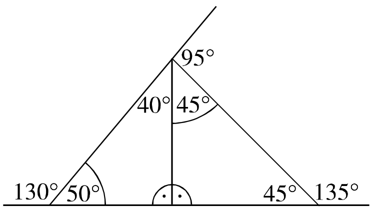
2274. *a)*



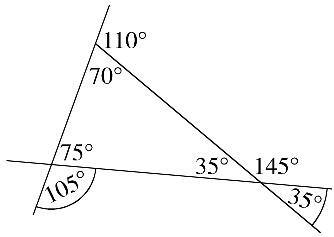
b)



c)



d)



2275. *a)* A 2263. feladat *a)* pontja alapján, ha $\frac{\gamma}{2}=\sphericalangle$ és $\frac{\beta}{2}=\sphericalangle$, akkor

$$\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}=58°,$$
$$\beta+\gamma=116°,$$

így $\alpha = 180° - (\beta + \gamma) = 64°$.

b) Ha $\frac{\alpha}{2}=\sphericalangle$ és $\frac{\beta}{2}=\sphericalangle$, akkor

$$\alpha+\beta=180°–72°=108°$$
$$\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}=54°,$$

így $\delta = 54°$.

c) $\beta = 90° - 35° = 55°$, $\delta = 35°$. A két magasság által létrehozott derékszögű háromszögek hegyesszögei közötti kapcsolat, a háromszög külső szögére vonatkozó tétel és a csúcsszögek egyenlősége miatt a háromszög belső szögeinek összege:

$$35° + (\beta + \gamma) + (\beta + (\delta - \gamma)) = 180°.$$

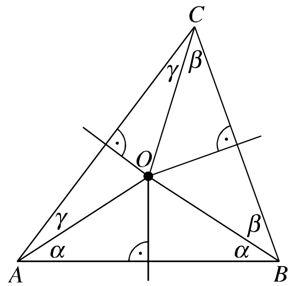
Rendezve γ kiesik, ami azt jelenti, hogy γ-t bizonyos határok között szabadon választhatom, β és δ értéke viszont meghatározott.

d) $\gamma = \frac{180°–100°}{2} = 40°$.

$$\delta + 100° + (180° - 2 \cdot 20°) = 360°,$$

ahonnan $\delta = 120°$, és így $\alpha = 30°$.

2276. A kijelölt O pont a háromszög oldalfelező merőlegeseinek metszéspontja, a háromszög köré írható kör középpontja. Ennélfogva az ABO, BCO és CAO háromszögek egyenlő szárúak. Jelölje most a szokásostól eltérően ezen háromszögek alapon fekvő szögeit rendre α, β és γ. Ezzel a jelöléssel $\alpha + \beta + \gamma = 90°$. $AOB\sphericalangle = 180° - 2\alpha = 180° - 2(90° - \beta - \gamma) = 2(\beta + \gamma)$. A BOC és az AOC szögekre hasonlóan adódik, hogy az állítás igaz.



2277. *a)* $2\gamma + \delta = 180° \Rightarrow \gamma = 50°$

$\gamma = 2\alpha \Rightarrow \alpha = 25°$

$\alpha + \beta + \gamma + (180° - 2\beta) = 180° \Rightarrow \beta = \alpha + \gamma = 75°$

$\varepsilon = 180° - (\alpha + \beta) = 80° = \delta$

b) $\gamma = 45°$, $\alpha = 22{,}5°$, $\beta = 67{,}5°$, $\varepsilon = 90°$

c) $\gamma = 35°$, $\alpha = 17{,}5°$, $\beta = 52{,}5°$, $\varepsilon = 110°$

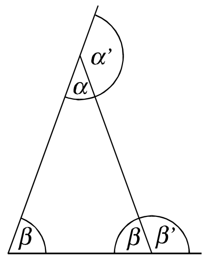
2278. A feladat feltételének megfelelő összeg képzésére 4 lehetőségünk van:

(1) $\alpha' + \alpha + \beta$

(2) $\alpha' + 2\beta$

(3) $\beta' + \alpha + \beta$

(4) $\beta' + 2\beta$



a) (1) $\beta = 30°$, $\alpha = 120°$ (2) $210° + 2\alpha = 360° \Rightarrow \alpha = 75°$, $\beta = 52{,}5°$

(3) $\alpha = 30°$, $\beta = 75°$ (4) $\beta = 30°$, $\alpha = 120°$

b) (1) $\beta = 56°$, $\alpha = 68°$ (2) $\alpha = 62°$, $\beta = 59°$

(3) $\alpha = 56°$, $\beta = 62°$ (4) $\beta = 56°$, $\alpha = 68°$

c) (1) $\beta = 80°$, $\alpha = 20°$ (2) $\alpha = 50°$, $\beta = 65°$

(3) $\alpha = 80°$, $\beta = 50°$ (4) $\beta = 80°$, $\alpha = 20°$

d) (1) Nem lehetséges. (2) $\alpha = 30°$, $\beta = 75°$

(3) $\alpha = 120°$, $\beta = 30°$ (4) Nem lehetséges.

Megjegyzés: (1) és (4) ugyanazokat a szögeket szolgáltatja, ezért három lényegesen különböző eset van.

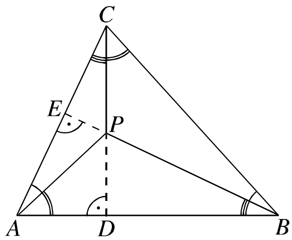
2279. $\alpha = \gamma + \omega \Rightarrow \omega = 30°$

$\beta = \delta + \omega \Rightarrow \delta = 30°$

$\gamma = \varepsilon + \delta \Rightarrow \varepsilon = 50°$

Kihasználtuk a csúcsszögek egyenlőségét és a háromszög külső szögére vonatkozó tételt.

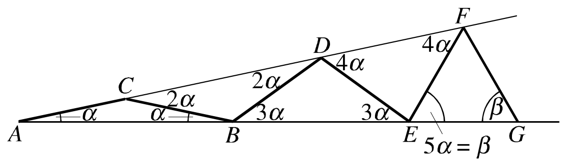
2280. Igaz. Mivel $2(\sphericalangle + \sphericalangle\!\!\sphericalangle + \sphericalangle\!\!\sphericalangle\!\!\sphericalangle) = 180°$, ezért $\sphericalangle + \sphericalangle\!\!\sphericalangle + \sphericalangle\!\!\sphericalangle\!\!\sphericalangle = 90°$. CP-t P-n túl az AB szakaszig meghosszabbítva kapjuk a D pontot. A szögekre megállapított fenti összefüggés miatt $ADC\sphericalangle = 90°$, így CD magasság. Hasonlóan adódik, hogy $CEB\sphericalangle = 90°$ (lásd az ábrát), így BE is magasság. Mivel P illeszkedik a háromszög két magasságvonalára (ebből következik, hogy a harmadikra is), ezért P valóban a magasságpont.



2281. A feltételekből $CFE\sphericalangle = 90° - \frac{\beta}{2}$ és $FEC\sphericalangle = 90° - \frac{\alpha}{2}$. Így $ECF\sphericalangle = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}$.

a) 39° *b)* 42° *c)* 55° *d)* 38°20' *e)* 59°

2282. Kihasználva, hogy a megfelelő háromszögek külső szöge egyenlő a nem mellette fekvő két belső szög összegével, a következők adódnak:



1. $CAB\sphericalangle = ABC\sphericalangle = \alpha$
2. $DCB\sphericalangle = BDC\sphericalangle = 2\alpha$
3. Az előző miatt $BDE\sphericalangle = BED\sphericalangle = 180° - \alpha - (180° - 4\alpha) = 3\alpha$.
4. Hasonlóan $FDE\sphericalangle = EFD\sphericalangle = 180° - 2\alpha - (180° - 6\alpha) = 4\alpha$.
5. $\beta = EGF\sphericalangle = FEG\sphericalangle = 180° - 3\alpha - (180° - 8\alpha) = 5\alpha$. Kaptuk $\beta = 5\alpha$.

a) $\beta = 25°$ *b)* $\beta = 50°$ *c)* $\beta = 75°$
d) Ez az adat nem felel meg az ábrának.

2283. Az n-edik szakasz behúzása után akkor nem tudjuk folytatni, ha az derékszöget zár be az egyik szögszárral. (Ekkor már nem képezhető új egyenlő szárú háromszög.) Az előző feladat alapján, ha α a kezdő szög, akkor $n \cdot \alpha = 90°$.

a) $\alpha = 30°$ *b)* $\alpha = 18°$ *c)* $\alpha = 15°$ *d)* $\alpha = 10°$ *e)* $\alpha = 9°$ *f)* $\alpha = \frac{90°}{n}$

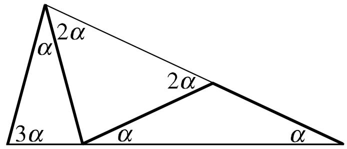
2284. Legyen α a szárak által bezárt szög. Ekkor a 2282. feladat és az ábra alapján

$$3\alpha + 3\alpha + \alpha = 180°,$$

ahonnan

$$\alpha = \frac{180°}{7} \approx 25{,}72°,$$

$$3\alpha = \frac{540°}{7} \approx 77{,}14°.$$



2285. Jelölje δ a negyedik szöget, α', β', γ', δ' pedig a megfelelő külső szögeket.

a) $\delta = \alpha' = \beta' = \gamma' = \delta' = 90°$

b) $\delta = 146°$, $\alpha' = 67°$, $\beta' = 142°$, $\gamma' = 117°$, $\delta' = 34°$

c) A négyszög konkáv, $\delta = 205°59'$.

d) $\delta = 108°$, $\alpha' = 135°$, $\beta' = 101°$, $\gamma' = 52°$, $\delta' = 72°$

e) $\delta = 69°$, $\alpha' = 83{,}7°$, $\beta' = 88°49'$, $\gamma' = 76°29'$, $\delta' = 111°$

f) $\delta = 15°$, $\alpha' = 113°$, $\beta' = 8°$, $\gamma' = 74°$, $\delta' = 165°$

2286. *a)* $\beta = 88°$, $\delta = 87°$, $\alpha' = 70°$, $\gamma' = 105°$, $\delta' = 93°$

b) $\beta = 57°$, $\delta = 99°$, $\gamma = 139°$, $\alpha' = 115°$, $\gamma' = 41°$

c) $\alpha = 39°$, $\gamma = 74°$, $\delta = 83°$, $\beta = 164°$, $\beta' = 16°$

d) $\gamma = 78°27'$, $\alpha = 47°8'$, $\alpha' = 132°52'$, $\beta' = 115°44'$, $\delta' = 9°51'$

e) $\delta' = 74°$. $\beta + \gamma = 170°$, β szabadon választható a feltételnek megfelelően, γ β választásával már meghatározott.

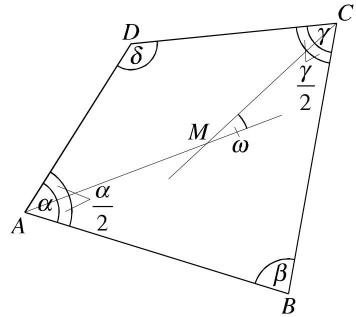
f) Mivel $\beta + \beta' = 179°$, ezért nincs megfelelő négyszög.

2287. Mivel $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$ és $\alpha + \beta + \alpha' + \beta' = 360°$, ezért $\delta + \gamma = \alpha' + \beta'$.

a) 214° *b)* 206°52' *c)* 193°59' *d)* 200°36'

2288. Lásd az előző feladatot!

2289. Jelölje a szögfelezők által bezárt szöget ω. (Lásd az ábrát!) Az $ABCM$ négyszögre felírva a belső szögek összegét:



$$\frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2} + \beta + (180° + \omega) = 360°.$$

Ebből

$$\omega = 180° - \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2} + \beta\right)$$

Mivel az $AMC\sphericalangle$ lehet konvex és konkáv is, ezért

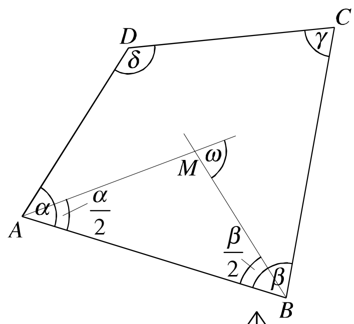
$$\omega = \left|180° - \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2} + \beta\right)\right|$$

a) $\omega = 5{,}5°$ *b)* $\omega = 2{,}5°$

c) $\omega = 26{,}5°$ *d)* $\omega = 47°27'30''$

2290. Ha ω a megfelelő szögfelezők által bezárt szög (lásd az ábrát), akkor

$$\omega = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}.$$



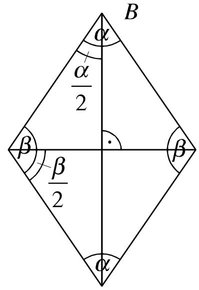
a) $\omega = 95°$

b) $\omega = 85°$

c) $\omega = 132{,}5°$

d) $\omega = 58°53'30''$

2291. $\alpha + \beta = 180°$ és az átlók oldalakkal bezárt szöge $\frac{\alpha}{2}$ illetve $\frac{\beta}{2}$. A feladatban α adott.



a) $\beta = 150°$ *b)* $\beta = 138°$

c) $\beta = 129°$ *d)* $\beta = 111°44'$

e) $\beta = 56°$ *f)* $\beta = 16°41'$

g) $\beta = 180° - \alpha$

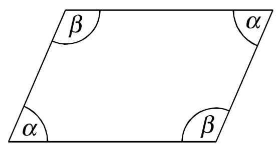
2292. Lásd az előző feladatot!

a) $\alpha = 32°,\ \beta = 148°$ *b)* $\alpha = 62°,\ \beta = 118°$

c) $\alpha = 86°32',\ \beta = 93°28'$ *d)* $\alpha = 137°,\ \beta = 43°$

e) $\alpha = 140°,\ \beta = 40°$ *f)* $\alpha = 2\delta,\ \beta = 180° - 2\delta$

2293. $\alpha + \beta = 180°$ és α adott.



a) $\beta = 15°$ *b)* $\beta = 127°$

c) $\beta = 100°44'$ *d)* $\beta = 29°$

e) $\beta = 18°41'$ *f)* $\beta = 180° - \alpha$

A paralelogramma mindegyik esetben lehet rombusz is.

2294. Legyen α a kisebb szög. Ekkor

$$2\alpha + \delta = 180°,$$

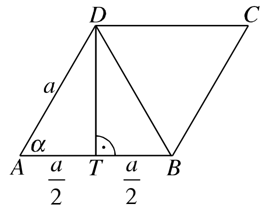
ahonnan

$$\alpha = 90° - \frac{\delta}{2}, \quad \beta = 90° + \frac{\delta}{2}.$$

a) $\alpha = 74{,}5°,\ \beta = 105{,}5°$ *b)* $\alpha = 68{,}5°,\ \beta = 111{,}5°$ *c)* $\alpha = 60°,\ \beta = 120°$

d) $\alpha = 50°52',\ \beta = 129°8'$ *e)* $\alpha = 44{,}18°,\ \beta = 135{,}82°$

2295. A feltételek alapján az ATD derékszögű háromszög egybevágó a DTB derékszögű háromszöggel, ezért $AD = BD = a$, ami azt jelenti, hogy az ABD háromszög szabályos, így $\alpha = 60°$.



2296. A 2291. és a 2295. feladat alapján a rombusz oldala és a rövidebb átló egyenlő hosszúak.

2297. A 2293. feladat alapján, ha $\alpha : \beta = p : q$, akkor

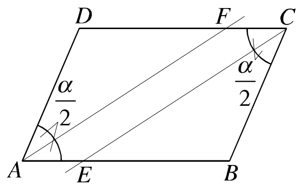
$$\alpha = \frac{p}{p+q} \cdot 180° \quad \text{és} \quad \beta = \frac{q}{p+q} \cdot 180°.$$

a) $\alpha = 60°$, $\beta = 120°$ *b)* $\alpha = 72°$, $\beta = 108°$ *c)* $\alpha = 67{,}5°$, $\beta = 112{,}5°$

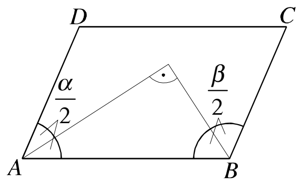
d) $\alpha = 80°$, $\beta = 100°$ *e)* $\alpha = 75°$, $\beta = 105°$ *f)* $\alpha = 54°$, $\beta = 126°$

2298. Mivel az AB és CD oldalak párhuzamosak, valamint $FAE\sphericalangle = ECF\sphericalangle = \frac{\alpha}{2}$, ezért AF párhuzamos EC-vel. Ha AF és EC egybeesik, akkor a paralelogramma rombusz.

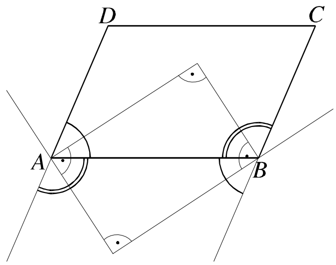
Megjegyzés: Indokolhattunk volna így is: A paralelogramma átlóinak metszéspontjára vonatkozó tükrözésnél AF képe CE.



2299. Az előző feladat alapján adódik, hogy a paralelogramma belső szögfelezői paralelogrammát határolnak, vagy egy ponton mennek át. Tegyük fel, hogy a paralelogramma két szomszédos oldala különböző hosszúságú. Mivel $\alpha + \beta = 180°$, ezért $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 90°$, amiből adódóan a paralelogramma két szomszédos belső szögének felezője derékszöget zár be. Így, ha a paralelogramma nem rombusz, akkor belső szögfelezői olyan paralelogrammát határolnak, amelynek a szögei 90°-osak, azaz téglalapot. A belső szögfelezők akkor és csak akkor metszik egymást egy pontban, ha a paralelogramma rombusz. (Lásd az előző feladatot!)

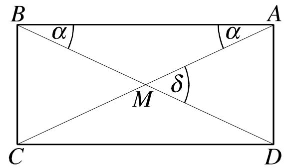


2300. Mivel az egy csúcshoz tartozó belső és külső szögfelező derékszöget zár be, ezért a külső szögfelezők olyan négyszöget határolnak, amelynek mindegyik szöge derékszög, azaz téglalapot. (Lásd az ábrát!)



2301. Az előző feladat alapján nyilvánvaló. (Lásd az előző feladat ábráját!)

2302. α adott, δ-t kell meghatározni. Az ABM háromszög M-nél levő külső szöge δ, így $\delta = 2\alpha$.



a) $\delta = 24°$ *b)* $\delta = 43°$

c) $\delta = 65°46'$ *d)* $\delta = 90°$

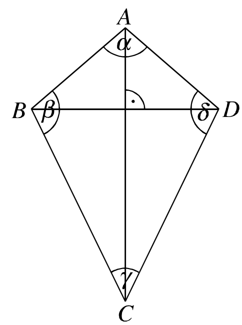
e) $\delta = 180° - 2 \cdot 62° = 56°$ (Az α most nem a rajznak megfelelő)

2303. Az előző feladat ábrája és a kapott összefüggés alapján, ha δ adott és α-t keressük, akkor $\alpha = \frac{\delta}{2}$.

a) $\alpha = 16°$ *b)* $\alpha = 30°$ *c)* $\alpha = 35°38'$ *d)* $\alpha = 41{,}3°$ *e)* $\alpha = 66°$

2304. Lásd a 2302. feladatot!

2305. Ha a megadott két szög (α és γ) különbözők, akkor $\beta = \delta = 180° - \frac{\alpha + \gamma}{2}$.



a) $\beta = \delta = 108{,}5°$

b) $\beta = \delta = 112{,}5°$

c) Itt β és δ adott, α és γ nem egyértelmű, $\alpha + \gamma = 224°$

d) $\beta = \delta = 84°31'$

e) $\beta = \delta = 48°$

f) $\beta = \delta = 67°6'30''$

2306. (Az előző feladat ábráját használjuk.) Az AC átló az oldalakkal $\frac{\alpha}{2}$ és $\frac{\gamma}{2}$ szöget zár be. (AC, a szimmetriatengely, felezi az α és γ szöget.) A BD átló és az oldalak szöge, lévén a deltoid átlói merőlegesek egymásra, $90° - \frac{\alpha}{2}$ és $90° - \frac{\gamma}{2}$.

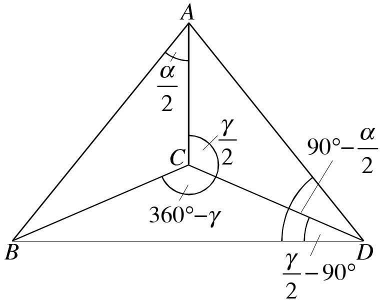
a) $\frac{\alpha}{2} = 16{,}5°$, $\frac{\gamma}{2} = 55°$, $90° - \frac{\alpha}{2} = 73{,}5°$, $90° - \frac{\gamma}{2} = 35°$

b) $\frac{\alpha}{2} = 22{,}5°$, $\frac{\gamma}{2} = 45°$, $90° - \frac{\alpha}{2} = 67{,}5°$, $90° - \frac{\gamma}{2} = 45°$

c) Nem határozható meg egyértelműen.

d) $\frac{\alpha}{2} = 60°49'30''$, $\frac{\gamma}{2} = 34°39'30''$, $90° - \frac{\alpha}{2} = 29°10'30''$, $90° - \frac{\gamma}{2} = 55°20'30''$

e) Itt és az *f)* alpontban a deltoid konkáv, így ha γ a konkáv szög, akkor a BD átló az oldalakkal $\frac{\gamma}{2} - 90°$ és $90° - \frac{\alpha}{2}$ szöget zár be. (Lásd az ábrát!) $\frac{\alpha}{2} = 20{,}5°$,

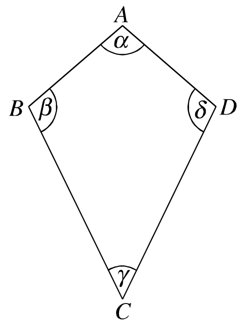


$\frac{\gamma}{2} = 111{,}5°$, $\frac{\gamma}{2} - 90° = 21{,}5°$,

$90° - \frac{\alpha}{2} = 69{,}5°$.

f) $\frac{\alpha}{2} = 9°32'30''$, $\frac{\gamma}{2} = 103°5'30''$, $\frac{\gamma}{2} - 90° = 13°5'30''$, $90° - \frac{\alpha}{2} = 80°27'30''$.

2307. Általában két lehetőségünk van.



a) 1. 131°, 78°, 131°, 20°
2. 131°, 78°, 78°, 73°

b) 1. 89°16', 89°16', 107°59', 73°29'
2. 89°16', 107°59', 107°59', 54°46'

c) 1. 73°51', 73°51', 67°24', 144°54'
2. 73°51', 67°24', 67°24', 151°11'

d) Csak egy lehetőség van: 191°, 34°, 34°, 101°

e) Csak egy lehetőség van: 153°, 101°, 101°, 5°

f) Nem lehetséges.

2308. A 2305. és 2306. feladat alapján számolunk.

a) 1. AC: 39°, 10°
BD: 51°, 80°
2. AC: 65,5°, 36,5°
BD: 24,5°, 53,5°

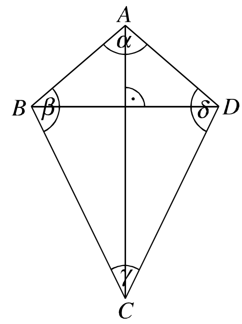
b) 1. AC: 53°59'30'', 10°44'30''
BD: 36°30'', 53°15'30''
2. AC: 44°38', 27°23'
BD: 45°22', 62°37'

c) 1. AC: 72°27', 33°42'
BD: 17°33', 56°18'
2. AC: 75°35'30'', 36°55'30''
BD: 14°24'30'', 53°4'30''

d) Az egyik szög konkáv.
AC: 95,5°, 50,5°
BD: 5,5°, 39,5°
(lásd a 2306. feladat ábráját)

e) AC: 76,5°, 2,5°
BD: 13,5°, 87,5°

2309. A 2306. feladat alapján, ha $\frac{\alpha}{2}$ és $\frac{\gamma}{2}$ adott, akkor $\beta = \delta = 180° - \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2}\right)$, és a BD átlónak az oldalakkal bezárt szögei konvex esetben $90° - \frac{\alpha}{2}$ és $90° - \frac{\gamma}{2}$, konkáv esetben ($\gamma > 180°$) $90° - \frac{\alpha}{2}$ és $\frac{\gamma}{2} - 90°$.



a) $\alpha = 32°$, $\gamma = 148°$, $\beta = \delta = 90°$, BD: 74°, 16°

b) $\alpha = 78°32'$, $\gamma = 175°2'$, $\beta = \delta = 53°13'$, BD: 50°44', 2°29'

c) $\alpha = 87°4'$, $\gamma = 188°26'$, $\beta = \delta = 42°15'$, BD: 46°28', 4°13'

d) Nem lehetséges. ($\alpha + \beta > 360°$)

e) $\alpha = 69{,}4°$, $\gamma = 185°14'$, $\beta = \delta = 52°41'$, BD: 55,3°, 2°37'

f) Nem lehetséges. ($\alpha + \beta = 360°$)

2310. Adott $90° - \frac{\alpha}{2}$ és $90° - \frac{\gamma}{2}$ (vagy $\frac{\gamma}{2} - 90°$). $\beta = \delta = \left(90° - \frac{\alpha}{2}\right) + \left(90° - \frac{\gamma}{2}\right)$, az AC átlónak az oldalakkal bezárt szögei $\frac{\alpha}{2}$ és $\frac{\gamma}{2}$. (Lásd az előző feladat ábráját!)

a) $\beta = \delta = 90°$, $\alpha = 120°$, $\gamma = 60°$, AC: 60°, 30°

b) $\beta = \delta = 157°$, $\alpha = 34°$, $\gamma = 12°$, AC: 17°, 6°

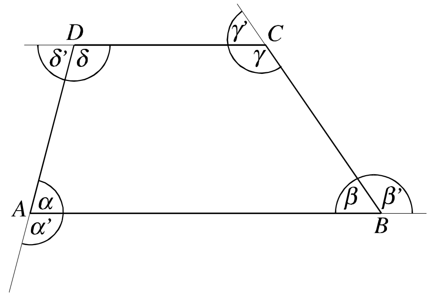
c) $\beta = \delta = 108°$, $\alpha = \gamma = 72°$, AC: 36°, 36° (rombusz)

d) $\beta = \delta = 112°1'$, $\alpha = 102°36'$, $\gamma = 33°22'$, AC: 51°18', 16°41'

e) $\beta = \delta = 127°5'$, $\alpha = 84{,}4°$, $\gamma = 21°26'$, AC: 42,2°, 10°43'

f) Nem lehetséges.

2311. Adott α és γ. Ebből $\delta = 180° - \alpha$ és $\beta = 180° - \gamma$, valamint $\alpha' = \delta$, $\beta' = \gamma$, $\gamma' = \beta$, $\delta' = \alpha$.



a) $\beta = 79°$, $\delta = 146°$

b) $\beta = 60°$, $\delta = 120°$ (szimmetrikus trapéz)

c) $\beta = 68°9'$, $\delta = 106°41'$

d) $\beta = 71°5'$, $\delta = 83°29'$

e) $\beta = 3{,}3°$, $\delta = 126°11'$

f) Nem lehetséges.

2312. A szögek az előző feladat ábrájának megfelelőek, tehát $\alpha + \delta = \beta + \gamma = 180°$.

a) $\alpha = 36°$, $\beta = 72°$, $\gamma = 108°$, $\delta = 144°$

b) – d) Ezekkel az arányokkal a szögek nem lehetnek trapéz szögei, ugyanis nem teljesül a fenti feltétel.

e) $\alpha = 32,\dot{7}\dot{2}°$, $\beta = 40,\dot{9}\dot{0}°$, $\gamma = 49,\dot{0}\dot{9}°$, $\delta = 57,\dot{2}\dot{7}°$

f) Nem lehetséges.

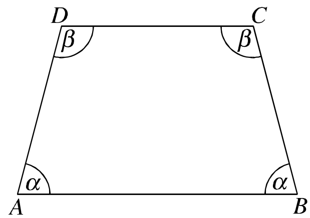
A megfelelő külső szögek az előző feladat alapján számolhatók.

2313. *a)* 150° *b)* 120°

c) 90° *d)* 125°21'

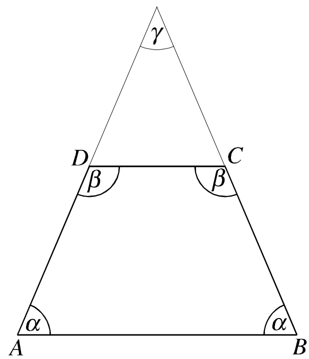
e) 69°42' *f)* 10,16°

g) $\beta = 180° - \alpha$



2314. γ adott. Az ábra alapján $\alpha = 90° - \frac{\gamma}{2}$,

$\beta = 90° + \frac{\gamma}{2}$.



a) $\alpha = 75°$, $\beta = 105°$

b) $\alpha = 60°$, $\beta = 120°$

c) $\alpha = 45°$, $\beta = 135°$

d) $\alpha = 62°40'30''$, $\beta = 117°19'30''$

e) $\alpha = 34°51'$, $\beta = 145°9'$

f) $\alpha = 5,08°$, $\beta = 174,92°$

g) $90° - \frac{\alpha}{2}$, $90° + \frac{\alpha}{2}$

2315. Ha δ a két szög közti különbség, akkor $\beta = \alpha + \delta$ és $\alpha + \beta = 180°$, amiből $\alpha = 90° - \frac{\delta}{2}$,

$\beta = 90° + \frac{\delta}{2}$.

a) $\alpha = 85°$, $\beta = 95°$

b) $\alpha = 81°$, $\beta = 99°$

c) $\alpha = 70°3'30''$, $\beta = 109°56'30''$

d) $\alpha = 41,645°$, $\beta = 138,355°$

e) $\alpha = 34°39'30''$, $\beta = 145°20'30''$

f) $\alpha = 13,65°$, $\beta = 166,35°$

2316. Legyen α a kisebbik, β a nagyobbik szög és δ a feladatban megadott különbség. Ekkor

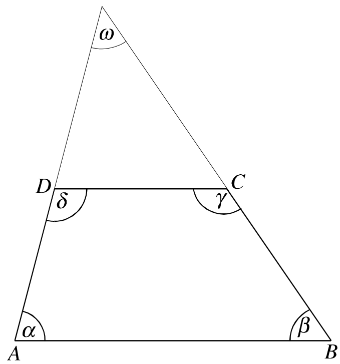
$$\alpha+\left(\frac{3}{2}\alpha+\delta\right)=180°\text{, ahonnan } \alpha=\frac{360°-2\delta}{5}.$$

a) $\alpha = 64{,}8°$, $\beta = 115{,}2°$ *b)* $\alpha = 48°55'36''$, $\beta = 131°4'24''$

c) $\alpha = 42{,}712°$, $\beta = 137{,}288°$ *d)* $\alpha = 31°20'24''$, $\beta = 148°39'36''$

e) $\alpha = 6{,}6°$, $\beta = 173{,}4°$ *f)* Nem lehetséges.

2317. Jelölje ω a szárak meghosszabbításai által alkotott szöget, és legyen a trapéz adott szöge α vagy δ, attól függően, hogy 90°-nál kisebb, vagy nagyobb az adott szög. Ekkor $\alpha + \delta = 180°$, $\beta = 180° - (\omega + \alpha)$, $\beta + \gamma = 180°$.



a) $\alpha = 30°$, $\delta = 150°$, $\beta = 120°$, $\gamma = 60°$

b) $\alpha = 60°$, $\delta = 120°$, $\beta = 90°$, $\gamma = 90°$

c) $\alpha = 73°16'$, $\delta = 106°44'$, $\beta = 76°44'$, $\gamma = 103°16'$

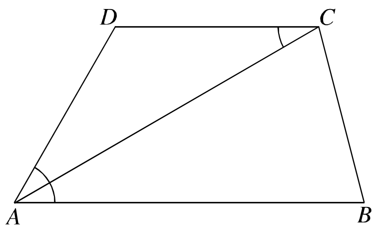
d) $\alpha = 86{,}73°$, $\delta = 93{,}27°$, $\beta = 63{,}27°$, $\gamma = 116{,}73°$

e) $\delta = 116°39'$, $\alpha = 63°21'$, $\beta = 86°39'$, $\gamma = 93°21'$

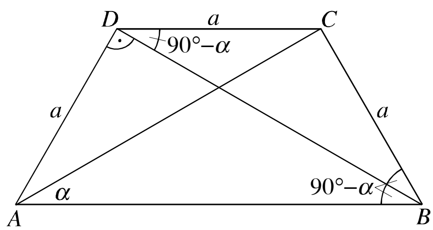
f) $\delta = 124{,}6°$, $\alpha = 55{,}4°$, $\beta = 94{,}6°$, $\gamma = 85{,}4°$

g) α, $\beta = 180° - (\omega + \alpha)$, $\gamma = \omega + \alpha$, $\delta = 180° - \alpha$

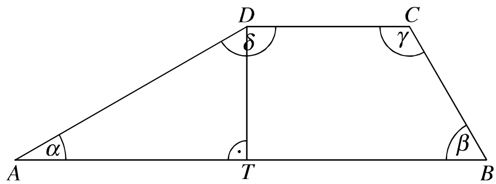
2318. Az állítás igaz. Mivel $AD = CD$, ezért az ACD háromszög egyenlő szárú, így $DAC\sphericalangle = ACD\sphericalangle$. Ugyanakkor AB párhuzamos CD-vel, ezért $ACD\sphericalangle = CAB\sphericalangle$. Kaptuk, hogy $DAC\sphericalangle = CAB\sphericalangle$, és ez volt az állítás.



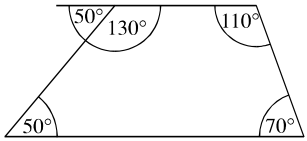
2319. Jelölje α a DAB szöget. Ekkor $CDB\sphericalangle = DBC\sphericalangle = ABD\sphericalangle = 90° - \alpha$. Húrtrapézról lévén szó $\alpha = 2(90° - \alpha)$, ahonnan $\alpha = 60°$. Tehát $DAB\sphericalangle = ABC\sphericalangle = 60°$ és $BCD\sphericalangle = CDA\sphericalangle = 120°$.



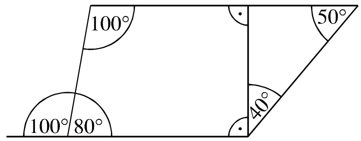
2320. Mivel $AD = 2 \cdot DT$, ezért az ATD derékszögű háromszöget az AB egyenesére tükrözve az eredeti és a képháromszög egyesítése szabályos háromszög, ami alapján $\alpha = 30°$, $\delta = 150°$. $\gamma = 180° - \beta$, így a feladat feltételéből adódó egyenlet: $30°+\beta = \frac{3}{11}(180°-\beta+150°)$. Megoldva kapjuk, hogy $\beta = \frac{330°}{7} \approx 47{,}14°$, és így $\gamma \approx 132{,}86°$.



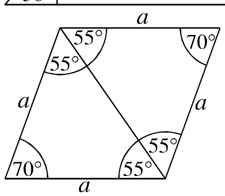
2321. a)



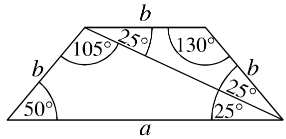
b)



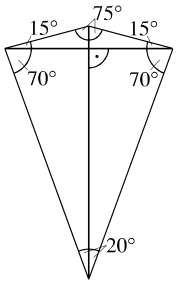
c)



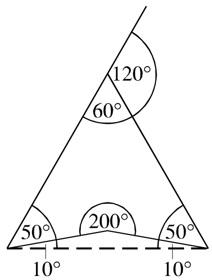
d)



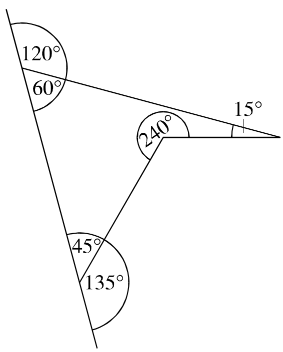
e)



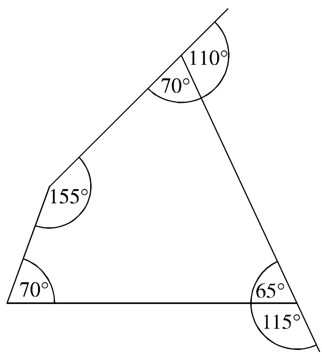
f)



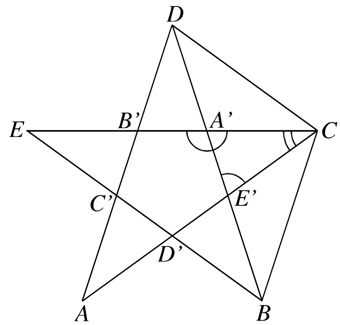
g)



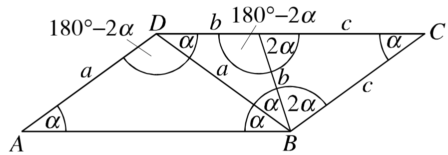
h)



2322. Az $A'B'C'D'E'$ szabályos ötszögben $E'A'B' \sphericalangle = 108°$, így $C'A'E' \sphericalangle = 72°$. A $CA'E'$ háromszög egyenlő szárú ($A'C = CE'$), ezért $A'E'C \sphericalangle = 72°$. Ezek alapján $ACE \sphericalangle = 36°$.



2323. A paralelogramma szemközti szögei egyenlőek, szomszédos szögei pedig 180°-ra egészítik ki egymást. Ha az A csúcsnál levő szög α, akkor, felhasználva még a háromszög külső szögei és belső szögei közötti kapcsolatot, az AB oldalon fekvő szögekre $5\alpha = 180°$, amiből $\alpha = 36°$.
A paralelogramma szögei tehát 36 és 144 fokosak.



2324. Adott $\varepsilon = 76°$ és α. A tengelyes szimmetriából adódóan $\alpha = \delta$ és $\beta = \gamma$. Adódik továbbá, hogy az $ABFE$ négyszög belső szögeinek összege: $\alpha + \beta + 90° + 38° = 360°$.
Így $\beta = 232° - \alpha$.

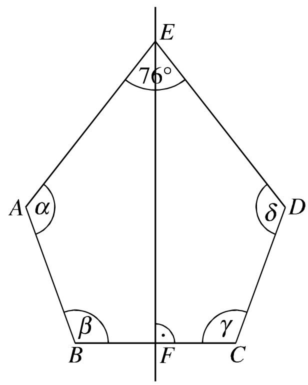
a) $\beta = 172°$

b) $\beta = 122°$

c) $\beta = 119°26'$

d) $\beta = 99{,}33°$

e) $\beta = 112°$



2325. Jelölje a hatszög belső szögeit α, β, γ, δ, ε, φ. Ha $\alpha : \beta : \gamma : \delta : \varepsilon : \varphi = p : q : r : s : t : v$, akkor

$$\alpha = \frac{p}{p+q+r+s+t+v} \cdot 720°, \qquad \beta = \frac{q}{p+q+r+s+t+v} \cdot 720°,$$

$$\gamma = \frac{r}{p+q+r+s+t+v} \cdot 720°, \qquad \delta = \frac{s}{p+q+r+s+t+v} \cdot 720°,$$

$$\varepsilon = \frac{t}{p+q+r+s+t+v} \cdot 720°, \qquad \varphi = \frac{v}{p+q+r+s+t+v} \cdot 720°.$$

a) $\alpha \approx 34{,}29°$, $\beta \approx 68{,}57°$, $\gamma \approx 102{,}86°$, $\delta \approx 137{,}14°$, $\varepsilon \approx 171{,}43°$, $\varphi \approx 205{,}71°$;

b) $\alpha \approx 41{,}14°$, $\beta \approx 61{,}71°$, $\gamma \approx 102{,}86°$, $\delta = 144°$, $\varepsilon \approx 164{,}57°$, $\varphi \approx 205{,}72°$;

c) $\alpha = 28{,}8°$, $\beta = 72°$, $\gamma = 100{,}8°$, $\delta = 129{,}6°$, $\varepsilon = 172{,}8°$, $\varphi = 216°$;

d) $\alpha \approx 61{,}71°$, $\beta \approx 82{,}29°$, $\gamma \approx 102{,}86°$, $\delta \approx 123{,}43°$, $\varepsilon \approx 164{,}57°$, $\varphi \approx 185{,}14°$.

Háromszögek, négyszögek

2326. A háromszög létezéséhez teljesülnie kell, hogy bármely két oldal hosszának összege nagyobb a harmadik oldal hosszánál. Mind a négy esetben létezik a háromszög.

2327. Jelölje c a harmadik oldal hosszát.

a) $c + 2{,}7 > 5{,}1$ és $2{,}7 + 5{,}1 > c$; c lehet: 3 cm, 4 cm, 5 cm, 6 cm, 7 cm.

b) $c + 0{,}7 > 1{,}8$ és $1{,}8 + 0{,}7 > c$; $c = 2$ cm.

c) $c + 1{,}16 > 2{,}32$ és $1{,}16 + 2{,}32 > c$; c lehet: 2 cm, 3 cm.

d) $c + 39{,}3 > 41{,}5$ és $39{,}3 + 41{,}5 > c$; $3 \text{ cm} \leqq c \leqq 80 \text{ cm}$.

2328. Ha egy háromszögben $a \leqq b$, akkor és csak akkor az a-val szemközti α és a b-vel szemközti β szögre $\alpha \leqq \beta$.

a) A harmadik szög 52°, vele szemben a b oldal fekszik.

b) A harmadik szög 30°, vele szemben az a oldal fekszik.

c) A harmadik szög 72°, vele szemben a b vagy a c oldal fekszik, ugyanis $b = c$.

d) A harmadik szög 49°, vele szemben a b oldal fekszik.

e) A harmadik szög 6°13', vele szemben az a oldal fekszik.

f) A harmadik szög 80,25°, vele szemben a b oldal fekszik.

2329. *a)* A harmadik oldal 6 cm és az alapon fekvő szög a nagyobb.

b) Két eset van.
1. A harmadik oldal 5 m és a szárak szöge a nagyobb.
2. A harmadik oldal 9 m és az alapon fekvő szög a nagyobb.

c) A harmadik oldal 10 dm és az alapon fekvő szög a nagyobb.

d) A harmadik oldalra nézve (jelölje c): $0 \text{ mm} < c < 12 \text{ mm}$.
– $0 \text{ mm} < c < 6 \text{ mm}$ esetén az alapon fekvő szögek a nagyobbak.
– $c = 6$ mm esetén a szögek egyenlők.
– $6 \text{ mm} < c < 12 \text{ mm}$ esetén a szárak szöge a nagyobb.

2330. A 2326. feladat kapcsán leírt feltételnek kell teljesülnie. Előbb meghatározzuk az összes lehetséges kiválasztás számát, amelyek nem teljesítik a feltételt.

1. 3 különböző adatot választunk ki.
   Ha különbözőnek tekintjük azokat a hármasokat is, amelyek csak az adatok sorrendjében különböznek, akkor $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$ esetünk van. Most azonban a csak sorrendben különbözők azonos esetet jelentenek, így a kapott eredményünket osztani kell $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$-tal, azaz 3 adat lehetséges sorrendjeinek a számával. Így kapjuk, hogy 35 különböző hármast tudunk kiválasztani. Ezek közül a feltételnek nem felelnek meg a következő hármasok:

2 cm; 3 cm; 5 cm
2 cm; 3 cm; 5,3 cm
2 cm; 3 cm; 5,8 cm
2 cm; 3,6 cm; 5,8 cm.

Tehát 31 különböző oldalhosszúságú háromszöget tudunk szerkeszteni az adott oldalakból.

2. Egyenlő szárú, de nem egyenlő oldalú háromszögek.

Most két adatot kell kiválasztani, ezt $\frac{7\cdot 6}{2}=21$ -féleképpen tehetjük meg. Ebből a feltételnek nem felel meg az alábbi négy eset:

2 cm; 2 cm; 4,2 cm
2 cm; 2 cm; 5 cm
2 cm; 2 cm; 5,3 cm
2 cm; 2 cm; 5,8 cm.

Az adott szakaszokból tehát 17 egyenlő szárú háromszög szerkeszthető.

3. 7 szabályos háromszög szerkeszthető az adott szakaszokból.

Összegezve tehát az adott szakaszokból 31 + 17 + 7 = 55 különböző háromszög szerkeszthető.

2331. Legyen $a \geqq b \geqq c$. Mivel $a \geqq b$ és $a \geqq c$, ezért $2a \geqq b + c$, ami az állítást igazolja.

2332. Legyen $a \geqq b \geqq c$. Mivel $a < b + c$, ezért $2a < a + b + c = K$, amiből

$$a<\frac{a+b+c}{2}=\frac{K}{2}.$$

Mivel a volt a legnagyobb oldal, ezért b-re és c-re is teljesül az állítás.

2333. Jelölje az egyenlő szárú háromszög alapjának hosszát a, szárának hosszát b. Ekkor a kerület $2b + a$.

$$\frac{2b+a}{2}=b+\frac{a}{2}<b+a,$$

ami az állítás első részét igazolja.
Másrészt

$$\frac{3}{4}(2b+a)=\frac{3}{2}b+\frac{3}{4}a=b+\frac{b}{2}+\frac{3}{4}a>b+\frac{a}{4}+\frac{3}{4}a=a+b,$$

ugyanis $2b>a$ alapján $\frac{b}{2}>\frac{a}{4}$.

Ezzel az állítás második részét is beláttuk.

2334. A szerkesztés: Az a oldal egyik végpontjából a b, másik végpontjából a c oldallal körívezek, a kapott metszéspont lesz a harmadik csúcs.

e) $b = 10$ cm, $c = 7,5$ cm; *f)* $b = 42$ mm, $c = 42$ mm.

A háromszög mindegyik esetben egyértelmű.

2335. A szerkesztés: Az a oldalra egyik végpontjában felveszem a γ szöget, majd annak másik szárára felmérem a b oldalt. (A szögek szerkesztésére nézve lásd a 2144-2146. feladat-

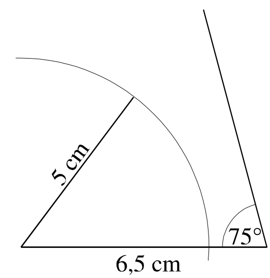
tokat!)
A háromszög mindegyik esetben egyértelmű.

2336. A szerkesztés: A b oldalra egyik végpontjában mérjük fel az adott α szöget, majd a másik végpontból az a oldallal körívezve az α szög szárából messük ki a harmadik csúcsot.
$a > b$ mindegyik esetben teljesül, a háromszög mindegyik esetben egyértelmű.

2337. A szerkesztés: Szerkesszük meg az a oldal egyik végpontjába a β, másik végpontjába a γ szöget. Az adott szögek a-t nem tartalmazó szögszárainak metszéspontja a harmadik csúcs.
A *d)* esetben $\beta + \gamma = 180°$, így nincs ilyen háromszög, a többi esetben a háromszög egyértelmű.

2338. Három eset lehetséges.

1. 75°-os szöget az adott oldalak zárnak be. Ekkor a háromszög egyértelmű. (Lásd a 2335. feladatot!)
2. A 75°-os szög a 6,5 cm-es oldallal szemben van. Ebben az esetben is egyértelmű a háromszög. (Lásd a 2336. feladatot!)
3. A 75°-os szög az 5 cm-es oldallal szemközti szög. Ilyen háromszög nincs. Ha a szerkesztést a 2336. feladatban leírtak alapján végezzük, akkor az 5 cm-es oldallal körívezve a 75°-os szög másik szárán metszéspont nem jön létre. (Lásd az ábrát!)



2339. A harmadik szög 75°-os. Attól függően, hogy a 45 mm-es oldal melyik szöggel van szemben, 3 különböző háromszöget kapunk, amelyek szerkesztésére nézve lásd a 2337. feladatot.

2340. A *d)* és az *f)* esetben $\alpha + \beta + \gamma = 181°$, tehát nem létezik ilyen háromszög. A többi esetben végtelen sok megoldás van, ugyanis ezekkel az adatokkal a háromszög csak hasonlóság erejéig meghatározott. (A szögek szerkesztésére nézve lásd a 2144-2146. feladatokat!)

2341. *a)* Az alap két végpontjából a szárakkal körívezve adódik a harmadik csúcs. A megoldás egyértelmű.

b) Az a oldal felezőmerőlegesére a felezőpontból felmérve m_a-t adódik a harmadik csúcs. A megoldás egyértelmű. (Lásd még a 2072. feladatot!)

c) $\beta = \dfrac{180°-75°}{2} = 52{,}5°$. Az alapra mindkét végpontjában felmérjük a β szöget, ezek szárainak metszéspontja lesz a harmadik csúcs. A megoldás egyértelmű. (Lásd még a 2071. feladatot!)

d) Lásd a *c)* pontot!

e) Felveszünk egy 105°-os szöget, majd ennek mindkét szárára a szög csúcsából felmérjük a b oldalt. A megoldás egyértelmű.

f) A b oldal mint átmérő fölé Thalesz-kört szerkesztünk, majd ezt az egyik végpontból elmetsszük m_a-val. A kapott metszéspont az a oldal felezőpontja. m_a egyenesére tükrözve a b oldalt adódik a háromszög. A megoldás egyértelmű.

g) Az a oldal mint átmérő fölé Thalesz-kört szerkesztünk, majd az átmérő egyik végpontjából m_b-vel körívezünk. A körrel kapott metszéspontot az átmérő másik végpontjával összekötve adódik az egyik szár egyenese. Ennek az a oldal felezőmerőlegesével vett metszéspontja lesz a háromszög harmadik csúcsa. (Lásd még a 2073. feladatot!) A megoldás egyértelmű.

h) m_a egyik végpontjában mindkét irányban szerkesszünk $\frac{\alpha}{2}$ nagyságú szöget, másik végpontjában pedig szerkesszünk merőleges egyenest. A kapott félegyenesek metszéspontjai lesznek az alap végpontjai. A megoldás egyértelmű. (Lásd még a 2079. feladatot!)

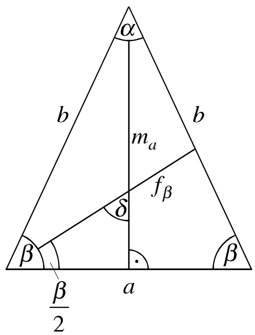
i) Szerkesszünk m_b-re egyik végpontjában $90° - \alpha$ nagyságú szöget, másik végpontjában pedig merőlegest. A kapott szögszárak metszéspontja lesz az alappal szemközti csúcs. Az így kapott szárra (b) α-t felmérve, majd a kapott szög másik szárára a már ismert b-t felmérve adódik a háromszög. A megoldás egyértelmű.

j) Lásd a 2340. feladatot! A háromszög csak hasonlóság erejéig meghatározott.

k) Mivel $\alpha + 2\beta = 177°$, ezért nincs ilyen egyenlő szárú háromszög.

l) Lásd az *i)* pontot!

2342. Mivel $\delta + \frac{\beta}{2} = 90°$, ezért $\beta = 180° - 2\delta$, tehát β δ ismeretében szerkeszthető. Hasonlóan szerkeszthető α is, ugyanis $\alpha = 180° - 2\beta = 4\delta - 180°$.



a) Lásd a 2341/*d)* feladatot!

b) Lásd a 2341/*e)* feladatot!

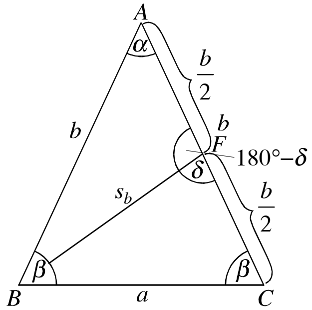
c) Lásd a 2341/*h)* feladatot!

d) Lásd a *b)* pontot!

(A szögek szerkesztésére nézve lásd a 2144-2146. feladatokat!)

2343. Jelölje F az AC oldal felezőpontját.

a) – *b)* Az ABF háromszög szerkeszthető, ugyanis két oldala $\left(b, \frac{b}{2}\right)$ és a nagyobbikkal szemközti szöge $(180° - \delta)$ adott. (Lásd a 2336. feladatot.) Ezek után az AF oldal F-en túli meghosszabbítására felmérve $\frac{b}{2}$-t adódik a C csúcs.

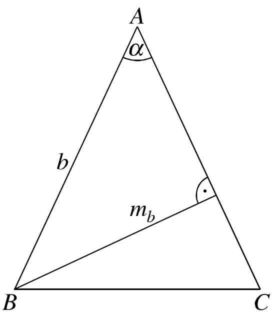


c) Az ABF háromszög három oldala $\left(b, s_b, \frac{b}{2}\right)$ adott, így most is szerkeszthető. (Lásd a 2334. feladatot!) A befejezés ugyanaz, mint az előző pontokban.

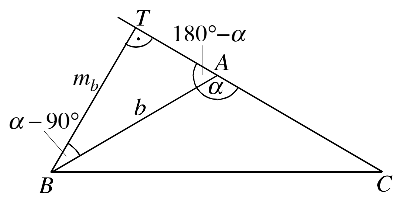
2344. *a)* – $\alpha < 90°$. Lásd a 2341/*i)* feladatot!

– $\alpha = 90°$. Ekkor $m_b = b$, a háromszög egyenlő szárú derékszögű.

– $90° < \alpha < 180°$. Az ATB háromszög szerkeszthető.



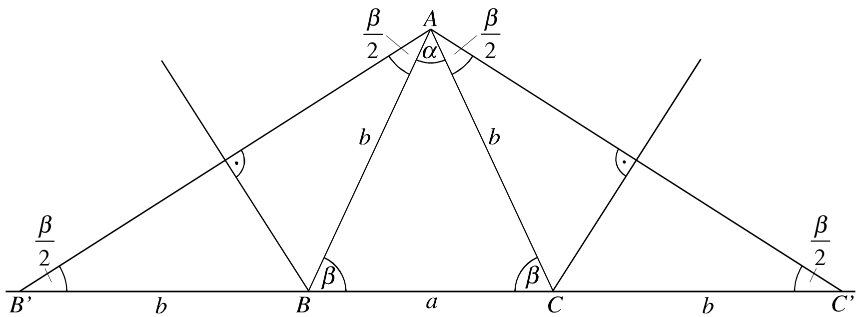
2344/1. ábra



2344/2. ábra

b) Lásd a 2341/*g)* feladatot! $a > m_b$ esetén van megoldás.

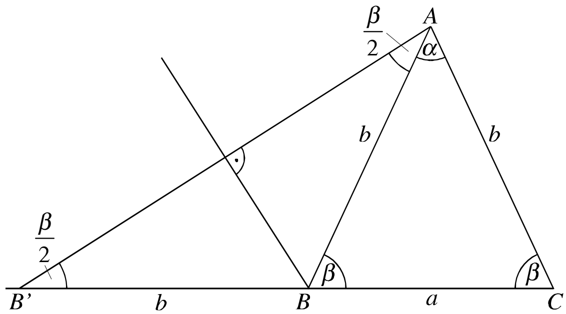
c) A 2344/3. ábra alapján $AB'B\sphericalangle = BAB'\sphericalangle = \frac{\beta}{2}$ és $AC'C\sphericalangle = CAC'\sphericalangle = \frac{\beta}{2}$, így az $AB'C'$ egyenlő szárú háromszög szerkeszthető (alapja és szögei adottak). Ezek után az AB' és az AC' oldalak felezőmerőlegesei kimetszik a $B'C'$ szakaszból a B és C csúcsokat. A szerkeszthetőség feltétele, hogy $\beta < 90°$ legyen.



2344/3. ábra

d) $\beta = 90° - \dfrac{\alpha}{2}$, így ez az eset visszavezethető az előzőre. ($\alpha < 180°$)

e) – *f)* Tegyük fel, hogy $\beta < 90°$ adott. $\left(\alpha = 90° - \dfrac{\beta}{2}\right)$ A 2344/4. ábra alapján (hasonlóan a *c)* ponthoz) az *AB'C* háromszög szerkeszthető (egy oldal és a rajta fekvő két szög adott – lásd a 2337. feladatot), és *B* a *B'C* szakasz azon pontja, amelyik egyenlő távol van *A*-tól és *B'*-től.



2344/4. ábra

g) Vegyünk fel az *R* sugarú körben egy *a* hosszúságú húrt. Ennek a húrnak a felezőmerőlegese kimetszi a körből az alappal szemközti csúcsot.
- $2R = a$. Egyértelmű megoldás, egyenlő szárú derékszögű háromszög.
- $2R > a$. Két nem egybevágó háromszög a megoldás.
- $2R < a$. Nincs megoldás.

h) Vegyünk fel az *R* sugarú körben egy *b* hosszúságú húrt, majd ennek egyik végpontjából húzzuk meg a kör átmérőjét. A húrt a tekintett átmérő egyenesére tükrözve megkapjuk a háromszög hiányzó csúcsát. A megoldhatósághoz szükséges, hogy $b < 2R$ teljesüljön. Ekkor a megoldás egyértelmű.

i) Az *R* sugarú kör egyik átmérőjére annak egyik végpontjából mérjük fel az m_a szakaszt, majd a kapott végpontban állítsunk rá merőlegest. Ez a merőleges kimetszi a körből az alap végpontjait. Ha $m_a < 2R$, akkor egyértelmű megoldás van, más esetben nincs megoldás.

j) Mivel $\delta + \beta = 90°$, ezért β szerkeszthető. Innen lásd a 2341/*d)* feladatot!
$\delta < 90°$ esetén egyértelmű megoldás van.

2345. Jelölje β az alapon fekvő, α a szárak által bezárt szöget. Ekkor $\alpha + 2\beta = 180°$.

a) $\beta = \frac{\alpha}{2}$, így $\alpha = 2\beta$, azaz $\alpha = 90°$, $\beta = 45°$;

b) $\beta = \frac{\alpha}{3}$, így $5\beta = 180°$, ahonnan $\beta = 36°$, $\alpha = 108°$;

c) $\beta = 2\alpha$, így $5\alpha = 180°$, ahonnan $\alpha = 36°$, $\beta = 72°$;

d) $\beta = 7\alpha$, így $15\alpha = 180°$, ahonnan $\alpha = 12°$, $\beta = 84°$.

A szerkesztésre nézve lásd a 2341/*d)* feladatot!

2346. Ha K a kerületet, a az alap hosszát b a szár hosszát jelöli, akkor $a + 2b = K$.

a) $b = 2a$, így $5a = 2$ dm, ahonnan $a = 0{,}4$ dm, $b = 0{,}8$ dm;

b) $b = 4a$, így $9a = 2$ dm, ahonnan $a = \frac{2}{9}$ dm, $b = \frac{8}{9}$ dm.

A szerkesztésre nézve lásd a 2341/*a)* feladatot!

2347. *a)* Lásd pl. a 2341/*a)* feladatot!

b) A magasság egyik végpontjába merőlegest, másik végpontjába 30°-os szögeket szerkesztünk mindkét oldalra.

c) A szabályos háromszög köré írható kör sugara a magasság $\frac{2}{3}$ része. (A köré írható kör középpontja súlypont is egyben.) Így belőle felezéssel, majd háromszorozással a magasságot kapjuk. (Lásd a *b)* pontot!)

d) A beírható kör sugara a magasság harmada. (A beírható kör középpontja is a súlypontban van.)

2348. *a)* Egy derékszög egyik szárára a-t, másik szárára b-t mérjük fel a csúcsból kiindulva.

b) A c átfogó mint átmérő fölé szerkesztett Thalész-körből, a-val körívezve c egyik végpontjából, kimetszük a derékszögű csúcsot.

c) A c mint átmérő feletti Thalész-körből a c-vel párhuzamos, tőle m_c távolságra levő egyenes metszi ki a derékszögű csúcsot.

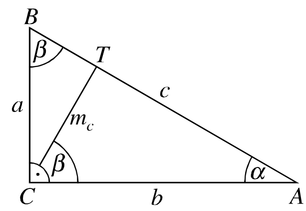
d) Egy derékszög egyik szárára mérjük fel a csúcsból kiindulva a-t, majd szerkesszünk a mint átmérő fölé Thalész-kört. A derékszög csúcsából m_c-vel körívezve kimetszük a Thalész-körből az átfogóhoz tartozó magasság talppontját. Ezt a másik végpontjával összekötve, majd a talpponton túl meghosszabbítva kapjuk az átfogót és a háromszög harmadik csúcsát.

e) $\beta = 90° - \alpha$, így szerkeszthető. Adott az a befogón fekvő két szög (β, 90°), így a háromszög a 2337. feladat alapján szerkeszthető.

f) Lásd az előző pontot!

g) $\alpha = 90° - \beta$. (Lásd az *e)* pontot vagy a 2337. feladatot!)

h) Mivel $TCA\sphericalangle = 90° - \alpha = \beta$, ezért az $ATC_\triangle$ szerkeszthető. (Lásd az *e)* pontot!) CA-ra C-ben merőlegest állítunk, majd AT-t T-n túl meghosszabbítjuk. Ezek metszéspontja lesz a B csúcs. A megoldás mindegyik esetben egybevágóság erejéig egyértelmű.



2349. *a)* Lásd a 2348/*d)* feladatot! A megoldhatósághoz szükséges, hogy $a > m_c$ teljesüljön. A megoldás $a > m_c$ esetén egyértelmű.

b) $\beta = 90° - \alpha$ szerkeszthető, így lásd a 2348/*g)* feladatot! A megoldhatósághoz szükséges, hogy $\alpha < 90°$ legyen. A megoldás $\alpha < 90°$ esetén egyértelmű.

c) Lásd a 2348/*e)* feladatot! Szükséges, hogy $\beta < 90°$ teljesüljön. A megoldás $\beta < 90°$ esetén egyértelmű.

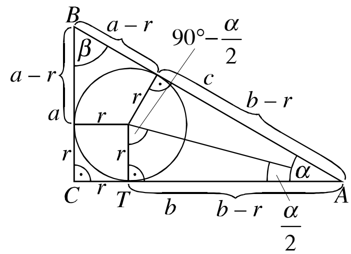
d) $c = 2R$, $\beta = 90° - \alpha$ adottak, így lásd a *b)* pontot. Szükséges, hogy $\alpha < 90°$ teljesüljön. Ekkor egyértelmű a megoldás.

e) $c = 2R$, így lásd a 2348/*c)* feladatot! A megoldhatóság feltétele, hogy $m_c \leqq R$ teljesüljön. Ebben az esetben a megoldás egyértelmű.

f) $c = 2R$, így lásd a 2348/*b)* feladatot! A megoldhatósághoz szükséges, hogy $b < 2R$ teljesüljön. Ekkor a megoldás egyértelmű.

2350. *a)* Az AOT háromszög szögei és egyik befogója adott, így szerkeszthető. (Lásd a 2348/*a)* feladatot!) Ezek után AT T-n túli meghosszabbítására mérjük fel T-ből r-t, kapjuk a C csúcsot. Az AC egyenest tükrözzük az AO egyenesre, adódik az átfogó egyenese, aminek az AC-re C-ben állított merőlegessel vett metszéspontja a B csúcs. A megoldhatósághoz szükséges, hogy $\alpha < 90°$ legyen, ekkor a megoldás egyértelmű.

b) – c) Az AOT háromszög most is szerkeszthető, hiszen két befogója $(r, b - r)$ adott. Innen lásd az előző pontot! A megoldáshoz szükséges, hogy $b > 2r$ teljesüljön. Ebben az esetben a megoldás egyértelmű.

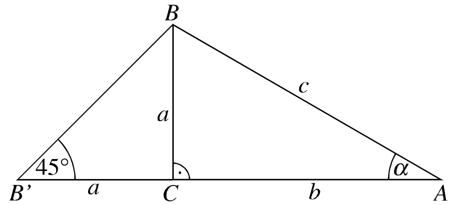


2350/1. ábra

d) Mivel $c + 2r$ és r adott, ezért c szerkeszthető. Másrészt a körhöz külső pontból húzott érintőszakaszok egyenlősége következtében

$$c = (a - r) + (b - r) = a + b - 2r,$$

ahonnan $a + b = c + 2r$. (Lásd a 2350/1. ábrát!) A 2350/2. ábrán látható ABB' háromszög két oldala ($a + b$, c) adott és a $BB'A\sphericalangle = 45°$, lévén a $BB'C$ derékszögű háromszög egyenlő szárú ($BC = B'C$). Mivel $\alpha < 90°$, ezért az ABB' háromszög egyértelműen szerkeszthető.



2350/2. ábra

Az ABB' háromszög szerkesztése: Az AB' szakaszra a B' pontban szerkesszünk 45°-os szöget, majd A-ból c-vel messük el a kapott szögszárat. Mivel $\alpha < 90°$, ezért a létrejövő metszéspontok közül a B'-höz közelebbi az $a < b$, távolabbi az $a > b$ esetnek felel meg. (Ha az adataink olyanok, hogy csak egy közös pont – érintési pont – jön létre, akkor $a = b$ és $\alpha = 45°$.)

Ha az ABB' háromszög megszerkesztett, akkor a B-ből AB'-re bocsátott merőleges talppontja lesz a C csúcs. Ahhoz, hogy adatainkból a háromszög szerkeszthető legyen szükséges, hogy az ABB' háromszög B csúcsa létrejöjjön. Szélső helyzetben (érintési pont) $AB = BB'$ és így az ABB' háromszög egyenlő szárú derékszögű. Pitagorasz tétele alapján ekkor $2c^2 = (a + b)^2$, ahonnan $c = \frac{a+b}{\sqrt{2}} = \frac{c+2r}{\sqrt{2}}$. Ha c ennél kisebb, nincs megoldás, ha nagyobb, vagy egyenlő, akkor egybevágóság erejéig egyértelmű megoldás van. Tehát $c \geqq \frac{c+2r}{\sqrt{2}}$, amiből figyelembe véve, hogy $c + 2r$ és r adott

$$(c+2r) - 2r \geqq \frac{c+2r}{\sqrt{2}},$$

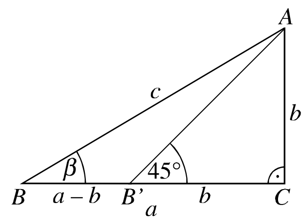
vagy

$$(c+2r)\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} \geqq r.$$

e) Mivel $c + 2r = a + b$, ezért az ABB' háromszög $\alpha < 90°$ esetén egyértelműen szerkeszthető (lásd a 2350/2. ábrát), ahonnan a befejezés az előző pontban leírtak alapján történik.

2351. *a)* Lásd az előző feladat *d)* pontját! A megoldáshoz szükséges, hogy $c \geqq \frac{a+b}{\sqrt{2}}$ teljesüljön. Ekkor egybevágóság erejéig egyértelmű megoldást kapunk.

b) Az adatokból adódóan $a > b$. A 2351/1. ábra alapján az ABB' háromszög szerkeszthető, hiszen adott két oldala ($a - b$, c) és a nagyobbikkal szemközti szög, amely, lévén az $AB'C$ egyenlő szárú derékszögű háromszög, 135°. (Az ABB' háromszög szerkesztésére nézve lásd a 2336. feladatot!) Ezek után a BB' egyenesére A-ból bocsátott merőleges talppontja lesz a C csúcs. A megoldhatósághoz szükséges, hogy $c > a - b$ teljesüljön, és ekkor egyértelmű megoldást kapunk.



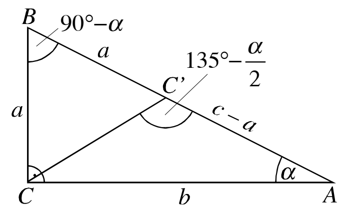
2351/1. ábra

c) Mivel $a > b$, ezért $45° < \alpha < 90°$ kell, hogy legyen. A 2351/1. ábrán látható, hogy az ABB' háromszögben $B'AB\sphericalangle = \alpha - 45°$ és $ABB'\sphericalangle = = \beta = 90° - \alpha$. Ismert tehát egy oldal $(a - b)$ és a rajta fekvő két szög $(90° - \alpha, 135°)$, így az ABB' háromszög szerkeszthető. (Lásd a 2337. feladatot!) Innen lásd az előző pontot! A megoldás egyértelmű.

d) Lásd az *a)* pontot!

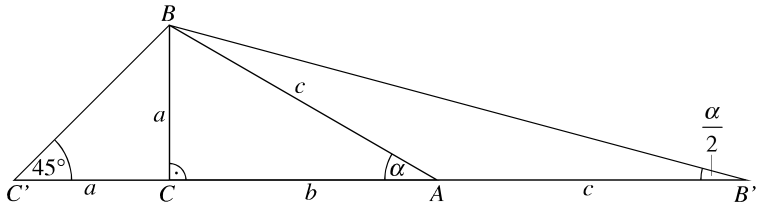
e) α adott, így a 2351/2. ábra alapján $ABC\sphericalangle = 90° - \alpha$,

$BCC'\sphericalangle = BC'C\sphericalangle = 45° + \dfrac{\alpha}{2}$, amiből $AC'C\sphericalangle = 135° - \dfrac{\alpha}{2}$. Így az $AC'C$ háromszögben adott egy oldal $(c - a)$ és a rajta fekvő két szög $\left(135° - \dfrac{\alpha}{2}, \alpha\right)$, tehát a háromszög szerkeszthető. (Lásd a 2337. feladatot!) A hiányzó B csúcsot az AC-re C-ben állított merőleges és az AC' C'-n túli meghosszabbításának metszéspontja adja. $\alpha < 90°$ esetén egyértelmű megoldást kapunk.



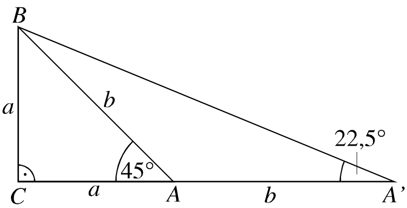
2351/2. ábra

f) A 2351/3. ábrán látható, hogy az adatokból a *BC'B'* háromszög szerkeszthető. (Lásd a 2337. feladatot!) A *C* és az *A* csúcsot a *C'B'* szakaszból a *BC'* és a *BB'* szakaszok felezőmerőlegesei metszik ki. Ha $\alpha < 90°$, a megoldás létezik és egyértelmű.



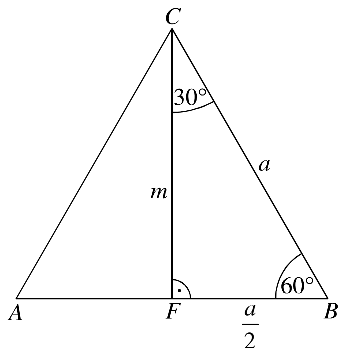
2351/3. ábra

2352. *a)* Az ábrán látható, hogy az adatokból az *A'BC* derékszögű háromszög szerkeszthető. (Egy oldal és a rajta fekvő két szög adott: $a + b$, 90°, 22,5°. A szerkesztésre nézve lásd a 2337. feladatot!) Ezek után $BC = a$-t CA'-re C-ből felmérve kapjuk az *A* csúcsot. A megoldás egyértelmű.



b) Mivel az egyenlő szárú derékszögű háromszög hegyesszöge 45°, ezért lásd a 2351/*e)* feladatot!

2353. Elegendő megszerkesztenünk a *BCF* derékszögű háromszöget (lásd az ábrát), ugyanis ennek a *CF* egyenesre való tükrözésével adódik a kívánt szabályos háromszög. A *BCF* háromszögre nézve adott $a + m$ és a szögek, így az előző feladat *a)* pontjában alkalmazott módszerrel szerkeszthető. A megoldás egyértelmű.



2354. Azonos a 2347. feladat *c)* és *d)* pontjával.

2355. Ha α és β a két hegyesszög, akkor $\alpha + \beta = 90°$, és ha $\alpha : \beta = p : q$, akkor

$$\alpha = \frac{p}{p+q} \cdot 90° \quad \text{és} \quad \beta = \frac{q}{p+q} \cdot 90°.$$

A szerkesztésekre nézve lásd a 2337. feladatot!

a) $\alpha = 30°$, $\beta = 60°$; *b)* $\alpha = 36°$, $\beta = 54°$; *c)* $\alpha = 20°$, $\beta = 70°$;

d) $\alpha = 18°$, $\beta = 72°$; *e)* $\alpha = 15°$, $\beta = 75°$; *f)* $\alpha = 40°$, $\beta = 50°$;

g) $\alpha = 35°$, $\beta = 55°$.

2356. Ha $\beta > \alpha$ és $\beta - \alpha = \delta$, akkor

$$\alpha = 45° - \frac{\delta}{2} \quad \text{és} \quad \beta = 45° + \frac{\delta}{2}.$$

A hegyesszögek ismeretében a szerkesztés a 2337. feladat alapján történhet.

a) $\alpha = 37{,}5°$, $\beta = 52{,}5°$; *b)* $\alpha = 33{,}75°$, $\beta = 56{,}25°$; *c)* $\alpha = 30°$, $\beta = 60°$;

d) $\alpha = 26{,}25°$, $\beta = 63{,}75°$; *e)* $\alpha = 22{,}5°$, $\beta = 67{,}5°$; *f)* $\alpha = 15°$, $\beta = 75°$;

g) $\alpha = 7{,}5°$, $\beta = 82{,}5°$.

(A szögek szerkesztésére nézve lásd a 2144-2146. feladatokat.)

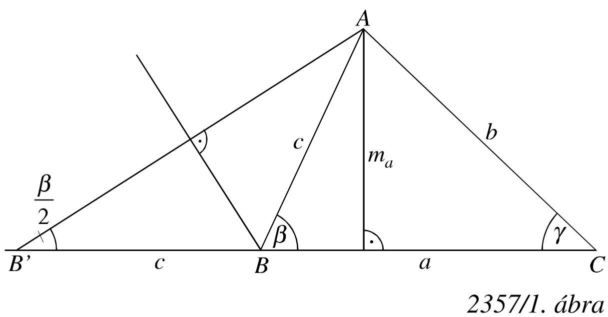
2357. *a)* α és β adott, ezért $\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$ is adott. Így két oldal és a rajta fekvő két szög ismeretében a 2337. feladat alapján a háromszög szerkeszthető. A szerkeszthetőség feltétele: $\alpha + \beta < 180°$.

b) Lásd a 2059. feladatot! A szerkeszthetőség feltétele: $c \geqq m_a$. Ha $c > m_a$, akkor két megoldás lehetséges attól függően, hogy a-t az m_a felöli, vagy a másik oldalra mérjük fel.

c) Lásd a 2058. feladatot! A szerkeszthetőség feltétele: $\beta < 180°$.

d) Lásd a *b)* pontot!

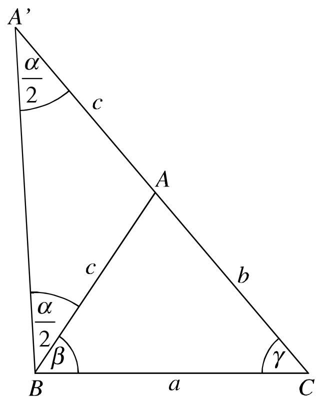
e) Az $AB'C$ háromszögnek adott két oldala ($a + c$, b) és az egyikhez tartozó magassága, így a *b)* pont alapján szerkeszthető. (2357/1. ábra) A $B'A$ szakasz felezőmerőlegesének a $B'C$ szakasszal vett metszéspontja a B csúcs. A szerkeszthetőség feltétele: $m_a \leqq b$ és $m_a < a + c$. A *b)* ponthoz hasonlóan itt is két megoldás lehetséges, ha $m_a < b$.



2357/1. ábra

f) Az $AB'C$ háromszög most is szerkeszthető, hiszen egy oldal ($a + c$) és a rajta fekvő két szög $\left(\frac{\beta}{2}, \gamma\right)$ adott. (Lásd a 2357/1. ábrát és a 2337. feladatot!) A B csúcsot az előző pontban leírt módszerrel kapjuk. A szerkeszthetőség feltétele: $\beta + \gamma < 180°$.

g) Az $A'BC$ háromszögben adott két oldal $(b+c, a)$ és a kisebbikkel szemközti szög $\left(\frac{\alpha}{2}\right)$. A szerkesztéshez szükséges, hogy $b+c>a$ teljesüljön. A szerkesztés: Az adott $A'C$ oldalra A-ban felvesszük az $\frac{\alpha}{2}$ szöget, majd a kapott szögszárat C-ből a sugarú körívvel elmetszve kapjuk a B csúcsot. Ha az adatok olyanok, hogy B nem jön létre, akkor nincs megoldás. Ha a C középpontú, a sugarú körnek érintője az $\frac{\alpha}{2}$ nagyságú szög szára, akkor a megoldás egyértelmű ($A'BC\sphericalangle = 90°$). Ekkor $b=c$, azaz a szerkesztett háromszög egyenlő szárú. Ha a B csúcsra két lehetőségünk van ($A'B$ szelője a C középpontú, a sugarú körnek), akkor két megoldást kapunk. Az A csúcsot az $A'B$ szakasz felezőmerőlegese metszi ki az $A'C$ szakaszból.

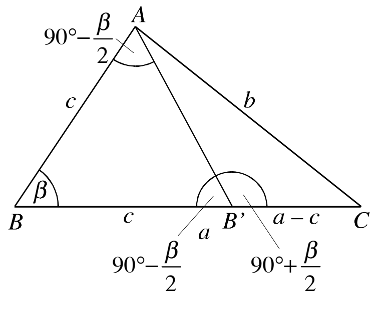


2357/2. ábra

h) Az $A'BC$ háromszög (2357/2. ábra) szerkeszthető, ugyanis adott két oldala $(a, b+c)$ és a közbezárt szög (γ). (Lásd a 2335. feladatot!) Az A csúcs az előző pontban leírtak alapján kapható. A szerkeszthetőség feltétele: $b+c>a$, $\gamma<180°$. A megoldás egyértelmű.

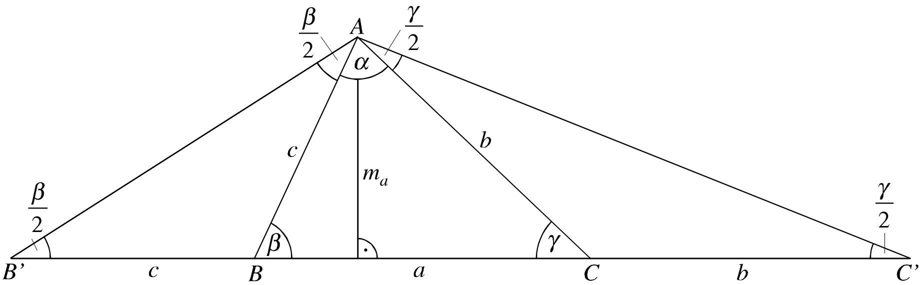
i) A 2357/1. ábrán látható $AB'C$ háromszög szerkeszthető. (Lásd a *c)* pontot!) A B csúcs az előző pontokban leírt módon kapható. A szerkeszthetőség feltétele: $a+c>m_a$, $\gamma<180°$.

j) A 2357/3. ábrán látható $AB'C$ háromszög szerkeszthető, ugyanis két oldala $(a-c, b)$ és a nagyobbikkal szemközti szög $\left(90°+\frac{\beta}{2}\right)$ adott. (Lásd a 2336. feladatot!) A B csúcsot az AB' szakasz felezőmerőlegese metszi ki a $B'C$ egyenesből. A szerkeszthetőség feltétele: $\beta<180°$, $a-c>0$, $b>a-c$. A megoldás egyértelmű.



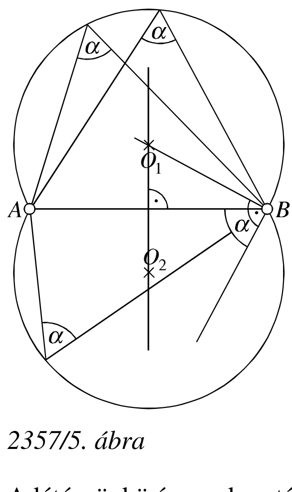
2357/3. ábra

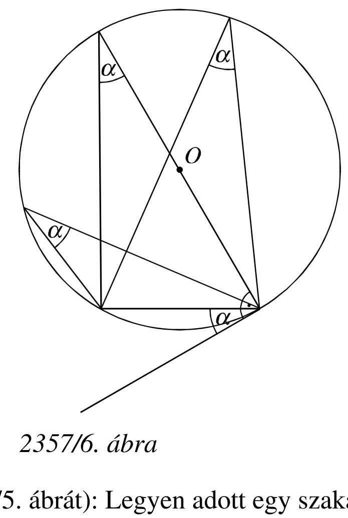
k) A 2357/4. ábrán látható $AB'C'$ háromszögnek ismert egy oldala $(a+b+c)$, a hozzá tartozó magasság (m_a) és az adott oldallal szemközti szög $\left(\alpha+\frac{\beta+\gamma}{2}=\alpha+\frac{180°-\alpha}{2}=90°+\frac{\alpha}{2}\right)$. Ez a háromszög szerkeszthető, bár a szerkesztéshez egy olyan tételt és ahhoz kapcsolódóan egy olyan szerkesztési eljárást fogunk alkalmazni, ami középiskolás tananyag. Ez a tétel Thalész tételének az általánosítása: Azon pontok halmaza a síkon, amelyekből a sík egy adott AB szakasza adott α ($0° < \alpha < 180°$) szög alatt látszik, két szimmetrikus körív, a látószögkörív, amelyek közös húrja az *AB* szakasz. Az *AB* szakasz végpontjai nem tartoznak a látószögkörívhez. ($\alpha = 90°$ esetén Thalesz tétele adódik.) (2375/5. ábra)



2357/4. ábra

A látószögkörív szerkesztéséhez az ún. kerületi szögek tételét használjuk, amely azt mondja ki, hogy egy körben az ugyanahhoz az ívhez tartozó kerületi szögek egyenlőek. (Kerületi szög: Csúcsa a kör kerületén van, szárai pedig a kör két húrja, vagy egy húr és egy érintő.) (2357/6. ábra)





2357/5. ábra *2357/6. ábra*

A látószögkörív szerkesztése (lásd a 2357/5. ábrát): Legyen adott egy szakasz és egy konvex szög.

1. Szerkesszük meg a szakasz felezőmerőlegesét
2. Vegyük fel a szakaszra, annak egyik végpontjában az adott szöget.
3. A szög csúcsában szerkesszünk azon szögszárra merőlegest, amelyre nem illeszkedik az adott szakasz.
4. Az adott szakasz felezőmerőlegesének és a fenti merőlegesnek a metszéspontja adja az egyik körív középpontját.
5. A másik középpont az adott szakasz egyenesére vonatkozó tükrözéssel adódik.

Ennyi bevezető után térjünk vissza az eredeti feladathoz. A szerkesztés (2357/4. ábra):

1. A $B'C'$ $(a + b + c)$ szakasz fölé szerkesszük meg a $90°+\frac{\alpha}{2}$ szögű látószögkörív egyik felét.
2. A körív felöli oldalra $B'C'$-től m_a távolságra szerkesszünk $B'C'$-vel párhuzamost.
3. A körív és a párhuzamos metszéspontja az A csúcs.
4. AB' és AC' felezőmerőlegese metszi ki $B'C'$-ből a B és a C csúcsot.

A megoldás egybevágóság erejéig egyértelmű, ha a körívnek és a párhuzamosnak van közös pontja, egyébként nincs megoldás.

2358. *a)* Vegyünk fel egy R sugarú kört, majd abban egy a hosszúságú húrt. Ezek után a húr egyenesétől m_a távolságra, a húrral párhuzamosan vegyünk fel két egyenest. Ezen egyenesek és a kör metszéspontjai szolgáltatják az a oldallal szemközti csúcsokat.

A szerkeszthetőség szükséges feltételei: $a \leqq 2R$, $m_a < 2R$. Ha csak az egyik párhuzamos egyenesnek van közös pontja a körrel, akkor egybevágóság erejéig egyértelmű a megoldás. Ha mindkét párhuzamosnak van közös pontja a körrel, akkor két nem egybevágó megoldást kapunk. Ha egyik párhuzamosnak sincs pontja a körön, akkor nincs megoldás.

b) Az R sugarú kör a hosszúságú húrjára egyik végpontjában felvett β szög szára metszi ki a körből az a oldallal szemközti csúcsot. A szerkeszthetőség feltételei: $a \leqq 2R$, $\beta < 180°$. A megoldás egyértelmű.

c) Az R sugarú kör a hosszúságú húrjának felezőpontjából s_a-val körívezve metszük ki a körből az a oldallal szemközti csúcsot. A szerkeszthetőség feltételei: $a \leqq 2R$. Ha nem jön létre metszéspont, akkor nincs megoldás. Ha van metszéspont, akkor a megoldás egybevágóság erejéig egyértelmű.

d) Az R sugarú kör b hosszúságú húrja mint átmérő fölé szerkesszünk Thalesz-kört. Ezt a Thalesz-kört messük el a húr valamelyik végpontjából m_a-val körívezve. A kapott pont és a húr másik végpontja adja az a oldal egyenesét. Ennek az egyenesnek az R sugarú körrel vett másik metszéspontja a B csúcs. A szerkeszthetőség feltételei: $b \leqq 2R$, $m_a < b$. A megoldás egyértelmű.

e) Az s_a mint átmérő fölé szerkesszünk Thalesz-kört. Ezt s_a egyik végpontjából m_a-val körívezve (legyen $m_a < s_a$) messük el. A kapott metszéspont és s_a másik végpontja meghatározza az a oldal egyenesét. Erre s_a végpontjából mindkét irányban $\frac{a}{2}$-t felmérve adódik a B és a C csúcs. A szerkeszthetőség feltétele: $m_a \leqq s_a$. Ha $m_a = s_a$, akkor a háromszög egyenlőszárú. A megoldás egybevágóság erejéig egyértelmű.

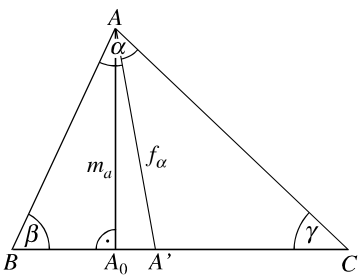
f) Szerkesszünk a b oldal mint átmérő fölé Thalesz-kört. Ezt b egyik végpontjából messük el m_a-val. Ez a pont és b másik végpontja meghatározza az a oldal egyenesét. Ezt az egyenest b azon végpontjából, amelyből m_a-val körívteztünk messük el s_a-val. A kapott pont lesz az a oldal felezőpontja. Innen az a oldal és így a háromszög már szerkeszthető. A szerkeszthetőség szükséges feltételei: $m_a \leqq s_a$, $m_a \leqq b$. Ha

$m_a = s_a$, akkor a háromszög egyenlőszárú. Ha $m_a = b$, akkor a háromszög derékszögű. Ha $m_a < s_a$, akkor két nem egybevágó háromszög a megoldás.

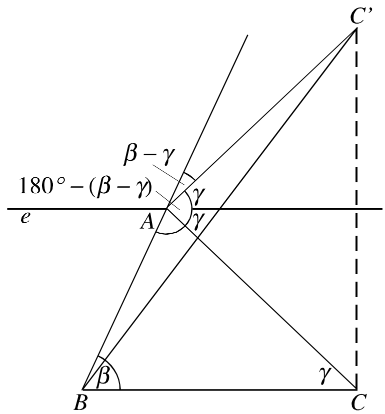
2359. *a)* Ha $m_a = f_\alpha$, akkor a háromszög egyenlő szárú. (Lásd a 2341/*b)* feladatot!) Tegyük fel, hogy $f_\alpha > m_a$. Ekkor

$$A'AA_0\sphericalangle = \frac{\alpha}{2} - (90° - \beta) = 90° - \frac{\beta+\gamma}{2} - (90° - \beta) = \frac{\beta-\gamma}{2}.$$

Mivel az $A'AA_0$ háromszög szerkeszthető (lásd a 2348/*b)* feladatot), ezért adott számunkra az a oldalon fekvő két szög különbsége, $\beta - \gamma$. (Most feltesszük, hogy $\beta > \gamma$.)



2359/1. ábra

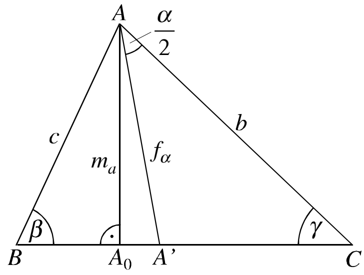


2359/2. ábra

A 2359/2. ábrán látható, hogy a háromszög A csúcsát a BC' szakasz fölé szerkesztett $180° - (\beta - \gamma)$ szögű látószögkörív (lásd a 2357. feladat *k)* pontját) metszi ki a BC-vel párhuzamos, tőle m_a távolságra levő e egyenesből. (C' a C pont e egyenesre vonatkozó tükörképe.) Mivel feltételeztük, hogy $\beta > \gamma$, ezért a feladat megoldása egyértelmű.

b) Ha $m_a = f_\alpha$, akkor a háromszög egyenlő szárú, ennek szerkesztésére nézve lásd a 2341/*h)* feladatot.
Tegyük fel, hogy $f_\alpha > m_a$. Az $A'AA_0$ háromszög szerkeszthető (lásd a 2348/*b)* feladatot). A-ban f_α-ra a 2359/3. ábrának megfelelően mindkét oldalra felmérve az $\frac{\alpha}{2}$ nagyságú szöget, a szögszárak kimetszik az A_0A' egyenesből a B és a C csúcsot.

Ha $\alpha < 180°$ és $f_\alpha \geqq m_a$, akkor a feladat megoldása egyértelmű.

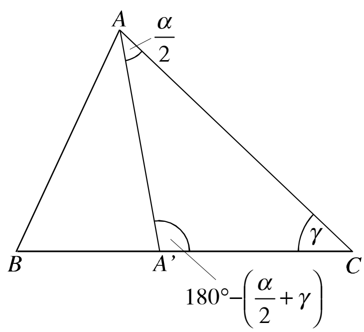


2359/3. ábra

c) A szerkesztés itt is az $A'AA_0$ derékszögű háromszög megszerkesztésével kezdődik, ha $f_\alpha > m_a$. ($m_a = f_\alpha$ esetre lásd a 2341/*f)* feladatot!) Ha $b > f_\alpha$, akkor A-ból m_a-val átellenes oldalra körívezve kapjuk a C csúcsot, ha $b \leqq f_\alpha$, akkor a másik irányba kell köríveznünk. (Ez az ábrán annak felel meg, hogy a c oldal adott.) A B csúcsot a b oldal f_α egyenesére vonatkozó tükörképe metszi ki az A_0A' egyenesből. A megoldás egyértelmű.

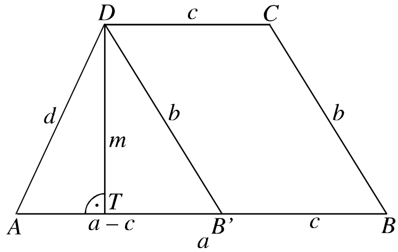
d) Ha $m_a = f_\alpha$, akkor az AA_0C háromszög (lásd a 2348/*e)* feladatot) m_a egyenesére vonatkozó tükörképének és az AA_0C háromszögnek az egyesítése a szerkesztendő háromszög.
Ha $m_a < f_\alpha$, akkor az AA_0C háromszög (2359/3. ábra) most is szerkeszthető. A-ból f_α-val körívezve adódik az A_0C szakaszon az A' pont. A B csúcs ugyanúgy kapható meg, mint az előző pontban. Ha az adatok az ábrának megfelelőek, akkor $b > f_\alpha > m_a$. Ekkor a megoldás egyértelmű.

e) Tegyük fel, hogy $\beta > \gamma$. Az $AA'C$ háromszög szerkeszthető, hiszen egy oldala és a rajta fekvő két szög adott. A B csúcs szerkesztése az előző pontokban leírtakhoz hasonlóan történik. Ha $\beta + \gamma < 180°$, akkor a megoldás egyértelmű. (2359/4. ábra)



2359/4. ábra

2360. *a)* Az ábrán látható $AB'D$ egyenlő szárú háromszög szerkeszthető, ugyanis adott szárainak és alaphoz tartozó magasságának a hossza. (Lásd a 2341/*f)* feladatot!) Mivel $B'BCD$ paralelogramma, ezért B és C könnyen szerkeszthető.

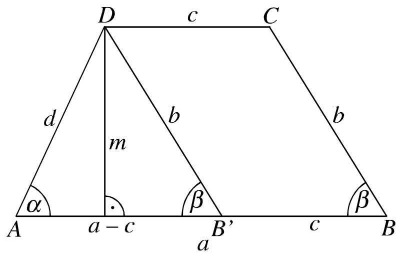


b) Az ábra $AB'D$ háromszögének adottak az oldalai, így szerkeszthető.

c) Az a oldallal párhuzamos, tőle m távolságra lévő egyenest a végpontjaiból elmetszszük b-vel és d-vel. A kapott metszéspontok lesznek a trapéz hiányzó csúcsai. A feladatnak négy megoldása van.

d) Az ábra $AB'D$ háromszöge szerkeszthető, hiszen oldalai ($a - c$; b; d) adottak.

2361. *a)* A 2361/1. ábrán látható $AB'D$ háromszög az adatok alapján szabályos és adott a magassága, így szerkeszthető. (Lásd a 2347/*b)* feladatot!) A $B'BCD$ négyszög paralelogramma, és az a oldal hossza adott, így a B és a C csúcs szerkeszthető.

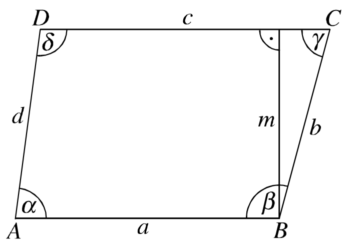


2361/1. ábra

b) Az a oldalra, annak jobb végpontjában vegyük fel a β szöget. A kapott szögszárra felmérve a b oldalt, adódik a C csúcs. Húzzunk C-n keresztül a-val párhuzamost, majd ezt messük el az a oldal bal végpontjából d-vel. A D csúcsra két lehetőségünk van, így a feladatnak két megoldása van.

c) A 2361/1. ábrán látható $AB'D$ háromszögnek adott egyik oldala ($a - c$), a hozzá tartozó magasság és az adott oldalra illeszkedő egyik szög, így szerkeszthető. (Lásd a 2357/*c)* feladatot!) A B és a C csúcs az *a)* pontban leírtak alapján adódik.

d) A c oldalon fekvő szögek: $\gamma = 75°$; $\delta = 97{,}5°$. Ezeket a szögeket vegyük fel c-re a végpontokban, majd a szögszárakat messük el a c-től m távolságra haladó párhuzamos egyenessel. (2362/2. ábra)



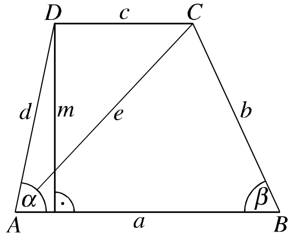
2361/2. ábra

e) Vegyük fel az a oldalt, majd vele párhuzamosan, tőle m távolságban egy egyenest. Vegyük fel az α szöget az a bal végpontjában. A szögszár és a párhuzamos metszéspontja lesz a D csúcs. Ebből c-t felmérve adódik a C csúcs.

f) Mivel $a = c$, ezért a trapéz paralelogramma lesz. Szerkesztése az *e)* pontban leírtakhoz hasonlóan történik.

Megjegyzés: A szögek szerkesztésére nézve lásd a 2144-2146. feladatokat!

2362. *a)* Az ABC háromszög szerkeszthető, hiszen adott három oldala. C-n keresztül AB-vel párhuzamost húzva és arra C-ből a c oldalt felmérve adódik a D csúcs.



b) Az ABC háromszög most is szerkeszthető. A-ban az AB oldalra felmérve α-t, a kapott szögszár és a C-re illeszkedő, AB-vel párhuzamos egyenes metszéspontja lesz a D csúcs.

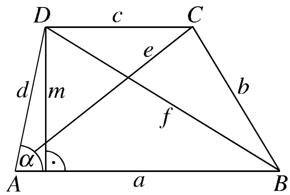
c) Most az ACD háromszög szerkeszthető három oldalából. Ezek után CD-re C-ben vegyük fel a $180° - \beta = 105°$ nagyságú szöget. A kapott szögszár és az A-ra illeszkedő, CD-vel párhuzamos egyenes metszéspontja lesz a B csúcs.

d) Az ABC háromszögnek adott két oldala és az egyikhez tartozó magasság, így a háromszög szerkeszthető. (Lásd a 2357/*d)* feladatot!) AB-re A-ban vegyük fel α-t, majd messük el a kapott szögszárat az AB-vel párhuzamos, C-re illeszkedő egyenessel. A metszéspont lesz a D csúcs.

e) Az ABC háromszög megszerkesztése után messük el A-ból d távolsággal az AB-vel párhuzamos, C-re illeszkedő egyenest, kapjuk a D csúcsot. Két megoldást kapunk.

Megjegyzés: A szögek szerkesztésére nézve lásd a 2144-2146. feladatokat!

2363. *a) – c)* Messük el az a oldallal párhuzamos, tőle m távolságra levő egyenest az A csúcsból e-vel, a B csúcsból f-fel az ábrának megfelelően. Így adódik a C és a D csúcs. A *c)* esetben a trapéz szimmetrikus.



d) Az ABC háromszög szerkeszthető, hiszen adott három oldala (a, b, e). A D csúcsot az a-val párhuzamos, C-re illeszkedő egyenesből a B végpontú, f hosszúságú szakasszal metszhetjük ki az ábrának megfelelően.

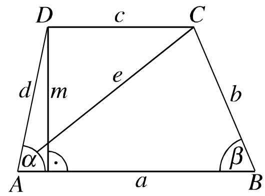
e) A D csúcsot az a-ra A-ban felvett α szög szárából az a-val párhuzamos, tőle m távolságra lévő egyenes metszi ki. A C csúcs A-ból e-vel körívezve adódik az ábrának megfelelően.

f) Az ABD háromszög szerkeszthető, hiszen adott két oldala és az általuk közbezárt szög (a, d, α). A C csúcsot az előző *e)* ponthoz hasonlóan kapjuk.

Megjegyzés: A szögek szerkesztésére nézve lásd a 2144-2146. feladatokat!

2364. *a)* Lásd a 2360/*d)* feladatot! Ha $b + d > a - c$ $(a \geqq c)$, és $a - c + b > d$, akkor a feladat megoldása egyértelmű

b) Lásd a 2361/*a)* feladatot! ha $\alpha < 180°$ és $\beta < 180°$, akkor a megoldás egyértelmű.



2364/1. ábra

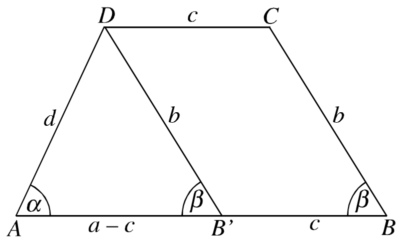
c) Az ABC háromszög szerkeszthető, hiszen adott két oldala és az általuk közbezárt szög (a, b, β). Az a oldalra az A csúcsba a 2364/1. ábrának megfelelően felvett α szög szára kimetszi a C-re illeszkedő, a-val párhuzamos egyenesből a D csúcsot. Ha $\alpha < 180°$ és $\beta < 180°$, akkor a megoldás egyértelmű.

d) Az ABC háromszög szerkeszthető $(a, e, \beta$ adott), viszont, ha $e \leqq a$, akkor két különböző megfelelő háromszög adódhat. (Lásd még a 2338. feladatot!) A D csúcs az előző *c)* pontban leírtak alapján adódik. Attól függően, hogy az ABC háromszög szerkesztésekor 0, 1 ill. 2 megoldás adódik, az eredeti feladat megoldásainak a száma is 0, 1, 2 lehet.

e) Az ACD háromszög szerkeszthető, hiszen $CDA\sphericalangle = 180° - \alpha$. (Ha $c \geqq e$, akkor előfordulhat, hogy nem kapunk megoldást, vagy két háromszög is megfelelő.) A c-vel párhuzamos, A-ra illeszkedő egyenesen A-ból a 2364/1. ábrának megfelelően felmérve a-t adódik a B csúcs. $\alpha < 180°$ esetén, attól függően, hogy az A csúcsra hány megoldás adódik, az eredeti feladat megoldásainak a száma 0,1 ill. 2 lehet.

f) Az a oldallal párhuzamos, tőle m távolságra levő egyenest B-ből b-vel elmetszve adódik a C csúcs. C-ből c-t a 2364/1. ábrának megfelelően felmérve adódik D. Ha $b > m$, akkor két megoldást kapunk. Ha $b = m$, akkor a trapéz egyértelmű és derékszögű. $b < m$ esetén nincs megoldás.

g) Tegyük fel, hogy $a > c$. (Ellenkező esetben a szerkesztés hasonlóan történik.) Az $AB'D$ háromszög szerkeszthető, hiszen két oldala $(a - c, d)$ és egy szöge (β) adott. (Ha $d \leqq a - c$, akkor előfordulhat, hogy nem kapunk megoldást, vagy két háromszög is megfelelő.) Az AB' szakasz B-n túli meghosszabbítására B'-ből felmérve c-t, a B csúcsot kapjuk. Az AB-vel párhuzamos, D-re illeszkedő egyenesre D-ből felmérve c-t, a C csúcsot kapjuk. Feltéve, hogy $\beta < 180°$, attól függően, hogy a D csúcsra hány megoldás adódik, az eredeti feladat megoldásainak a száma lehet 0, 1 ill. 2.



2364/2 ábra

h) Tegyük fel, hogy $a > c$. Ekkor a 2364/2. ábra $AB'D$ háromszöge egyértelműen szerkeszthető, feltéve, hogy $\alpha + \beta < 180°$. A B és a C csúcs szerkesztése az előző *g)* pontban leírtak alapján történik. A fenti feltételek mellett a megoldás egyértelmű.

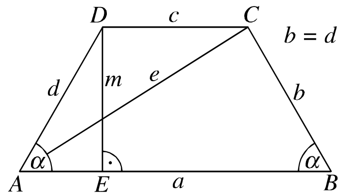
i) Lásd a 2361/*e)* feladatot! A feladat megoldása egyértelmű.

j) A 2364/1. ábra ABC háromszöge szerkeszthető. (Ha $e \leqq a$, előfordulhat, hogy a háromszög nem szerkeszthető, de az is, hogy a C csúcsra két megoldást kapunk.) A C-re illeszkedő a-val párhuzamos egyenesre az ábrának megfelelően felmérve c-t adódik a D csúcs. A C csúcsra kapott lehetséges megoldásoktól függően az eredeti feladat megoldásainak száma lehet 0, 1 ill. 2.

k) Lásd az *e)* pontot!

l) Az a-val párhuzamos, tőle m távolságra lévő egyenest A-ból e-vel a 2364/1. ábrának megfelelően elmetszve adódik a C csúcs. Ebből az ábrának megfelelően c-t felmérve kapjuk D-t. Egyértelmű megoldást kapunk, ha $e > m$, ellenkező esetben nem kapunk megoldást.

2365. *a)* Mivel $AE = \dfrac{a-c}{2}$ és $\alpha = 60°$, ezért $d = b = a - c$. (Az AED háromszög egy szabályos háromszög „fele”.) Az AED háromszög szerkeszthető. Az ábrának megfelelően A-ból a-t felmérve az AE egyenesen, a B csúcsot kapjuk. Az AB-vel párhuzamos, D-re illeszkedő egyenesen az ábrának megfelelően c-t felmérve, a C csúcs adódik.



b) A szerkesztés az előző *a)* pontban leírtak alapján történik.

c) Vegyük fel az a oldallal párhuzamos, tőle m távolságra lévő egyenest, majd messük el ezt b-vel az a oldal mindkét végpontjából körívezve. A feladatnak két megoldása van.

d) Vegyük fel a-ra mindkét végpontjában az α szöget az ábrának megfelelően, majd mindkét szögszárra a szög csúcsából mérjük fel b-t.

e) Az ABC háromszög szerkeszthető, hiszen adott három oldala. A C csúcsot tükrözve az a oldal felezőmerőlegesére, adódik a D csúcs.

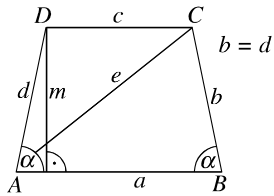
f) Az ABC háromszög szerkeszthető. (Az adatok alapján C-re két megoldás adódik.) A D csúcs szerkesztése az előző *e)* pont alapján történhet. A feladatnak két megoldása van.

Megjegyzés: A szögek szerkesztésére nézve lásd a 2144-2146. feladatokat!

2366. *a)* Lásd a 2360/*d)* és a 2364/*a)* feladatokat. (Most $b = d$.) Ha $2b > a - c$, akkor a megoldás egyértelmű.

b) Tegyük fel, hogy $\alpha < 90°$. Ekkor lásd a 2365/*d)* feladatot.

c) Mivel $AE = \dfrac{a-c}{2}$ (feltesszük, hogy $a > c$), ezért az AED derékszögű háromszög szerkeszthető. A befejezés a 2365/*a)* feladat alapján történhet. A megoldás egyértelmű, $a = c$ esetén téglalapot kapunk.

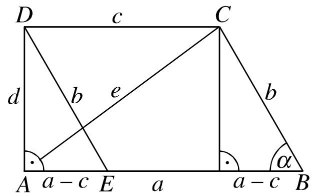


d) Lásd a 2365/*e)* feladatot! Ha $e + b > a$ és $a + b > e$, akkor a megoldás egyértelmű.

e) Mivel a szimmetrikus trapéz átlói egyenlő hosszúak, ezért $BD = e$ és $BE = a - \frac{a-c}{2} = \frac{a+c}{2}$ (feltesszük, hogy $a > c$). Így az EBD derékszögű háromszög szerkeszthető. (Lásd a 2348/*b)* feladatot!) E-ből EB egyenesén az ábrának megfelelően $\frac{a-c}{2}$-t felmérve kapjuk az A csúcsot. A C csúcs D-nek az AB felezőmerőlegesére történő tükrözésével adódik. A megoldás egyértelmű, ha $e > \frac{a+c}{2}$, ellenkező esetben nem kapunk megoldást. Ha $a = c$, akkor a trapéz téglalap.

f) Lásd a *d)* pontot!

2367. *a)* Szerkesszünk az a oldal A végpontjába merőlegest és erre mérjük fel A-ból d-t. A d oldalra D-ben szerkesszünk merőlegest az ábrának megfelelően, és mérjük fel erre D-ből c-t. Egyértelmű megoldást kapunk.



b) Az AED derékszögű háromszög szerkeszthető (lásd a 2348/*b)* feladatot), ha $a - c < b$. Az AE oldal E-n túli meghosszabbítására E-ből c-t felmérve adódik a B csúcs. Az AB-vel párhuzamos, D-re illeszkedő egyenesre D-ből az ábrának megfelelően c-t felmérve adódik a C csúcs. Ha $a - c < b$, akkor a megoldás egyértelmű, ellenkező esetben nem kapunk megoldást.

c) Az FBC derékszögű háromszög szerkeszthető. (Feltesszük, hogy $\alpha < 90°$ és $a - c < b$.) Az FB oldal F-en túli meghosszabbítására B-ből a-t felmérve kapjuk az A csúcsot. Az AB-vel párhuzamos, C-re illeszkedő egyenesre C-ből c-t az ábrának megfelelően felmérve adódik a D csúcs. Feltételeink mellett a megoldás egyértelmű.

d) Az ABC háromszögnek adott három oldala, így szerkeszthető, ha $e + b > a$ és $a + b > e$. A D csúcsot az AB-re A-ban állított merőleges metszi ki a C-re illeszkedő, AB-vel párhuzamos egyenesből. A feltételek mellett a megoldás egyértelmű, ellenkező esetben nincs megoldás.

e) Az ABC háromszög szerkeszthető, innen a befejezés ugyanaz, mint az előző pontban.

f) Az ABD derékszögű háromszögnek adott két befogója, így szerkeszthető. A C csúcsot az AB-vel párhuzamos, D-re illeszkedő egyenes és az A középpontú, e sugarú kör megfelelő metszéspontja adja. Ha $e > d$, akkor a megoldás egyértelmű, ellenkező esetben nincs megoldás.

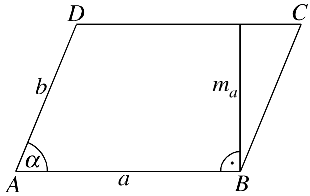
g) Az ACD derékszögű háromszög szerkeszthető. A B csúcs a c-vel párhuzamos, A-ra illeszkedő egyenes és a C középpontú, b sugarú kör metszéspontjaként adódik. Ha $b < d$, nincs megoldás. $b = d$ esetén téglalapot kapunk. Ha $d < b < \sqrt{c^2 + d^2}$, akkor két megoldást kapunk, ha $b > \sqrt{c^2 + d^2}$, akkor egy megoldás van.

h) Az ACD derékszögű háromszög szerkeszthető (lásd a 2348/*b)* feladatot). Innen a B csúcs az előző ponthoz hasonlóan adódik. Ha $e \leqq c$, akkor nincs megoldás. Ha $c < e$

és $e > b > \sqrt{e^2 - c^2}$, akkor két megoldás van. Ha $b > e$, akkor a megoldás egyértelmű.

i) Mivel $BCD\sphericalangle = 180° - \alpha$, ezért a BCD háromszög szerkeszthető. Az A csúcsot a D-ben c-re állított merőleges metszi ki a B-re illeszkedő, c-vel párhuzamos egyenesből. Ha a D-ben c-re állított merőlegesnek nincs közös pontja a BC szakasszal, akkor a megoldás egyértelmű, ellenkező esetben nincs megoldás.

2368. *a) – b)* Az ABD háromszög szerkeszthető, hiszen két oldala és a közbezárt szög adott. Az A csúcs BD felezőpontjára vonatkozó tükörképe a C csúcs.

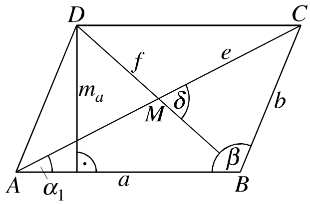


c) – d) Az a-val párhuzamos, tőle m_a távolságra levő egyenesből az a-ra A-ban felvett α szög szára metszi ki a D csúcsot. Innen a befejezés ugyanaz, mint az előző két pont esetében.

e) – f) Az a-val párhuzamos, tőle m_a távolságra levő egyenesből az A ill. B középpontú, b sugarú körök metszik ki a D ill. a C csúcsot az ábrának megfelelően.

Megjegyzés: A szögek szerkesztésére nézve lásd a 2144-2146. feladatokat!

2369. *a)* Az ABC háromszög szerkeszthető, hiszen adott három oldala. A B csúcs AC felezőpontjára vonatkozó tükörképe a D csúcs.



b) Az ABC háromszög egyértelműen szerkeszthető, hiszen adott két oldala és a nagyobbikkal szemközti szög. Innen a befejezés ugyanaz, mint az előző pontban.

c) Az ABM háromszög szerkeszthető, hiszen adott három oldala $\left(a, \frac{e}{2}, \frac{f}{2}\right)$. A-t és B-t M-re tükrözve adódik a B és a C csúcs.

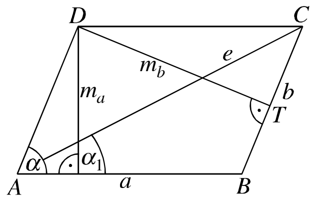
d) Az ABM háromszög szerkeszthető, hiszen adott két oldala $\left(a, \frac{f}{2}\right)$ és a nagyobbikkal szemközti szög $(180° - \delta)$. Innen a befejezés ugyanaz, mint az előző pontban.

e) Az a-val párhuzamos, tőle m_a távolságra levő egyenesből az A középpontú, e sugarú kör az ábrának megfelelően kimetszi a C csúcsot. A D csúcs B-nek az AC felezőpontjára vonatkozó tükörképe.

f) Az ABC háromszög szerkeszthető, hiszen adott két oldala és a közbezárt szög. Innen a befejezés az előző ponthoz hasonlóan történhet.

g) Lásd a *d)* pontot!

Megjegyzés: A szögek szerkesztésére nézve lásd a 2144-2146. feladatokat!



2370. *a)* Lásd a 2368/*a)* feladatot! Ha $\alpha < 180°$, akkor a megoldás egyértelmű.

b) Lásd a 2368/*e)* feladatot! $m_a \leqq e$ esetén egyértelmű megoldást kapunk.

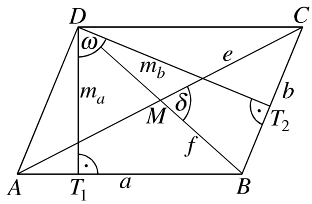
c) Lásd a 2369/*a)* feladatot! $a + b > e$ és $a + e > b$ esetén a megoldás egyértelmű.

d) Lásd a 2368/*d)* feladatot! $\alpha < 180°$ esetén a megoldás egyértelmű.

e) a és m_b egyértelműen meghatározza a CDT derékszögű háromszöget. (Lásd pl. a 2348/*b)* feladatot!) Ha $m_b < a$ és az m_b-vel szemközti hegyesszög éppen α, akkor végtelen sok megoldás van, ellenkező esetben nincs megoldás.

f) Lásd a 2369/*f)* feladatot! Ha $\alpha_1 < 180°$, akkor a megoldás egyértelmű.

g) Lásd a 2369/*e)* feladatot! $m_a \leqq e$ esetén egyértelmű megoldást kapunk.



2371. *a)* Lásd a 2369/*c)* feladatot! Egyértelmű megoldást kapunk, ha $e + f > 2a$ és $a + \frac{e}{2} > \frac{f}{2}$.

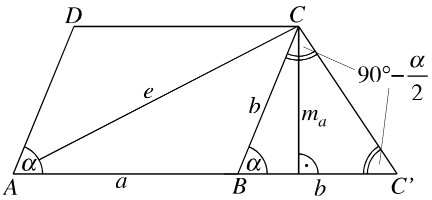
b) A BCM háromszög szerkeszthető, hiszen két oldala és a közbezárt szög adott $\left(\frac{e}{2}, \frac{f}{2}, \delta\right)$. B-t és C-t M-re tükrözve kapjuk D-t és A-t.

c) Vegyünk fel egymástól m_a távolságra két párhuzamos egyenest. Ezek sávfelező egyenesén jelöljünk ki egy M pontot. Az M középpontú $\frac{e}{2}$ és $\frac{f}{2}$ sugarú köröknek és a párhuzamos egyeneseknek az ábrának megfelelően vett metszéspontjai lesznek a paralelogramma csúcsai. $e > m_a$ és $f > m_a$ esetén a megoldás egyértelmű, ellenkező esetben nincs megoldás.

d) Mivel $DT_1B\sphericalangle = BT_2D\sphericalangle = 90°$, ezért $ABC\sphericalangle = 180° - \omega$, ahonnan $DAB\sphericalangle = \omega$. Így az ω szög száraival párhuzamos, azoktól m_a ill. m_b távolságra levő egyenesek a felvett szög száraival meghatározzák a paralelogrammát. $\omega < 180°$ esetén egyértelmű megoldást kapunk.

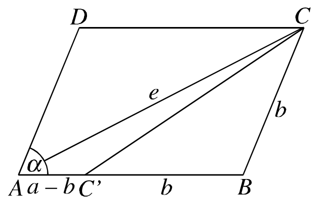
e) Vegyünk fel egymástól m_a távolságra két egyenest és közöttük egy e hosszúságú szakaszt. (Ez lesz az AC átló, A az egyik, C a másik egyenesre illeszkedik.) AC M felezőpontjában vegyük fel e-re a δ szöget az ábrának megfelelően. A kapott szögszár egyenese kimetszi a párhuzamosokból a B és a D csúcsot. $e \geqq m_a$ és $\delta < 180°$ esetén a megoldás egyértelmű.

2372. *a)* A 2372/1. ábrán látható $AC'C$ háromszög szerkeszthető, hiszen adott két oldala $(a + b, e)$ és egy szöge $\left(90° - \frac{\alpha}{2}\right)$. Ha ez kész, akkor az AC' oldalra A-ban vegyük fel az α szöget. A C-re illeszkedő, AC'-vel párhuzamos egyenesből a kapott szögszár kimetszi a D csúcsot. Ennek e (AC) felezőpontjára vonatkozó tükörképe B. Az $AC'C$ háromszögre kaphatunk 0, 1 ill. 2 megoldást. Ennek megfelelő az eredeti feladat megoldásainak száma is.



2372/1. ábra

b) A 2372/2. ábrán látható $AC'C$ háromszög szerkeszthető, hiszen adott két oldala $(a - b, e)$ és a nagyobbikkal szemközti szög $\left(AC'C\sphericalangle = 180° - \frac{\alpha}{2}\right)$. Innen a befejezés ugyanaz, mint az előző pontban. $0 < a - b < e$ esetén a megoldás egyértelmű, ellenkező esetben nincs megoldás.



2372/2. ábra

c) A 2372/1. ábra $AC'C$ háromszöge szerkeszthető. (Lásd a 2357/*c)* feladatot!) A befejezés ugyanaz, mint az előző pontokban.

d) A 2372/2. ábra $AC'C$ háromszöge szerkeszthető. (Lásd az előző pontot!)

2373. Tulajdonképpen adott a paralelogramma két szomszédos oldala és azok szöge. (Lásd pl. a 2368/*a)* feladatot!)

2374. A megfelelő felezőpontok meghatározzák a paralelogramma középvonalait. (Lásd az előző feladatot!) Olyan pontok esetén van csak megoldás, amelyek közül kettőt-kettőt össze tudunk kötni úgy, hogy a kapott szakaszok kölcsönösen felezzék egymást.

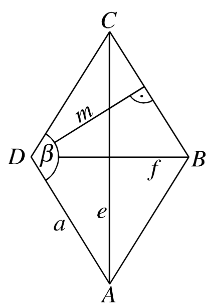
2375. *a)* – *b)* Lásd a 2368/*e)* feladatot! Most $a = b$.

c) Az ABC háromszög három oldala adott, így szerkeszthető. B-nek az AC egyenesére vonatkozó tükörképe a D csúcs.

d) A szerkesztés az előző ponthoz hasonlóan történik.

e) Az ABD háromszög szerkeszthető. A-nak a BD egyenesére vonatkozó tükörképe C.

f) Lásd az előző pontot!



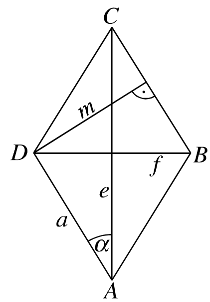
g) Lásd az *e)* pontot!

Megjegyzés: A szögek szerkesztésére nézve lásd a 2144-2146. feladatokat!

2376. *a)* – *b)* $DAB\sphericalangle = 2\alpha$. Lásd a 2376/*e)* feladatot!

c) Az ACD egyenlő szárú háromszög szerkeszthető. A B csúcs a D pont AC egyenesre vonatkozó tükörképe.

d) Az ABD egyenlő szárú háromszög szerkeszthető, ugyanis $ABD\sphericalangle =$ $= BDA\sphericalangle = 90° - \alpha$. A C csúcs az A pont BD egyenesre vonatkozó tükörképe.



e) Vegyünk fel egymástól m távolságra két párhuzamos egyenest. Az egyikre az ábrának megfelelően vegyük fel az α szöget, ennek csúcsa legyen A. A szögszár a másik egyenest a C csúcsban metszi. A párhuzamos egyenesekből az AC felezőmerőlegese kimetszi a B és a D csúcsot.

f) Vegyünk fel egymástól m távolságra két párhuzamos egyenest. Jelöljünk ki egyiken egy pontot, ez lesz a D csúcs. Ebből f-fel körívezve a másik egyenesen megkapjuk a B pontot. BD felezőmerőlegesének a két egyenessel vett metszéspontjai lesznek az A és C csúcsok. A megoldás egybevágóság erejéig egyértelmű.

g) Lásd az előző pontot!

Megjegyzés: A szögek szerkesztésére nézve lásd a 2144-2146. feladatokat!

2377. *a)* Lásd pl. a 2375/*a)* feladatot! Ha $a \geqq m$, akkor a megoldás egyértelmű, ellenkező esetben nincs megoldás.

b) Lásd pl. a 2375/*e)* feladatot! $\alpha < 180°$ esetén a megoldás egyértelmű.

c) Lásd pl. a 2376/*e)* feladatot! (Most 2α adott.) $\alpha < 180°$ esetén a megoldás egyértelmű.

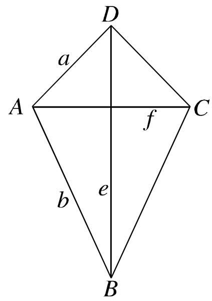
d) Úgy kell felvennünk a két adott szakaszt, hogy azok merőlegesen felezzék egymást.

e) Lásd pl. a 2376/*c)* feladatot! (Most 2α adott.) $\alpha < 180°$ esetén a megoldás egyértelmű.

f) Lásd pl. a 2376/*d)* feladatot! (Most 2α adott.) $\alpha < 180°$ esetén a megoldás egyértelmű.

g) Lásd pl. a 2376/*g)* feladatot! A megoldás $e > m$ esetén egyértelmű, ellenkező esetben nincs megoldás.

h) Lásd az előző pontot!

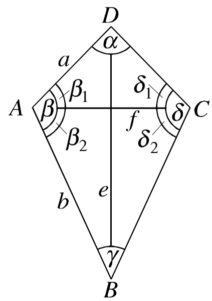


2378. *a)* – *b)* Az *ABD* háromszög szerkeszthető, hiszen három oldala adott. Az *A* pont *BD* egyenesére vonatkozó tükörképe a *C* csúcs.

c) Az *f* egyik oldalára az *ACD*, másik oldalára az *ABC* egyenlő szárú háromszög szerkeszthető.

d) Az *ACD* egyenlő szárú háromszög szerkeszthető. Az *AC* oldal felezőmerőlegesére *D*-ből mérjük fel *e*-t, a kapott végpont lesz a *B* csúcs. Egy konvex és egy konkáv megoldás van, attól függően, hogy *e*-t *D*-ből melyik irányba mérjük fel.

e) Lásd az előző pontot!



2379. *a)* Az *ABD* háromszög szerkeszthető, hiszen adott két oldala és a közbezárt szög. *A*-nak *BD* egyenesére vonatkozó tükörképe a *C* csúcs.

b) Az *ABC* egyenlő szárú háromszög szerkeszthető. Az *AC* oldalra az *ACD* egyenlő szárú háromszög is szerkeszthető. A feladatnak egy konvex és egy konkáv megoldása van.

c) Az *ABD* háromszög egyértelműen szerkeszthető, hiszen adott két oldala és a nagyobbikkal szemközti szög. Az *A* csúcs *BD* egyenesére vonatkozó tükörképe a *C* csúcs.

d) Az *ABC* egyenlő szárú háromszög szerkeszthető. Az *AC* felezőmerőlegesére *B*-ből *e*-t felmérve adódik a *D* csúcs.

e) *A* és α az *ACD* egyenlő szárú háromszöget egyértelműen meghatározza. Ehhez a háromszögben $f > 9$ cm kell, hogy teljesüljön, ezért nincs megoldás.

f) Az előző pontban leírtak alapján nincs megoldás.

g) Mivel $\beta = \delta$, és a két átló merőleges egymásra, ezért $\beta_1 = \delta_1 = 90° - \frac{\alpha}{2} = 48{,}75°$. (Lásd az ábrát!) Így az *ACD* egyenlő szárú háromszög szerkeszthető. *AC* felezőmerőlegesére *D*-ből *e*-t az ábrának megfelelően felmérve adódik a *B* csúcs.

h) Az *ABD* háromszög szerkeszthető, hiszen adott egy oldala (*e*) és a rajta fekvő két szög $\left(\frac{\alpha}{2}, 180° - \frac{\alpha}{2} - \beta\right)$. *A*-nak a *BD* egyenesére vonatkozó tükörképe lesz a *C* csúcs.

i) Az ABC egyenlő szárú háromszög szerkeszthető, hiszen adott az alapja (f) és az alapon fekvő szöge ($\beta_2 = \delta_2 = 90° - \frac{\gamma}{2}$ – lásd az ábrát!). Hasonlóan szerkeszthető az ACD egyenlő szárú háromszög is.

Megjegyzés: A szögek szerkesztésére nézve lásd a 2144-2146. feladatokat!

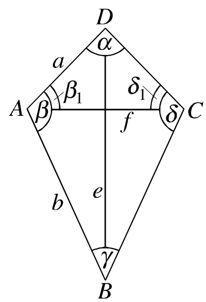
2380. *a)* Lásd a 2378/*a)* feladatot! Ha $a + b > e$ és $a + e > b$, akkor $a = b$ esetén egyértelmű a megoldás (rombusz), $a \neq b$ esetén egy konvex és egy konkáv megoldás van.

b) Lásd a 2378/*c)* feladatot! Ha $2a > f$ és $2b > f$, akkor $a = b$ esetén egyértelmű a megoldás, $a \neq b$ esetén egy konvex és egy konkáv megoldás van.

c) Lásd a 2378/*c)* feladatot! $a > \frac{f}{2}$ esetén a megoldás egyértelmű.

d) Lásd a 2378/*e)* feladatot! $b > \frac{f}{2}$ esetén a megoldás egyértelmű.

2381. *a)* *c)* Lásd a 2379/*b)* feladatot! Ha $a \neq b$, akkor egy konvex és egy konkáv megoldás van.



b) Lásd a 2379/*a)* feladatot!

d) Lásd a 2379/*c)* feladatot! Ha $e > a$, akkor a megoldás egyértelmű. Ellenkező esetben lehetséges, hogy nem kapunk megoldást, és kaphatunk két megoldást is.

e) Lásd a 2379/*d)* feladatot! A megoldás egyértelmű.

f) Ha $2a > f$, akkor az ACD egyenlő szárú háromszög szerkeszthető. CD-re C-ben a δ szöget az ábrának megfelelően felmérve, a kapott szögszár és AC felezőmerőlegesének metszéspontja B.

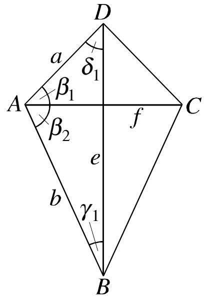
g) b és f az ABC egyenlő szárú háromszöget egyértelműen meghatározza, így az $2b > f$ esetén szerkeszthető. Az ACD egyenlő szárú háromszögben (feltételezzük, hogy a deltoid konvex) $\beta_1 = \delta_1 = 90° - \frac{\alpha}{2}$, így az is szerkeszthető. (Lásd az ábrát!)

h) Lásd a 2379/*g)* feladatot! A megoldás egyértelmű.

i) Az e fölé szerkesztett δ szögű látószögkörívekből (lásd a 2357/*k)* feladatot) az e-vel párhuzamos, tőle $\frac{f}{2}$ távolságra levő egyenesek metszik ki az A és a C csúcsot. A megoldás egyértelmű, ha a látószögköríveknek és a párhuzamos egyeneseknek van közös pontja, ellenkező esetben nincs megoldás.

j) Lásd a 2379/*h)* feladatot! $360° - \alpha - 2\delta > 0°$ esetén a feladat megoldása egyértelmű.

k) Lásd a 2379/*i)* feladatot! $360° - \alpha - 2\beta > 0°$ esetén a feladat megoldása egyértelmű.



2382. *a)* Az ACD egyenlő szárú háromszög szerkeszthető, hiszen szára és szögei adottak. Az ABC egyenlő szárú háromszög is szerkeszthető, hiszen az ACD háromszög szerkesztése után adott az alapja (f) és alapon fekvő szögei ($\beta_2 = 90° - \gamma_1$). Ha $\beta_1 < 90°$ és $\gamma_1 < 90°$, akkor a megoldás egyértelmű, ellenkező esetben nincs megoldás.

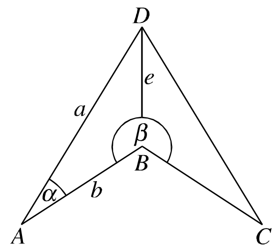
b) Az ABD háromszög szerkeszthető, hiszen adott egy oldala (e) és a rajta fekvő két szöge (γ_1, $\delta_1 = 90° - \beta_1$). Ezt a háromszöget a BD egyenesre tükrözve kapjuk a deltoidot. $\beta_1 < 90°$ és $\gamma_1 < 90°$ esetén a megoldás egyértelmű, ellenkező esetben nincs megoldás.

c) Az ACD egyenlő szárú háromszög szerkeszthető, hiszen adottak az oldalai. Az ABC háromszög is szerkeszthető, ugyanis alapja és alapon fekvő szögei ($\beta_2 = 90° - \gamma_1$) adottak. Ha $2a > f$ és $\gamma_1 < 90°$, akkor a megoldás egyértelmű, ellenkező esetben nincs megoldás.

d) Az ABC egyenlő szárú háromszög szerkeszthető, hiszen adottak szárai és a szárak szöge ($2\gamma_1$). AC-re mint alapra az ACD egyenlő szárú háromszög is szerkeszthető, ugyanis adottak alapon fekvő szögei (β_1). Ha $\beta_1 < 90°$ és $\gamma_1 < 90°$, akkor a megoldás egyértelmű, ellenkező esetben nincs megoldás.

e) Az előző pontokhoz hasonlóan az ACD és ABC egyenlő szárú háromszögek különkülön szerkeszthetők.

f) Az ABD háromszögnek adott két oldala (b, e) és a b oldallal szemközti szög ($\delta_1 = 90° - \beta_1$). Ha az ABD háromszög szerkeszthető, akkor a *b)* pontban leírtak alapján kapjuk a deltoidot. Lehet 0, 1 és 2 megoldása a feladatnak attól függően, hogy az ABD háromszögre hány megoldás adódik.



2383. Akkor kapunk konkáv deltoidot, ha az adatok az ábrának megfelelőek, azaz $a > b$, $a > e$, $\beta > 180°$ és az α olyan kicsi, hogy az ABD háromszögben az AD oldallal szemben tompaszög van.

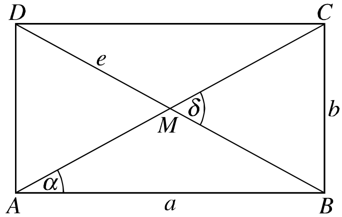
a) Lásd a 2379/*a)* feladatot!

b) Lásd a 2379/*b)* feladatot!

c) Az ABD háromszög egyértelműen szerkeszthető, hiszen adott két oldala és a nagyobbikkal szemközti szög $\left(\dfrac{\beta}{2}\right)$. A-nak a BD egyenesre vonatkozó tükörképe a C csúcs.

d) Lásd a 2379/*c)* feladatot!
e) Lásd a 2379/*d)* feladatot!
f) Mivel $\beta > 180°$, ezért az ABD háromszög abban az esetben egyértelműen szerkeszthető, ha az α szög szárának és a B középpontú, e sugarú körnek két közös pontja van.
g) Az ABD háromszög egyértelműen szerkeszthető (adott egy oldala és szögei), ha $\alpha + \dfrac{\beta}{2} < 180°$. A C csúcs a *c)* pontban leírt módon adódik.
h) Lásd az előző pontot!
i) Lásd a *g)* pontot!

2384. *a)* Az ABC derékszögű háromszög befogói adottak, így szerkeszthető. Ezt a háromszöget tükrözve az átfogó felezőpontjára kapjuk a téglalapot.



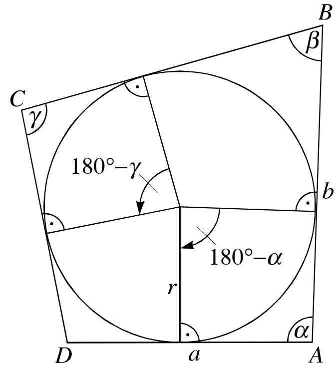
b) Az ABC derékszögű háromszög szerkeszthető (lásd a 2348/*b)* feladatot). A befejezés ugyanaz, mint az előző pontban.
c) Az ABC derékszögű háromszög szerkeszthető (lásd a 2348/*f)* feladatot).
d) Lásd a 2348/*e)* feladatot és az *a)* pontot!
e) Az AMD egyenlő szárú háromszög szárai $\left(\dfrac{e}{2}\right)$ és a közbezárt szög (δ) adottak, így szerkeszthető. M-re tükrözve a háromszöget adódik a B és a C csúcs.
f) Az ABM egyenlő szárú háromszög alapja (a) és a rajta fekvő szög $\left(\alpha = \dfrac{\delta}{2}\right)$ adott, így szerkeszthető. Ezt a háromszöget M-re tükrözve adódik a C és a D csúcs.
g) $\alpha = \dfrac{\delta}{2}$, ezért lásd a *d)* pontot!
h) Lásd a *b)* pontot!

Megjegyzés: A szögek szerkesztésére nézve lásd a 2144-2146. feladatokat!

2385. *a)* Lásd a 2384/*a)* feladatot! A megoldás egyértelmű.
b) Lásd a 2384/*b)* feladatot! A megoldás $e > a$ esetén egyértelmű, ellenkező esetben nincs megoldás.
c) Lásd a 2384/*c)* feladatot! $\alpha < 90°$ esetén a megoldás egyértelmű.
d) Lásd a 2384/*d)* feladatot! $\alpha < 90°$ esetén a megoldás egyértelmű.
e) Lásd a 2384/*f)* feladatot! $\delta < 180°$ esetén a megoldás egyértelmű.
f) Lásd a 2384/*g)* feladatot! $\delta < 180°$ esetén a megoldás egyértelmű.
g) Lásd a *b)* pontot! $b < e$ esetén a megoldás egyértelmű, ellenkező esetben nincs megoldás.

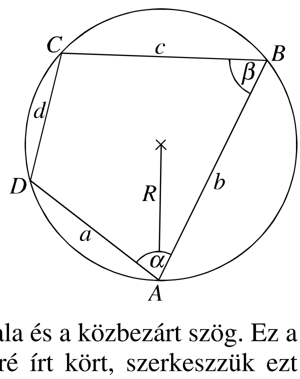
2386. *a)* Lásd a 2384/*a)* feladatot! Most $a = b$.
b) Lásd a 2384/*e)* feladatot! Most $\delta = 90°$.
c) Lásd a 2352/*a)* feladatot! Az átló felezőpontjára tükrözve kapjuk a négyzetet.
d) Lásd a 2352/*b)* feladatot! A befejezés ugyanaz, mint az előző pontban.

2387. *a)* Az ABD háromszög szerkeszthető, hiszen adott két oldala és a közbezárt szög. Ezek után az α szögtartományba egy az AB és AD oldalakat belső pontban érintő kört kell szerkesztenünk. (Erre nézve lásd a 2022. feladatot!) Ehhez a körhöz a B és a D pontból húzott érintők metszéspontja lesz a C csúcs. (Az érintési pontokat az OB ill. OD szakaszok fölé szerkesztett Thalesz-körök metszik ki a körből.) Ha az r sugarú körnek az α szög száraival vett érintési pontjai az AB ill. az AD szakasz belsejében vannak, akkor a feladat megoldása egyértelmű, ellenkező esetben nincs megoldás.



b) Vegyük fel a β szöget és szerkesszük meg a szögtartományba a szárakat érintő r sugarú kört. (Lásd a 2022. feladatot!) Ezek után húzzuk be az érintési pontokba a megfelelő sugarakat, és forgassuk el őket az ábrának megfelelően $180° - \alpha$ ill. $180° - \gamma$ szöggel. Az érintési pontok elforgatottjai lesznek az AD ill. CD oldalakon vett érintési pontok. Ezekben a pontokban merőlegest állítva az elforgatott sugarakra megkapjuk az AD és CD oldalakat. $\alpha < 180°$, $\beta < 180°$, $\gamma < 180°$ és $180° < \alpha + \beta + \gamma < 360°$ esetén egyértelmű megoldást kapunk.

2388. *a)* Vegyünk fel egy R sugarú kört, és annak egy pontjából kiindulva vegyük fel rendre az a, b, c hosszúságú húrokat az ábrának megfelelően. Ha a-nak és c-nek nincs közös pontja, akkor a megoldás egyértelmű, ellenkező esetben nincs megoldás.



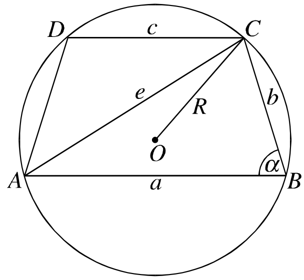
b) Az ABD háromszög szerkeszthető, ugyanis adott két oldala és a közbezárt szög. Ez a háromszög egyértelműen meghatározza a négyszög köré írt kört, szerkeszzük ezt meg. (Lásd a 2035. feladatot!) Az AB oldalra B-ben, az ábrának megfelelően felvett β szög szára kimetszi a C csúcsot a körből.

c) Mivel $BCD\sphericalangle = 180° - \alpha$, ezért a szerkesztés az előző pontban leírtakkal azonos módon történik.

d) Az ABD háromszög és annak körülírt köre a *b)* pont alapján szerkeszthető. A C csúcsot B-ből c-vel körívezve kapjuk. Ha C az A-t nem tartalmazó BD íven van, akkor a megoldás egyértelmű, ellenkező esetben nincs megoldás.

e) Az R sugarú körben az ACD háromszög szerkeszthető. α-t az ábrának megfelelően felvéve adódik a B csúcs. Ha a körbe írt ACD háromszög létrejön, és B a D-t nem tartalmazó AC ívre esik, akkor a megoldás egyértelmű, ellenkező esetben nincs megoldás.

2389. *a)* Ha $a < 2R$ és $b < 2R$, akkor az ABO és BCO egyenlő szárú háromszögek az ábrának megfelelően szerkeszthetők. A C pontot tükrözve AB felezőmerőlegesére adódik a D csúcs. Ebben az esetben olyan megoldást is kaphatunk, ahol O a trapézon kívül van. Ha $a = 2R$ és $b < 2R$, akkor AB a kör átmérője, így az ABC háromszög BCA szöge derékszög.



b) Tegyük fel, hogy $\alpha < 90°$. Ha $a < 2R$, akkor az ABO háromszög szerkeszthető, a C csúcsot pedig az AB-re B-ben felvett α szög szára metszi ki az O középpontú, R sugarú körből. A D csúcs az előző pontban leírtak alapján kapható. Ebben az esetben két megoldása van a feladatnak. Ha $a = 2R$, akkor az ABC derékszögű háromszög szerkeszthető, és ekkor egyértelmű megoldást kapunk.

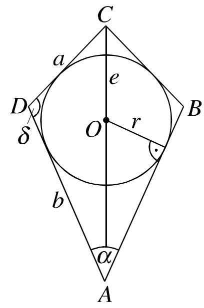
c) Tegyük fel, hogy $\alpha < 90°$ és $b < 2R$. Ekkor a BCO egyenlő szárú háromszög szerkeszthető, az A csúcsot pedig a BC-re B-ben az ábrának megfelelően felvett α szög szára metszi ki az O középpontú R sugarú körből. A D csúcs a C pont tükörképe AB felezőmerőlegesére. Ha a feltételek teljesülnek, egyértelmű megoldást kapunk.

d) Tegyük fel, hogy $\alpha < 90°$. Az ABC háromszög szerkeszthető. A C pont tükörképe AB felezőmerőlegesére a D csúcs. A megoldás egyértelmű.

e) Az R sugarú, O középpontú körben vegyünk fel az ábrának megfelelően egy a és egy e hosszúságú húrt. A D csúcs az előző pontokban leírtak alapján adódik. Ha $2R \geqq e$ és $2R \geqq a$, valamint legalább az egyik egyenlőtlenség éles, akkor a megoldás egyértelmű, ha $a = e$. Két megoldást kapunk, ha $a \neq e$. Ha a fenti feltételek nem teljesülnek, akkor nem kapunk megoldást.

f) Ha $a = c < 2R$, akkor a trapéz téglalap, szerkesztésére nézve lásd a 2384/*h)* feladatot! Tegyük fel, hogy $c < a \leqq 2R$. Ekkor az R sugarú körben vegyünk fel egy a hosszúságú húrt és felezőpontjából mindkét irányba mérjünk fel rá $\frac{c}{2}$-t. A kapott pontokban állítsunk a húrra merőlegeseket. A merőlegeseknek a körrel alkotott metszéspontjai lesznek a C és D csúcsok. Ha $a < 2R$, két megoldást kapunk, ha $a = 2R$, akkor a megoldás egybevágóság erejéig egyértelmű.

2390. *a)* Az ABD egyenlő szárú háromszög szerkeszthető. Ezek után az α szögtartományba szerkesszünk a szárakat érintő r sugarú kört. (Lásd a 2022. feladatot!) Ha a kapott érintési pontok az AB és AD oldalak belső pontjai, akkor a B-ből és D-ből a körhöz szerkesztett érintők metszéspontja lesz a C csúcs. (Az érintők szerkesztésére nézve lásd a 2387/*a)* feladatot!) Ha a fenti feltétel teljesül, akkor a megoldás egyértelmű, ellenkező esetben nincs megoldás.

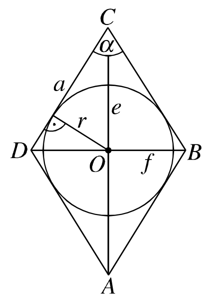


b) A δ szög tartományába a 2022. feladat alapján szerkesszünk r sugarú, a szögszárakat érintő kört, és az egyik szárra mérjük fel a szög csúcsából b-t. Ha az érintési pont az AD szakasznak belső pontja, akkor az AD egyenes metszi ki a második szögszárból C-t. A B csúcs D-nek az AC egyenesre vonatkozó tükörképe. Ha az érintési pontra vonatkozó feltétel nem teljesül, akkor nincs megoldás, ellenkező esetben a megoldás egyértelmű.

c) Lásd a *b)* pontot!

d) Vegyük fel az α szöget és a szögtartományba szerkesszünk a szögszárakat érintő, r sugarú kört. (Lásd a 2022. feladatot!) Az AO félegyenesre (lásd az ábrát) A-ból mérjük fel e-t. Ha az így kapott C pont az ábrának megfelelően a körön kívül van, akkor C-ből a körhöz szerkesztett érintők (lásd a 2387/*a)* feladatot) és az α szög szárainak metszéspontjai lesznek a B illetve a D csúcs. A megoldás a fenti feltétel mellett egyértelmű, ellenkező esetben nincs megoldás.

2391. *a)* Vegyük fel az r sugarú kört és egyik átmérő egyenesére O-ból mindkét irányban mérjünk fel $\frac{e}{2}$-t. Ha az így kapott A és C pontok a körön kívül vannak, akkor az ezekből szerkesztett érintők (lásd a 2387/*a)* feladatot) és az AC-re O-ban állított merőleges egyenes metszéspontjai lesznek a B és D csúcsok. Ha a fenti feltétel teljesül, akkor a feladat megoldása egyértelmű, ellenkező esetben nincs megoldás.



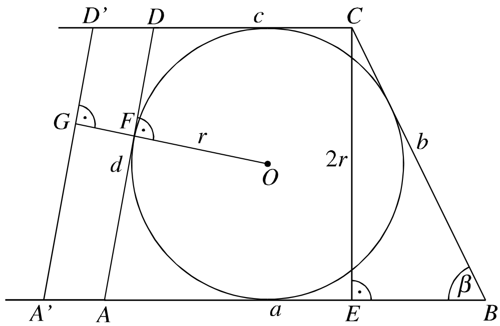
b) Lásd az *a)* pontot!

c) A DOC derékszögű háromszög, szerkeszthető, ha $a \geqq 2r$. (Lásd a 2348/*c)* feladatot!) Ezt O-ra tükrözve adódik az A és a B csúcs. A megoldás így egybevágóság erejéig egyértelmű, $a < 2r$ esetén nincs megoldás.

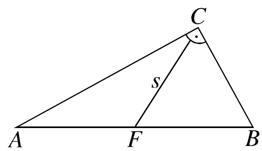
d) Az α szög tartományában vegyük fel a szárakat érintő r sugarú kört. (Lásd a 2022. feladatot!) A szöget O-ra tükrözve kapjuk az egyértelműen meghatározott rombuszt.

Megjegyzés: A beírható kört nem is kell megszerkesztenünk, elegendő O-t meghatározni.

2392. A trapéz magassága $2r$, így az ábrán látható EBC derékszögű háromszög szerkeszthető. (Lásd a 2348/*b)* feladatot!) A kapott $EBC\sphericalangle = \beta$ szögtartományban szerkesszük meg a szárakat érintő r sugarú kört (lásd a 2022. feladatot), majd C-n keresztül szerkesszük meg a kör EB-vel párhuzamos érintőjét. Ezután a BE félegyenes valamely, az ábrának megfelelően választott A' pontjából messük el d-vel a C-re illeszkedő érintő egyenesét. A kapott $A'D'$ szakaszra O-ból állítsunk merőlegest. Ez kimetszi a körből az AD oldal F érintési pontját. F-ben állítsunk merőlegest OG-re, kapjuk az AD oldalt. Megoldás akkor és csak akkor van, ha $b \geqq 2r$ és $d \geqq 2r$. $b = d = 2r$ esetén négyzetet, $d = 2r$ és $b > 2r$ esetén derékszögű trapézt kapunk. Ha $b > 2r$ és $d > 2r$, akkor a feladatnak két megoldása van.



2393. Thalesz tételének megfordításából adódóan C rajta van az AB átmérőjű körön, ezért $AF = FC = FB$. Az AFC és a CFB háromszögek így egyenlő szárúak.



2394. Lásd az előző feladatot!

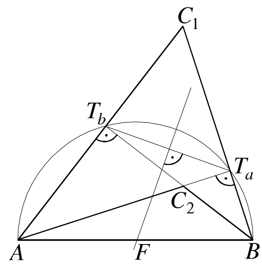
2395. A tekintett oldal felezőpontja egyenlő távolságra van a háromszög csúcsaitól, ezért ez a pont a köréírt kör középpontja. Thalesz tétele értelmében a háromszög derékszögű.

2396. Lásd az előző feladatot!
Megjegyzés: A 2393. feladat állításának megfordítása a 2395. feladat állítása, és ugyanez a kapcsolat a 2394. és 2396. feladatok között is.

2397. Tekintsük a kör két tetszőleges húrját. Ezen húrok felezőmerőlegeseinek metszéspontja lesz a kör középpontja.
Ha csak derékszögű vonalzónk van, akkor egy tetszőleges húr egyik végpontjába állítsunk merőlegest a húrra. A két egymásra merőleges húr végpontjai meghatározzák a

kör egyik átmérőjét. Hasonló módon „megszerkesztve” egy másik átmérőt, a két átmérő metszéspontja lesz a kör középpontja.

2398. A magasságok talppontjai rajta vannak a harmadik oldal fölé írt Thalesz-körön, így annak középpontját a két adott pont által meghatározott szakasz felezőmerőlegese metszi ki az adott egyenesből. A kör sugara a kapott metszéspont és az egyik adott pont távolsága lesz, és ez a kör metszi ki az adott egyenesből az A és a B csúcsot. Ha a két adott pont az egyenesnek ugyanazon az oldalán van és az általuk meghatározott egyenes nem merőleges az adott egyenesre, akkor a harmadik csúcsra két lehetőségünk van (az ábrán C_1 és C_2), így egy hegyesszögű és egy tompaszögű megoldást kapunk.



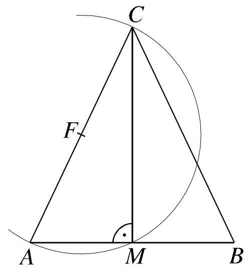
Ha az egyik pont az egyenesen van, akkor egy derékszögű háromszöget kapunk, amelynek egyik befogója az adott egyenesre illeszkedik és derékszögű csúcsa az egyenesen adott pont.
Ha az adott pontok az egyenes különböző oldalára esnek és az általuk meghatározott egyenes nem merőleges az adott egyenesre, akkor két tompaszögű háromszöget kapunk.
Abban az esetben, ha a két pont által meghatározott egyenes merőleges az adott egyenesre, pontosan akkor van megoldás (akkor viszont végtelen sok), ha az adott egyenes a két pont által meghatározott szakasz felezőmerőlegese.

2399. Thalesz tételének megfordítása értelmében a magasságtalppontok illeszkednek a harmadik oldal mint átmérő fölé írt körre.

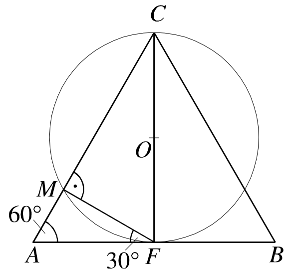
2400. A derékszögű csúcsot a két adott pont által meghatározott szakasz mint átmérő fölé írt Thalesz-kör metszi ki az adott egyenesből. A feladatnak legfeljebb két nem egybevágó megoldása lehet az adott pontok elhelyezkedésétől és a létrejövő metszéspontok számától függően.

2401. Legyen a két adott pont A és B, az adott távolság pedig d. Megoldás akkor és csak akkor van, ha $d \leqq AB$. Ha $d = AB$, akkor a két egyenes merőleges AB-re. Ha $d < AB$, akkor szerkesszük meg azt az ABC derékszögű háromszöget (lásd a 2348/*b)* feladatot), amelynek egyik befogója d és a derékszögű csúcsa C. (Legyen pl. $d = BC$.) Az egyik egyenes AC, a másik az ezzel párhuzamos, B-re illeszkedő egyenes.

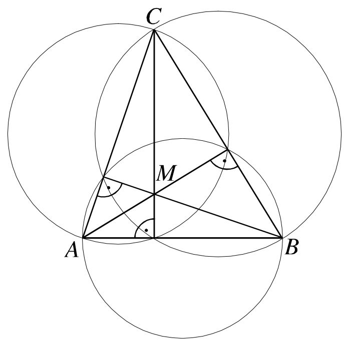
2402. Legyen M a körnek az alappal vett metszéspontja. Thalesz tétele értelmében MC merőleges az alapra, így M az alap felezőpontja.



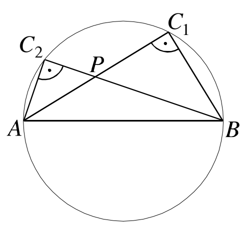
2403. Thalesz tétele értelmében $CMF\sphericalangle = 90°$ (lásd az ábrát), így az AFM háromszög olyan derékszögű háromszög, amelynek hegyesszögei 30 illetve 60 fokosak. Ez a háromszög egy szabályos háromszög „fele”, ezért $AM = \frac{AF}{2} = \frac{AC}{4}$.



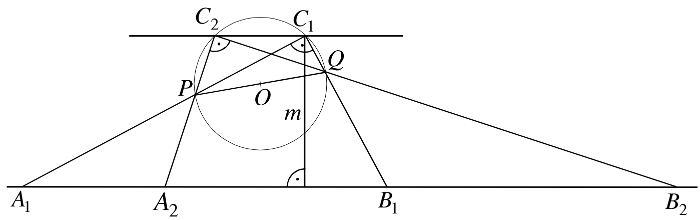
2404. Thalesz tételéből adódóan bármelyik két kör közös húregyenese a harmadik oldalhoz tartozó magasságvonal. A háromszög magasságvonalai pedig egy pontban, a háromszög magasságpontjában metszik egymást.



2405. Az AB szakasz mint átmérő fölé szerkesztett Thalesz-körből az AP ill. a BP egyenes metszi ki a derékszögű csúcsot. Ha P a körön kívül van, nincs megoldás, ha P a körre illeszkedik, akkor ő a derékszögű csúcs, ha pedig a körön belül van, akkor két megoldás van. (Lásd az ábrát!)



2406. Vegyük fel az adott egyenessel párhuzamos, tőle m távolságra levő egyenest az adott pontok által meghatározott félsíkban. Az adott pontok által meghatározott szakasz mint átmérő fölé szerkesztett Thalesz-kör és a párhuzamos egyenes metszéspontja(i) lesz(nek) a derékszögű csúcs(ok). A szerkeszthetőséghez szükséges, hogy az adott pontok a két egyenes által meghatározott sávban legyenek és a Thalesz-körnek legyen közös pontja a párhuzamos egyenessel. Legfeljebb két nem egybevágó megoldás lehetséges.

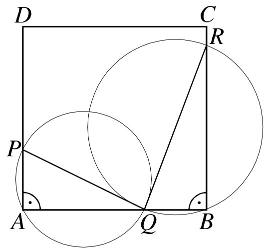


2407. Lásd az előző feladatot!

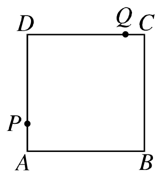
2408. A kör átmérője lesz a téglalap egyik átlója. Ennek egyik végpontjából az adott szakasszal körívezve megkapjuk a körön a téglalap harmadik csúcsát. Ennek a csúcsnak a kör középpontjára vonatkozó tükörképe lesz a negyedik csúcs.
Mind a négy esetben egyértelmű megoldást kapunk.

2409. $PCR\sphericalangle = 90°$, így az állítás Thalesz tételének megfordításából adódik.

2410. Legyen a három adott pont P, Q és R. A PQ és QR szakaszok fölé szerkesszünk Thalesz-kört, és tekintsük ezeknek az egyik Q-ra illeszkedő közös szelőjét. Ez a szelő a köröket olyan A és B pontokban metszi, amelyekre nézve Thalesz tételéből adódóan $PAQ\sphericalangle = QBR\sphericalangle = 90°$. Ezek után a négyzet már egyszerűen adódik. A feladatnak végtelen sok megoldása van.



2411. A PQ szakasz mint átmérő fölé szerkesztett Thalesz-körből az AP egyenes kimetszi a D csúcsot. Innen a négyzet könnyen adódik. A megoldás egyértelmű.



Sokszögek kerülete, területe

2412. Ha a jelöli a négyzet oldalának hosszát, akkor $K = 4a$, $T = a^2$.

a) $K = 4$ cm, $T = 1$ cm^2

b) $K = 12$ mm, $T = 9$ mm^2

c) $K = 2$ dm, $T = 0,25$ dm^2

d) $K = 6$ m, $T = 2,25$ m^2

e) $K = 144$ cm, $T = 1296$ cm^2

f) $K = 0,68$ m, $T = 0,0289$ m^2 $= 289$ cm^2

g) $K = 20$ km, $T = 25$ km^2

h) $K = 0,64$ dm, $T = 0,0256$ dm^2 $= 2,56$ cm^2

i) $K = 3$ cm, $T = \frac{9}{16}$ cm^2 $= 0{,}5625$ cm^2

j) $K = \frac{20}{3}$ m, $T = \frac{25}{9}$ m^2 $= 2{,}\dot{7}$ m^2

2413. $K = 2(a + b)$, $T = ab$.

a) $K = 18$ cm, $T = 20$ cm^2

b) $K = 21$ m, $T = 27$ m^2

c) $K = 78$ mm, $T = 360$ mm^2

d) $K = \frac{7}{2}$ dm $= 3{,}5$ dm, $T = \frac{5}{8}$ dm^2 $= 0{,}625$ dm^2

e) $K = 109{,}2$ cm, $T = 84{,}8$ cm^2

f) $K = 10{,}6$ m, $T = 6{,}72$ m^2

g) $K = \frac{52}{15}$ dm $= 3{,}4\dot{6}$ dm, $T = \frac{119}{180}$ dm^2 $= 0{,}66\dot{1}$ dm^2

h) $K = 15{,}5$ cm, $T = 14{,}5866$ cm^2

i) $K = 8{,}1$ dm, $T = \frac{166}{45}$ dm^2 $= 3{,}6\dot{8}$ dm^2

j) $K = 8{,}02$ km, $T = 1{,}476$ km^2

k) $K = 1080{,}44$ m, $T = 118{,}8$ m^2

2414. $a = \frac{K}{4}$

a) 4 cm; *b)* 5 dm; *c)* 11 m; *d)* 16 km; *e)* 0,9 dm; *f)* 0,04 mm;

g) 1,81 cm; *h)* $\frac{43}{12}$ m $= 3{,}58\dot{3}$ m ; *i)* $\frac{43}{68}$ cm $\approx 0{,}63$ cm; *j)* 1,315 mm;

k) $\frac{35}{38}$ km $\approx 0{,}92$ km.

2415. $a = \sqrt{T}$

a) 1 m; *b)* 2 cm; *c)* 3 dm; *d)* 4 mm; *e)* 5 km; *f)* 6 cm;

g) $\frac{3}{2}$ m $= 1{,}5$ m; *h)* $\frac{5}{4}$ dm $= 1{,}25$ dm; *i)* $\frac{25}{13}$ mm; *j)* 1,5 cm;

k) $\frac{14}{9}$ m; *l)* $\sqrt{2}$ cm $\approx 1{,}414$ cm.

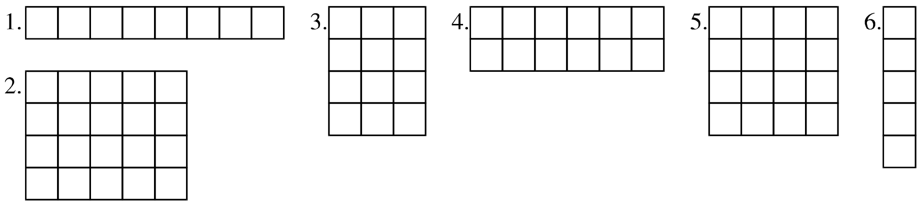
2416. $a = \frac{K - 2b}{2} = \frac{T}{b}$, $b = \frac{K - 2a}{2} = \frac{T}{a}$.

a	4 cm	10 cm	**6 m**	**5 mm**	$\frac{3}{22}$ cm	$\mathbf{\frac{89}{44}}$ **mm**	$3\frac{11}{3}$ m
b	3 cm	**8 cm**	5 m	0,04 dm	$\mathbf{\frac{15}{22}}$ **cm**	$2\frac{3}{4}$ mm	$\mathbf{\frac{23}{52}}$ **m**
K	**14 cm**	3,6 dm	**22 m**	**18 mm**	$\frac{18}{11}$ cm	$\mathbf{\frac{105}{11}}$ **mm**	$8\frac{15}{26}$ m
T	**12 cm²**	**80 cm²**	3000 dm^2	20 mm^2	$\mathbf{\frac{45}{484}}$ **cm²**	$\frac{89}{16}$ mm^2	$\mathbf{\frac{575}{338}}$ **m²**

2417. *a)* 1,91 dm^2 > 0,019 m^2 > 4210 mm^2 > 22 cm^2

b) 380 ár < 423 000 m^2 < 500 ha < 5,1 km^2

2418. $T_6 < T_1 < T_3 = T_4 < T_5 < T_2$



2419. Legyen L a kerítés hossza, T a telek területe, a a hosszabbik, b a rövidebbik oldal. Ekkor $L = a + 2b - 3$ m, $T = ab$.

a) $L = 33$ m, $T = 162$ m^2; *b)* $L = 49$ m, $T = 330$ m^2;

c) $L = 83$ m, $T = 920$ m^2; *b)* $L = 29{,}54$ m, $T = 132{,}288$ m^2.

2420. 1 cm 4 m-nek felel meg.

a) $T = 300$ m^2.

b) kapu: 1 m
ház: 14 m
összesen: 15 m
A kerítés hossza: $K - 15$ m = 70 m − 15 m = 55 m.

c) $T_{\text{ház}} = 6 \text{ m} \cdot 8 \text{ m} = 48 \text{ m}^2$. *d)* $T_{\text{virág}} = 10 \text{ m} \cdot 6 \text{ m} = 60 \text{ m}^2$.

e) $T_{\text{zöldség}} = 12 \text{ m} \cdot 8 \text{ m} = 96 \text{ m}^2$. *f)* $T_{\text{gyümölcs}} = 8 \text{ m} \cdot 8 \text{ m} = 64 \text{ m}^2$.

g) $T_{\text{út}} = 20 \text{ m} \cdot 1 \text{ m} + 6 \text{ m} \cdot 2 \text{ m} = 32 \text{ m}^2$.

2421. Jelölje T a kert területét m^2-ben. A feltételek alapján

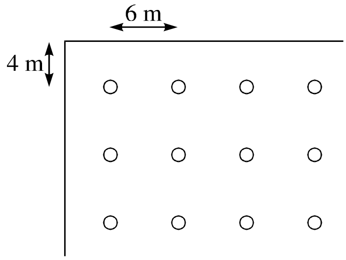
$$\left(\frac{T}{4} + 60\right) + \left(\frac{T}{3} + 25\right) + \frac{3}{8} \cdot T = T.$$

Rendezés után

$$\frac{23}{24} T + 85 = T,$$

ahonnan $T = 2040\ \text{m}^2$.

2422. $T = 14\,400\ \text{m}^2$.



Ha L a kerítés hossza, akkor

$$L = 4 \cdot 120\ \text{m} - 2\ \text{m} = 478\ \text{m}.$$

A gyümölcsöskert egyik oldalával párhuzamosan legfeljebb 19 fa ültethető, ugyanis

$$116 = 8 + 18 \cdot 6 < 120 <$$
$$< 8 + 19 \cdot 6 = 122.$$

Így a kert gyümölcsfáinak száma legfeljebb $19 \cdot 19 = 361$.

2423. Jelölje a és b a téglalap szomszédos oldalai mentén elhelyezkedő rácspontok számát. Ha k db rácsnégyzet nincs még bevonalkázva, akkor

$$2a + 2(b-2) + k = ab,$$

ahonnan

$$ab = 2(a+b) - 4 + k$$

a téglalap rácsnégyzeteinek száma.

A nem vonalkázott négyzetek számára nézve

$$k = (a-2) \cdot (b-2).$$

Jelölje a a hosszabbik oldalt ($a \geqq b$).

a) $a = 4,\ b = 3,\ ab = 12;$

b) $a = 5,\ b = 3,\ ab = 15;$

c) Két lehetőség:
1. $a = 8,\ b = 3,\ ab = 24;$
2. $a = 5,\ b = 4,\ ab = 20;$

d) Két lehetőség:
1. $a = 10,\ b = 3,\ ab = 30;$
2. $a = 6,\ b = 4,\ ab = 24;$

e) Három lehetőség:
1. $a = 14,\ b = 3,\ ab = 42;$
2. $a = 8,\ b = 4,\ ab = 32;$
3. $a = 6,\ b = 5,\ ab = 30.$

2424. Legyen x méter a telek rövidebbik oldala. A feltétel alapján

$$\frac{1}{3} \cdot 6x \cdot x = 1568\ \text{m}^2.$$

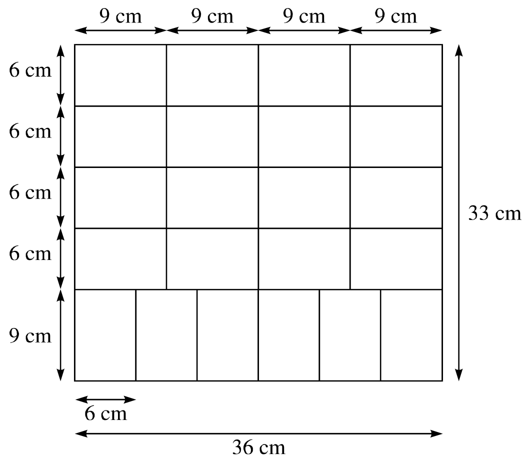
Ebből $x = 28$ m, $6x = 168$ m. Így $K = 392$ m, $T = 4704\ \text{m}^2$.

2425. Legyen x méter a ház oldalának hossza. Ekkor a feltétel alapján

$$\frac{(x+6)^2}{x^2} = 4,$$

azaz $x + 6 = 2x$. Ebből $x = 6$ m, tehát a ház területe $36\ \text{m}^2$.

2426. A kivágható téglalapok száma legfeljebb $\frac{36 \cdot 33}{9 \cdot 6} = 22$. Az ábra mutatja, hogy 22 db téglalap ki is vágható a lemezből.



2427. Legyen a téglalap hosszabbik oldala a centiméter. Ekkor a feltétel alapján $a^2 = a(a-6) + 66$. Rendezve az egyenletet és a-t kifejezve kapjuk, hogy $a = 11$ cm. Így $T = 11\text{ cm} \cdot 5\text{ cm} = 55\text{ cm}^2$, $K = 32$ cm.

2428. Jelölje a a négyzet oldalának hosszát. Ekkor a négyzet területe: $T_{\square} = a^2$, a téglalap területe: $T_{\boxed{\;\;}} = (3a)\cdot(4a) = 12a^2$, tehát

$$\frac{T_{\boxed{\;\;}}}{T_{\square}} = 12$$

A kerületekre nézve: $K_{\square} = 4a$, $K_{\boxed{\;\;}} = 14a$, így

$$\frac{K_{\boxed{\;\;}}}{K_{\square}} = \frac{14}{4} = \frac{7}{2}.$$

2429. Legyenek az eredeti téglalap oldalai $3x$ méter és $4x$ méter. A feladat feltétele szerint

$$(3x-3)\cdot(4x+6) = 3x\cdot 4x.$$

Alakítva a kapott egyenletet:

$$12x^2 - 12x + 18x - 18 = 12x^2,$$

ahonnan

$$x = 3.$$

Az eredeti téglalap oldalai: 9 m, 12 m. Így $T = 108\text{ m}^2$, $K = 42$ m.

2430. Legyen x méter a telek oldalának hossza. A feltétel szerint

$$x^2 - 600 = (x-10)^2.$$

Alakítva az egyenletet:

$$x^2 - 600 = x^2 - 20x + 100,$$

ahonnan

$$x = 35.$$

A telek oldala tehát 35 m, $T = 1225\text{ m}^2$, $K = 140$ m.

2431. A téglalap oldalai méterben kifejezve x és $2x$. A járda területe:

$$2x \cdot x - (2x - 2) \cdot (x - 2) = 6x - 4.$$

Másrészt a felhasznált betonlapok összterülete:

$$640 \cdot 0{,}25\ \text{m}^2 = 160\ \text{m}^2.$$

Ez a két terület egyenlő, azaz

$$6x - 4 = 160$$

ahonnan $x = 27\frac{1}{3}$ m, így $2x = 54\frac{2}{3}$ m.

Megjegyzés: Az előbbi megoldásban a járdát is a játszótérhez számítottuk. Ha nem számítjuk hozzá, akkor a járda területe

$$(2x + 2) \cdot (x + 2) - 2x^2 = 6x + 4,$$

és így $x = 26$ m, $2x = 52$ m.

2432. Mivel a négyzet eredeti kerülete $4a$, ezért az említett oldalakat $\frac{a}{5}$-tel hosszabbítottuk meg. Így a téglalap területe $T_{\square} = a \cdot \frac{6}{5}a = \frac{6}{5}a^2$. Ez 1,2-szerese a négyzet területének.

2433. A feltétel szerint $a > b > 0$ egészek és $0 < a^2 - b^2 < 10$.
a értéke legfeljebb 5 lehet, ugyanis $6^2 - 5^2 = 11 > 10$.
Ha $a = 5$ m, akkor $b = 4$ m.
Ha $a = 4$ m, akkor $b = 3$ m.
Ha $a = 3$ m, akkor b lehet 1 m és 2 m.
Ha $a = 2$ m, akkor $b = 1$ m.

2434. A téglalap oldalai $\frac{2}{3}a$ és b. A feltétel szerint

$$a^2 = \frac{2}{3}ab,$$

ahonnan

$$b = \frac{3}{2}a.$$

A négyzet kerülete $4a$, a téglalapé $\frac{13}{3}a$, vagyis a téglalap kerülete nagyobb $\frac{a}{3}$-mal.

2435. Mivel a négyszög átlói egyenlőek és felezik egymást, ezért a négyszög téglalap. Legyenek a téglalap oldalai centiméterben mérve a és b. A feladat szerint

$$a + b = 9\ \text{cm} \quad \text{és} \quad ab = 18\ \text{cm}^2.$$

Ezt a két egyenletet egyidejűleg csak az $a = 3$ cm, $b = 6$ cm (vagy fordítva) értékek elégítik ki.

2436. Jelölje K és T az eredeti, K' és T' az új kerületet illetve területet.
a) $K' = 2K$, $T' = 4T$; *b)* $K' = 1{,}5K$, $T' = 2{,}25T$; *c)* $K' = 3K$, $T' = 9T$;

d) $K' = \frac{5}{3}K$, $T' = \frac{25}{9}T$; *e)* $K' = \frac{25}{9}K$, $T' = \frac{625}{81}T$; *f)* $K' = k \cdot K$, $T' = k^2 \cdot T$.

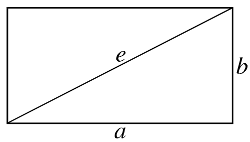
2437. *a)* kétszeresére; *b)* háromszorosára; *c)* ötszörösére; *d)* $\sqrt{2}$ -szeresére; *e)* $\frac{3}{2}$ -szeresére; *f)* $\sqrt{3}$ -szorosára.

2438. Legyen $T = ab$ és T' az új terület.

a) $T' = 2T$; *b)* $T' = 6T$; *c)* $T' = 21T$; *d)* $T' = 2{,}25T$; *e)* $T' = \frac{217}{22}T$; *f)* $T' = k \cdot l \cdot T$.

2439. *a)* 1 : 2; *b)* 1 : 3; *c)* 2 : 3; *d)* 3 : 4; *e)* 3 : 5; *f)* $1 : \sqrt{2}$; *g)* $\sqrt{2} : 2 = 1 : \sqrt{2}$; *h)* $\sqrt{3} : 3 = 1 : \sqrt{3}$.

2440. Pitagorasz tétele alapján $b = \sqrt{e^2 - a^2}$, így $K = 2\left(a + \sqrt{e^2 - a^2}\right)$ és $T = a \cdot \sqrt{e^2 - a^2}$.



a) $K = 14$ cm, $T = 12$ cm^2;
b) $K = 34$ m, $T = 60$ m^2;
c) $K = 34$ mm, $T = 60$ mm^2;
d) $K = 28$ dm, $T = 48$ dm^2.

2441. Jelölje az oldalakat a és b. A feltétel szerint $2(a + b) = ab$.

I. megoldás: Redukáljuk az egyenletet 0-ra, majd próbáljunk a bal oldalon szorzatot kialakítani.

$$ab - 2a - 2b = 0$$
$$(a - 2)(b - 2) - 4 = 0$$
$$(a - 2)(b - 2) = 4$$

Lehetőségeink: $a = 4$ cm, $b = 4$ cm;
$a = 3$ cm, $b = 6$ cm;
$a = 6$ cm, $b = 3$ cm.

II. megoldás: Fejezzük ki az egyik oldalt a másikkal, majd alakítsuk a kifejezést.

$$ab - 2a = 2b$$
$$a(b - 2) = 2b$$

$b \neq 2$, így $(b - 2)$-vel oszthatjuk az egyenlet mindkét oldalát.

$$a = \frac{2b}{b-2} = \frac{2b-4}{b-2} + \frac{4}{b-2} = 2 + \frac{4}{b-2}$$

a és b pozitív egészek, ezért 4 osztható $(b - 2)$-vel.
$b = 1$ nem lehet, mert $a < 0$.
$b = 3$, $a = 6$.

$b = 4,\ a = 4.$
$b = 6,\ a = 3.$
Kaptuk a már ismert megoldásokat.

2442. $T = \dfrac{ab}{2} = \dfrac{c \cdot m_c}{2}$.

a) 6 cm^2; *b)* 341,25 mm^2; *c)* 8,4 dm^2; *d)* 8,1 m^2; *e)* 27,805 cm^2; *f)* 552 cm^2; *g)* 1,82 dm^2; *h)* 24,52 m^2; *i)* 683,2 dm^2; *j)* 801 cm^2; *k)* 13,26 m^2; *l)* 21,9 mm^2.

2443. $T = \dfrac{a \cdot m_a}{2} = \dfrac{c \cdot m_c}{2}$; $b = c$ és $m_c = m_b$.

a) 12 cm^2; *b)* 9 cm^2; *c)* 7,86 m^2; *d)* 10,25 dm^2; *e)* 3,2 cm^2; *f)* 16 m^2; *g)* 25,228 dm^2.

h) Pitagorasz tételéből adódóan $m_a = \sqrt{b^2 - \left(\dfrac{a}{2}\right)^2}$. Így $m_a = 4$ cm és $T = 12$ cm^2.

i) Az előző ponthoz hasonlóan adódik, hogy $m_a = 12$ m és $T = 60$ m^2.

2444. $a = \dfrac{2T}{m_a}$; $b = K - (a + c)$; $c = K - (a + b)$; $m_a = \dfrac{2T}{a}$.

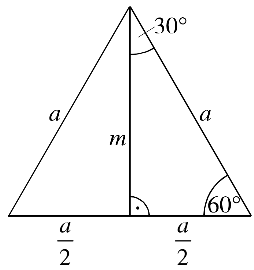
a	b	c	m_a	K	T
3 cm	4 cm	5 cm	4 cm	**12 cm**	**6 cm^2**
5 m	12 m	13 m	**12 m**	**30 m**	**30 m^2**
5 dm	**5,5 dm**	41 cm	≈ **4,097 dm**	13,1 dm	716,9 cm^2
6 dm	5,1 dm	**7,5 dm**	35 cm	186 cm	10,5 dm^2
4,41$\dot{3}$ m	6 m	$6\frac{2}{3}$ m	50 dm	1708 cm	**11,0$\dot{3}$ m^2**

Megjegyzés: Az első két sor háromszögei derékszögűek.

2445. Pitagorasz tétele alapján $b = \sqrt{c^2 - a^2}$, így $K = a + \sqrt{c^2 - a^2} + c$, $T = \dfrac{a \cdot \sqrt{c^2 - a^2}}{2}$.

a) $b = 4$ dm, $K = 12$ dm, $T = 6$ dm^2; *b)* $b = 12$ mm, $K = 30$ mm, $T = 30$ mm^2;
c) $b = 24$ m, $K = 56$ m, $T = 84$ m^2; *d)* Nem lehetséges.
e) $b = 8$ dm, $K = 40$ dm, $T = 60$ dm^2; *f)* $b = 15$ mm, $K = 90$ mm, $T = 270$ mm^2.

2446. Ha a szabályos háromszög oldala a, akkor Pitagorasz tétele értelmében $a^2 = m^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$, ahonnan



$$m = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}a^2} = a\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Így a terület:

$$T = \frac{a \cdot a\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

a) $K = 6$ m, $T = \sqrt{3}$ m$^2 \approx 1{,}732$ m^2;

b) $K = 12$ cm, $T = 4\sqrt{3}$ cm$^2 \approx 6{,}928$ cm^2;

c) $K = 21$ cm, $T = 12{,}25 \cdot \sqrt{3}$ m$^2 \approx 21{,}218$ m^2;

d) $K = 25{,}5$ dm, $T = 18{,}0625 \cdot \sqrt{3}$ dm$^2 \approx 31{,}285$ dm^2;

e) $K = 18$ km, $T = 9 \cdot \sqrt{3}$ km$^2 \approx 15{,}588$ km^2;

f) $K = 14\frac{1}{7}$ cm, $T \approx 9{,}623$ cm^2.

2447. Az előző feladat ábrája és eredményei alapján, ha a jelöli a derékszögű háromszög átfogóját, akkor a terület egy a oldalú szabályos háromszög területének a fele, a kerület pedig: $K = a + \frac{a}{2} + \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

a) $K = 6 + 2\sqrt{3}$ cm $\approx 9{,}464$ cm, $T = 2\sqrt{3}$ cm$^2 \approx 3{,}464$ cm^2;

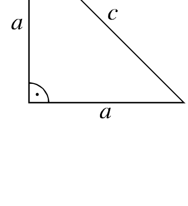
b) $K = 9 + 3\sqrt{3}$ dm $\approx 14{,}196$ dm, $T = \frac{9}{2} \cdot \sqrt{3}$ dm$^2 \approx 7{,}794$ dm^2;

c) $K = 15 + 5\sqrt{3}$ m $\approx 23{,}66$ m, $T = \frac{25}{2} \cdot \sqrt{3}$ m$^2 \approx 21{,}65$ m^2;

d) $K = 24 + 8\sqrt{3}$ mm $\approx 37{,}856$ mm, $T = 32 \cdot \sqrt{3}$ mm$^2 \approx 55{,}426$ mm^2;

e) $K = 30 + 10\sqrt{3}$ cm $\approx 47{,}32$ cm, $T = 50 \cdot \sqrt{3}$ cm$^2 \approx 86{,}6$ cm^2.

2448. Pitagorasz tétele alapján $c^2 = 2a^2$, ahonnan



$$a = \frac{c}{\sqrt{2}} = \frac{c\sqrt{2}}{2}.$$

Így $K = c\sqrt{2} + c = c \cdot \left(\sqrt{2} + 1\right)$ és

$$T=\left(\frac{c}{\sqrt{2}}\right)^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{c^2}{4}.$$

a) $K=6\cdot\left(\sqrt{2}+1\right)\text{ cm}\approx 14{,}485\text{ cm},\ \ T=9\text{ cm}^2;$

b) $K=4\cdot\left(\sqrt{2}+1\right)\text{ dm}\approx 9{,}657\text{ dm},\ \ T=4\text{ dm}^2;$

c) $K=0{,}8\cdot\left(\sqrt{2}+1\right)\text{ m}\approx 1{,}931\text{ m},\ \ T=0{,}16\text{ m}^2;$

d) $K=12\cdot\left(\sqrt{2}+1\right)\text{ mm}\approx 28{,}97\text{ mm},\ \ T=36\text{ mm}^2;$

e) $K=\frac{7}{3}\cdot\left(\sqrt{2}+1\right)\text{ m}\approx 5{,}633\text{ m},\ \ T=\frac{49}{36}\text{ m}^2;$

f) $K=\frac{64}{13}\cdot\left(\sqrt{2}+1\right)\text{ dm}\approx 11{,}885\text{ dm},\ \ T=\frac{1024}{169}\text{ dm}^2\approx 6{,}059\text{ dm}^2.$

2449. Az egyenlő szárú derékszögű háromszög átfogójához tartozó magassága fele az átfogónak, így, ha m jelöli a magasságot, akkor az előző feladat megoldása során kapott összefüggések alapján

$$K=2\left(\sqrt{2}+1\right)\cdot m\quad\text{és}\quad T=m^2.$$

a) $K=8\cdot\left(\sqrt{2}+1\right)\text{ cm}\approx 19{,}314\text{ cm},\ \ T=16\text{ cm}^2;$

b) $K=10\cdot\left(\sqrt{2}+1\right)\text{ m}\approx 24{,}142\text{ m},\ \ T=25\text{ m}^2;$

c) $K=4{,}8\cdot\left(\sqrt{2}+1\right)\text{ dm}\approx 11{,}588\text{ dm},\ \ T=5{,}76\text{ dm}^2;$

d) $K=136\cdot\left(\sqrt{2}+1\right)\text{ mm}\approx 328{,}333\text{ mm},\ \ T=4624\text{ mm}^2;$

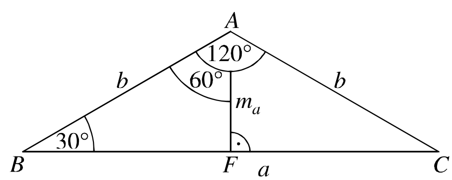
e) $K=\frac{20}{3}\cdot\left(\sqrt{2}+1\right)\text{ mm}\approx 16{,}094\text{ mm},\ \ T=\frac{100}{9}\text{ mm}^2=11{,}\dot{1}\text{ mm}^2;$

f) $K=\frac{166}{19}\cdot\left(\sqrt{2}+1\right)\text{ cm}\approx 21{,}093\text{ cm},\ \ T=\frac{6889}{361}\text{ cm}^2\approx 19{,}083\text{ cm}^2.$

2450. Az egyenlő szárú háromszög derékszögű. Az előző feladat alapján $T=m^2<90\text{ cm}^2$. Így m lehetséges értékei: 1 cm, 2 cm, 3 cm, 4 cm, 5 cm, 6 cm, 7 cm, 8 cm, 9 cm.

2451. $T_1=10,\ T_2=18,\ T_3=14{,}5,\ T_4=14,\ T_5=14.$
Így a sorrend: $T_1<T_4=T_5<T_3<T_2$.

2452. Az ABF derékszögű háromszög a 2447. feladatnak megfelelő, így $a=b\sqrt{3}$ és $b=2m_a$. Ezek alapján:



$$K=2b+b\sqrt{3}=4m_a+2\sqrt{3}\cdot m_a\ \text{ és}$$

$$T = \frac{b^2\sqrt{3}}{4} = m_a^2\sqrt{3}\ .$$

a) $K = 12 + 6\sqrt{3}$ cm $\approx 22{,}392$ cm, $T = 9\sqrt{3}$ cm^2 $\approx 15{,}588$ cm^2;

b) $K = 8 + 4\sqrt{3}$ m $\approx 14{,}928$ m, $T = 4\sqrt{3}$ m^2 $\approx 6{,}928$ m^2;

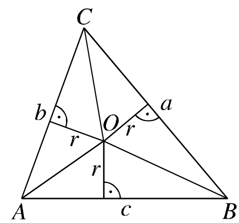
c) $K = 24 + 12\sqrt{3}$ mm $\approx 44{,}785$ mm, $T = 36\sqrt{3}$ mm^2 $\approx 62{,}354$ mm^2;

d) Lásd az *a)* pontot!

e) $K = 6 + 3\sqrt{3}$ dm $\approx 11{,}196$ dm, $T = 2{,}25\cdot\sqrt{3}$ dm^2 $\approx 3{,}897$ dm^2;

f) $K = 90 + 45\sqrt{3}$ mm $\approx 167{,}942$ mm, $T \approx 876{,}85$ mm^2.

2453. Jelölje O a beírható kör középpontját, és bontsuk fel a háromszöget az AOB, BOC és COA háromszögekre. Ezek területe: $T_{AOB} = \frac{c\cdot r}{2}$; $T_{BOC} = \frac{a\cdot r}{2}$; $T_{COA} = \frac{b\cdot r}{2}$. Az ABC háromszög területe ezek összege, azaz



$$T_{ABC} = \frac{a\cdot r}{2} + \frac{b\cdot r}{2} + \frac{c\cdot r}{2} =$$

$$= \frac{r}{2}\cdot(a+b+c) = \frac{K\cdot r}{2}$$

ahol $K = a + b + c$ a háromszög kerülete.

2454. Lásd az előző feladatot!

r	5 cm	**10 dm**	10 mm	0,7 m
K	30 cm	4 m	**5 cm**	28 dm
T	**75 cm²**	200 dm²	2,5 cm²	**98 dm²**

2455. A feltétel szerint

$$13 \text{ cm} < a + b + c < 18 \text{ cm}.$$

Mivel $a = 7$ cm és $b = 2c$, ezért

$$6 \text{ cm} < 3c < 11 \text{ cm},$$

azaz

$$2 \text{ cm} < c < \frac{11}{3} \text{ cm}.$$

A b oldalra nézve

$$4 \text{ cm} < b < \frac{22}{3} \text{ cm}.$$

Mivel $b + c > a$, ezért $c > \frac{7}{3}$ cm és $b > \frac{14}{3}$ cm.

Összefoglalva

$$\frac{7}{3} \text{ cm} < c < \frac{11}{3} \text{ cm},$$

$$\frac{14}{3} \text{ cm} < b < \frac{22}{3} \text{ cm}.$$

2456. Legyen a telek szára *b* méter, alapja *a* méter. A feltételek alapján

1. $\frac{3}{2}b = 24 \text{ m} \;\rightarrow\; b = 16 \text{ m}.$

2. $a + \frac{b}{2} = 25 \text{ m} \;\rightarrow\; a = 17 \text{ m}.$

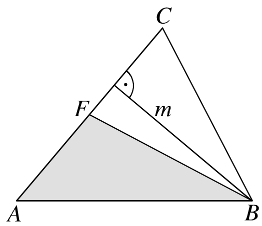
Az alaphoz tartozó magasság Pitagorasz tételéből számolható.

$$m_a^2 = b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 183{,}75 \text{ m}^2$$

$$m_a \approx 13{,}56 \text{ m}.$$

Így $T = \frac{a \cdot m_a}{2} = 115{,}26 \text{ m}^2$.

2457. $T_{ABF} = \frac{AF \cdot m}{2}$, $T_{BCF} = \frac{FC \cdot m}{2}$. Mivel $AF = FC$, ezért valóban $T_{ABF} = T_{BCF}$.



2458. Lásd az előző feladatot!

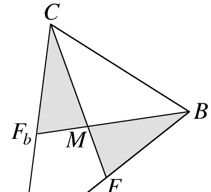
2459. $T_{CF_bM} = T_{CF_bB} - T_{CMB}$ (1)

$T_{BMF_c} = T_{BCF_c} - T_{CMB}$ (2)

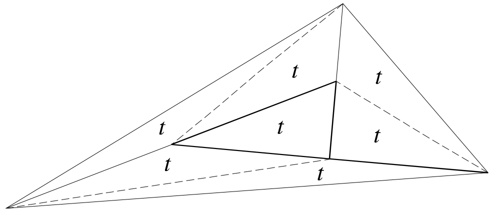
A 2457. feladat alapján $T_{CF_bB} = T_{BCF_c}$.

Ezt az (1) és (2) összefüggésekkel összevetve:

$$T_{CF_bM} = T_{BMF_c}.$$



2460. A 2457. feladat állítását többször alkalmazva kapjuk, hogy a nagy háromszög területe 7-szerese az eredetinek. (Lásd az ábrát!)



2461. $T = \dfrac{e \cdot f}{2} = a \cdot m_a + b \cdot m_b$

a) $T = 30\ \text{cm}^2$; *b)* $T = 12\ \text{cm}^2$; *c)* $T = 7{,}84\ \text{cm}^2$;
d) $T = 50\ \text{cm}^2$; *e)* $T = 16{,}5\ \text{cm}^2$, $K = 18$ cm; *f)* $T = 96\ \text{cm}^2$, $K = 32$ cm;
g) $T = 30\ \text{cm}^2$, $K = 24$ cm.

2462. $T = \dfrac{e \cdot f}{2} = 2 \cdot a \cdot m_a$, $K = 4a = 4\sqrt{\left(\dfrac{e}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{f}{2}\right)^2} = 2 \cdot \sqrt{e^2 + f^2}$.

a) $T = 24\ \text{cm}^2$, $K = 20$ cm; *b)* $T = 1{,}2\ \text{m}^2$, $K = 5{,}2$ m;
c) $T = 0{,}96\ \text{dm}^2$, $K = 4$ dm; *d)* $T = 2{,}16\ \text{cm}^2$, $K = 6$ cm;
e) $T = 30\ \text{m}^2$, $K = 20$ m; *f)* $T = 77{,}76\ \text{cm}^2$, $K = 28{,}8$ cm;
g) $T = 5119{,}2\ \text{dm}^2$, $K = 324$ dm.

2463. $T = a \cdot m_a$

a) $32\ \text{cm}^2$; *b)* $2{,}76\ \text{dm}^2$; *c)* $12{,}642\ \text{dm}^2$; *d)* $31{,}356\ \text{m}^2$; *e)* $23{,}4\ \text{cm}^2$;
f) $34{,}182\ \text{dm}^2$.

2464. $K = 2(a + b)$, $T = a \cdot m_a + b \cdot m_b$

a) $K = 16$ cm, $T = 19\ \text{cm}^2$;
b) $K = 18$ dm, $T = 29{,}5\ \text{dm}^2$;
c) $K = 4\sqrt{\left(\dfrac{e}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{f}{2}\right)^2} = 2 \cdot \sqrt{e^2 + f^2} \approx 20{,}8$ cm, $T = \dfrac{e \cdot f}{2} = 26{,}24\ \text{cm}^2$;
d) $b = \dfrac{e}{2} = \dfrac{f}{2}$, $a = b\sqrt{3} = \dfrac{e}{2} \cdot \sqrt{3}$, $K = e\left(1 + \sqrt{3}\right) = 8 \cdot \left(1 + \sqrt{3}\right)\ \text{m} \approx 21{,}86\ \text{m}$,
$T = a \cdot b = \dfrac{e^2}{4} \cdot \sqrt{3} = 16 \cdot \sqrt{3}\ \text{m}^2 \approx 13{,}856\ \text{m}^2$.
(Az átlók egyenlőségéből adódik, hogy a paralelogramma téglalap. Lásd még a 2446. feladatot!)
e) $K = 20$ cm, $T = 40\ \text{cm}^2$;
f) $K = 160$ cm, $T = 9{,}6\ \text{dm}^2$.

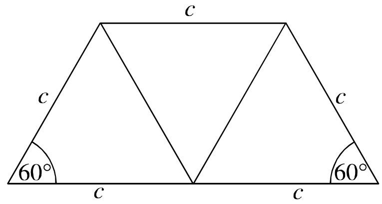
2465. A középpontos tükrözéssel kapott síkidom mindhárom esetben paralelogramma lesz.
a) $K = 14$ cm; *b)* $K = 12$ cm; *c)* $K = 10$ cm.

2466. $K = a + 2b + c,\ T = \dfrac{a+c}{2}\cdot m,\ b = d = \sqrt{\left(\dfrac{a-c}{2}\right)^2 + m^2}$.

a) $K = 26\text{ cm} + 2\cdot\sqrt{3^2+4^2}\text{ cm} = 36\text{ cm},\ T = 52\text{ cm}^2$;

b) $K = 56\text{ m},\ T = 180\text{ m}^2$;

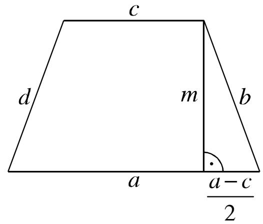
c) A trapéz három szabályos háromszögből tevődik össze. (Lásd a 2466/1. ábrát!) Így $K = 5c = 40\text{ dm}$, $T = 3\cdot\dfrac{c^2\sqrt{3}}{4} =$ $= 48\sqrt{3}\text{ dm}^2 \approx 81{,}138\text{ dm}^2$. (Lásd még a 2446. feladatot!)



2466/1. ábra

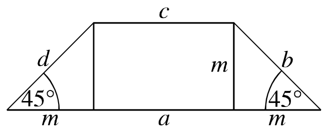
d) A 2466/2. ábra alapján $\dfrac{a-c}{2} =$ $= \sqrt{b^2 - m^2} = 8\text{ mm}$. Így $a = 21\text{ mm}$. $K = 46\text{ mm},\ T = 78\text{ mm}^2$.

e) A trapéz téglalap, így $K = 18\text{ m}$, $T = 20\text{ m}^2$.



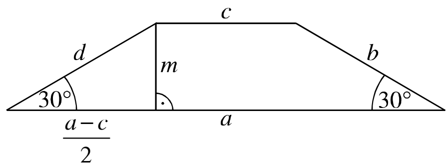
2466/2. ábra

f) A 2466/3. ábra alapján $m = \dfrac{a-c}{2} = 4\text{ dm}$ és $b = d = m\cdot\sqrt{2} = 4\cdot\sqrt{2}\text{ dm} \approx$ $\approx 5{,}657\text{ dm}$. Így $K = 32 + 8\sqrt{2}\text{ dm} \approx$ $\approx 43{,}314\text{ dm},\ T = 64\text{ dm}^2$.



2466/3. ábra

g) A 2466/4. ábra és a 2447. feladat alapján $m = \dfrac{d}{2}$ és $\dfrac{a-c}{2} = \dfrac{d\sqrt{3}}{2}$, ahonnan $c = a - d\sqrt{3}$. Az adatokból c-re negatív érték adódik, így nincs ilyen trapéz.



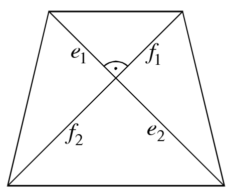
2466/4. ábra

2467. $e = e_1 + e_2, f = f_1 + f_2$. Mivel a trapéz szimmetrikus, ezért $e_1 = f_1$ és $e_2 = f_2$. (Lásd az ábrát!) A merőlegességből adódóan

$$T = \frac{e_1\cdot f_1}{2} + \frac{e_2\cdot f_1}{2} + \frac{e_2\cdot f_2}{2} + \frac{e_1\cdot f_2}{2} =$$

$$e_1\cdot\frac{f_1+f_2}{2} + e_2\cdot\frac{f_1+f_2}{2} =$$

$$\frac{(e_1+e_2)\cdot(f_1+f_2)}{2} = \frac{e\cdot f}{2} = \frac{e^2}{2} .$$



a) 2 cm^2; *b)* 8 m^2; *c)* 12,5 dm^2; *d)* 578 mm^2.

2468. $T = \dfrac{(a+c)\cdot m}{2}$, $m = \dfrac{2T}{a+c}$, $a = \dfrac{2T}{m} - c$, $c = \dfrac{2T}{m} - a$.

a	*c*	*m*	*T*
20 m	12 m	8 m	**128 m^2**
13 dm	85 cm	**60 cm**	6450 cm^2
–	3 cm	4,5 cm	500 mm^2
32 cm	**8 cm**	2,4 dm	4,8 dm^2

2469. $K = a+b+c+d$, $T = \dfrac{(a+c)\cdot m}{2}$, $a = \dfrac{2T}{m} - c$, $b = K - (a+c+d)$.

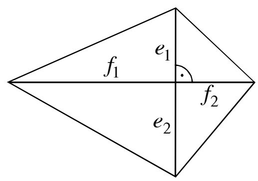
a	*b*	*c*	*d*	*m*	*K*	*T*
8 cm	10 cm	6 cm	8 cm	7,6 cm	**32 cm**	**53,2 cm^2**
4,12 cm	22 mm	1,5 cm	0,12 dm	1 cm	**9,02 cm**	2,81 cm^2
13 m	**5,3 m**	8 m	600 cm	50 dm	3230 cm	**52,5 m^2**

2470. $T_1 = 25$, $T_2 = 32$, $T_3 = 24$, $T_4 = 15$, $T_5 = 27$, $T_6 = 22{,}5$.
$T_2 > T_5 > T_1 > T_3 > T_6 > T_4$

2471. A 2467. feladat kapcsán leírtakkal analóg módon bizonyítható, hogy ebben az esetben $T = \dfrac{e\cdot f}{2}$. (Lásd még a 2472. feladatot!)

a) 5 cm^2; *b)* 242,2 m^2; *c)* 3,9 dm^2.

2472. $e_1 + e_2 = e$, $f_1 + f_2 = f$. $T = \dfrac{e_1\cdot f_1}{2} +$

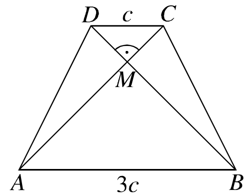


$+\dfrac{e_1\cdot f_2}{2} + \dfrac{e_2\cdot f_1}{2} + \dfrac{e_2\cdot f_2}{2} =$

$= \dfrac{e_1}{2}(f_1+f_2) + \dfrac{e_2}{2}(f_1+f_2) = \dfrac{e_1}{2} f +$

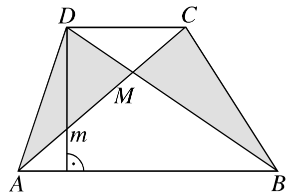
$+\dfrac{e_2}{2} f = \dfrac{e_1+e_2}{2}\cdot f = \dfrac{e\cdot f}{2}$.

2473. Ha c jelöli a rövidebb alapot, akkor a hosszabb alap $3c$. Az ABM és DMC háromszögek hasonlóak, ezért az M pont $3:1$ arányban osztja az átlókat. DMC egyenlő szárú derékszögű háromszög, ezért $DM = MC = \dfrac{c}{\sqrt{2}}$. Így $DB = AC = 4 \cdot \dfrac{c}{\sqrt{2}}$. A 2467. feladat alapján $T = \dfrac{DB \cdot AC}{2} = \dfrac{1}{2} \cdot \left(4 \cdot \dfrac{c}{\sqrt{2}}\right)^2 =$ $= 4c^2$. Mivel $c = \dfrac{168\ \text{mm}}{4} = 42\ \text{mm}$, ezért $T = 7056\ \text{mm}^2$.

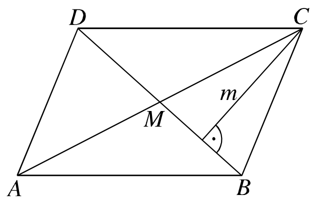


2474. Az adatok alapján a trapéz a 2466. feladat *c)* pontjának megfelelő, így $T = 3 \cdot \dfrac{3{,}6^2 \cdot \sqrt{3}}{4}\ \text{dm}^2 \approx 16{,}84\ \text{dm}^2$.

2475. $T_{AMD} = T_{ACD} - T_{MCD}$ és $T_{CMB} = T_{BCD} -$ $- T_{MCD}$. Másrészt $T_{ACD} = \dfrac{DC \cdot m}{2} =$ $= T_{BCD}$. Ezeket összevetve adódik a feladat állítása.

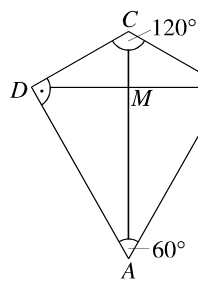


2476. A paralelogramma átlói felezik egymást, így $T_{MCD} = T_{MBC}$. (Egy-egy oldal és a hozzátartozó magasság egyenlő.) A középpontos szimmetriából adódóan $T_{MCD} = T_{MAB}$ és $T_{MBC} = T_{MDA}$. Ezzel az állítást beláttuk.



2477. A szögekre tett feltételek alapján:

1. $BCD\sphericalangle = 120°$.
2. Az ABD háromszög szabályos, így $AB = BD = DA$.
3. A BCM háromszög olyan derékszögű háromszög, amelynek egyik hegyesszöge 30°, így $DB = BC \cdot \sqrt{3}$, $MC = \dfrac{BC}{2}$ és $MB = \dfrac{BC \cdot \sqrt{3}}{2}$. (Lásd



a 2446. és a 2447. feladatot!)

Ezek alapján: $AC = AM + MC = \frac{AB \cdot \sqrt{3}}{2} + \frac{BC}{2} = \frac{DB \cdot \sqrt{3}}{2} + \frac{BC}{2} = BC \cdot \frac{3}{2} + \frac{BC}{2} = 2 \cdot BC.$

Tehát $AC = 4$ m, $MC = 1$ m, $AM = 3$ m, $DB = 2 \cdot \sqrt{3}$ m. $K = 2 \cdot AB + 2 \cdot BC =$
$= \left(4 \cdot \sqrt{3} + 4\right)$ m $= 4 \cdot \left(\sqrt{3} + 1\right)$ m $\approx 10{,}93$ m, $T = \frac{AC \cdot DB}{2} = 4 \cdot \sqrt{3}$ m$^2 \approx 6{,}93$ m^2.

2478. Legyen a hosszabbik alap hossza dm-ben a, a rövidebbiké c, a magassága pedig legyen m.

$$a = 2c + 0{,}3 \text{ és } a + c = 6.$$

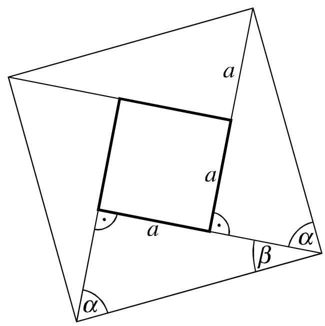
Innen

$$a = 4{,}1 \text{ dm}, \ c = 1{,}9 \text{ dm}, m = 0{,}4 \cdot a = 1{,}64 \text{ dm}.$$

Így

$$T = \frac{a + c}{2} \cdot m = 4{,}92 \text{ dm}^2.$$

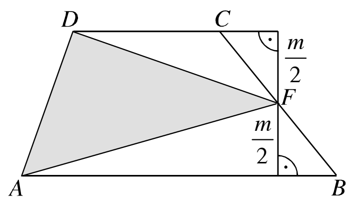
2479. Az ábrán látható négy derékszögű háromszög egybevágó, ugyanis két-két oldaluk (a; $2a$) és a közbezárt szög (90°) megegyezik. (Lásd az ábrát!) A kapott négyszög oldalai ezért egyenlők, és mivel $\alpha + \beta = 90°$, a négyszög valóban négyzet. Egy derékszögű háromszög területe $\frac{2a \cdot a}{2} = a^2$, így a nagy négyzet területe ötszöröse az eredeti négyzet területének.



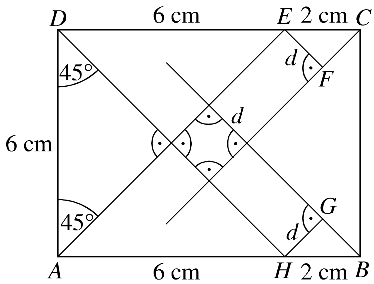
2480. Ha m jelöli a trapéz magasságát, a nem szürkén satírozott terület

$$T' = \frac{AB \cdot \frac{m}{2}}{2} + \frac{CD \cdot \frac{m}{2}}{2} = \frac{AB + CD}{4} \cdot m.$$

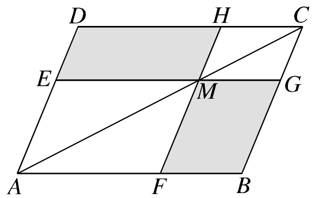
(Lásd az ábrát!) Ez fele a trapéz területének, így a vonalkázott terület is fele a trapéz területének.



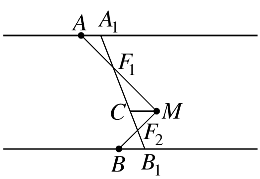
2481. A szögfelezők metszéspontjai által meghatározott négyszög szögei derékszögek, ugyanis a szomszédos szögek szögfelezői derékszögben metszik egymást. Az ábrán látható, hogy mivel a szemközti szögek szögfelezői párhuzamosak és az oldalakkal 45°-os szöget zárnak be, ezért az *EFC* és *GHB* háromszögek egybevágó egyenlő szárú derékszögű háromszögek, amelyek átfogója 2 cm hosszú. A szögfelezők által bezárt négyszög tehát négyzet, amelynek oldala $d = \frac{2}{\sqrt{2}}\text{ cm} = \sqrt{2}\text{ cm}$. Így területe 2 cm^2.



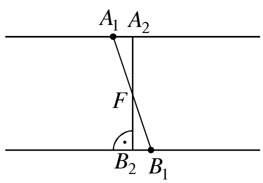
2482. $T_{ABC} = T_{ACD}$, $T_{AME} = T_{AFM}$, valamint $T_{MCM} = T_{MGC}$. Mivel $T_{EMHD} = T_{ACD} - T_{AME} - T_{MCH}$ és $T_{FBGM} = T_{ABC} - T_{AFM} - T_{MGC}$, ezért a vonalkázott területek valóban egyenlőek.



2483. A töröttvonal helyettesíthető a párhuzamosokra merőleges szakasszal. A helyettesítést két lépésben végezzük el.



2483/1. ábra

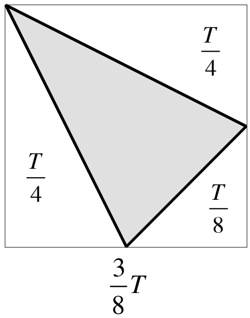


2483/2. ábra

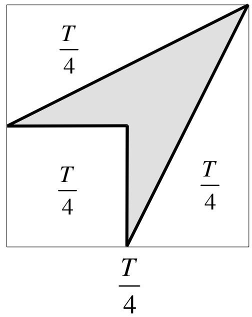
1. Ha F_1 az AM, F_2 pedig a BM szakasz felezőpontja, akkor az F_1F_2 egyenes A_1B_1 szakasza jó helyettesítő, ugyanis $T_{AF_1A_1} = T_{F_1CM}$ és $T_{CF_2M} = T_{BB_1F_2}$. (Lásd a 2483/1. ábrát!)
2. Ha F az A_1B_1 szakasz felezőpontja, akkor a rá illeszkedő A_2B_2 szakasz megfelel, ugyanis $T_{A_1FA_2} = T_{B_2B_1F}$. (Lásd a 2483/2. ábrát!)

2484. Jelölje T a négyzet területét.

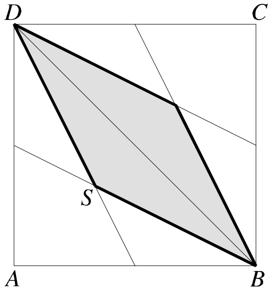
a)



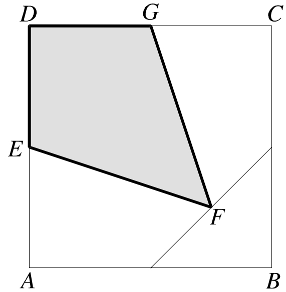
b)



c)



d)

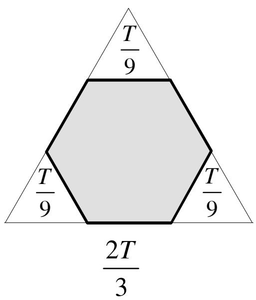


S súlypont az ABD háromszögben, így $T_{SBD} = \dfrac{T_{ABD}}{3}$, tehát a vonalkázott rész területe $\dfrac{T}{3}$.

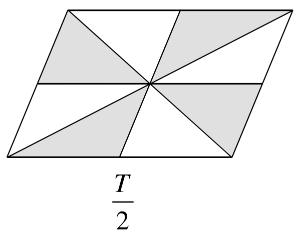
$T = \dfrac{AC \cdot BD}{2}$, F negyedeli a BD átlót, így $T_{EFGD} = \dfrac{\frac{1}{2} AC \cdot \frac{3}{4} BD}{2} = \dfrac{3}{8} T$.

2485. Jelölje T mindegyik esetben az eredeti síkidom területét.

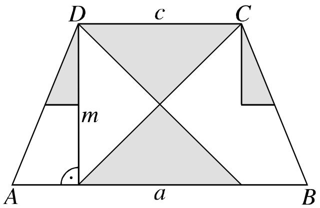
a)



b)



c)



$$T = T_{ABCD} = (a+c)\cdot\frac{m}{2}$$

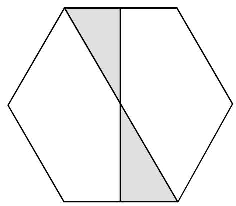
A vonalkázott rész területe:

$$\frac{c\cdot m}{2} + \frac{a-c}{2}\cdot\frac{m}{2} =$$

$$= \frac{m}{2}\cdot\left(c + \frac{a-c}{2}\right) =$$

$$= \frac{m}{2}\cdot\frac{a+c}{2} = \frac{T}{2}.$$

d)

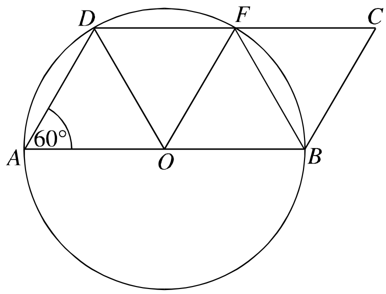


$$\frac{T}{6}$$

2486. Az *ABFD* húrtrapéz felbontható három egybevágó szabályos háromszögre, amelyek oldalának hossza 4 cm. A paralelogramma négy ilyen szabályos háromszög egyesítése, így a 2446. feladat alapján

$$T = 4\cdot\frac{16\cdot\sqrt{3}}{4}\ \text{cm}^2 = 16\cdot\sqrt{3}\ \text{cm}^2 \approx$$

$\approx 27{,}71\ \text{cm}^2$, és $K = 24$ cm.



2487. Ha a szabályos háromszög oldala *a*, akkor a hatszög oldala $\frac{a}{2}$. A háromszög területe (lásd a 2446. feladatot):

$$t_1 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

A hatszög területe:

$$t_2 = \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2\cdot\sqrt{3}}{4}\cdot 6 = a^2\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{3}{8}.$$

Így

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{a^2\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{3}{8}}{a^2\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{1}{4}} = \frac{3}{2}.$$

2488. *a)* $T = 69{,}5\ \text{cm}^2$.

b) $T = 180\ \text{cm}^2$.

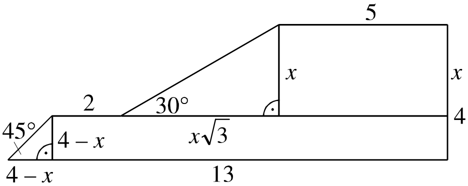
c) A 2488/1. ábra jelöléseit használva:

$$(4-x)+2+x\sqrt{3}+5=13$$

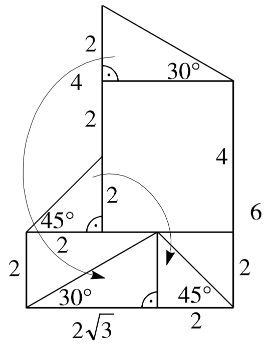
$$x=\frac{2}{\sqrt{3}-1}\approx 2{,}73 \text{ cm}$$

A területre nézve:

$$T=\frac{(4-x)^2}{2}+(4-x)(9+x)+\frac{x^2\sqrt{3}}{2}+5x\approx 35{,}81 \text{ cm}^2.$$



2488/1. ábra



2488/2. ábra

d) A 2488/2. ábrán látható átdarabolásokat elvégezve, és az ott látható adatokkal

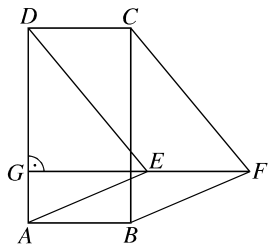
$$T=\left(4\left(\sqrt{3}+1\right)+8\sqrt{3}\right)\text{ cm}^2=\left(12\sqrt{3}+4\right)\text{ cm}^2\approx 24{,}78 \text{ cm}^2.$$

2489. $T = 772\,800 \text{ m}^2$.

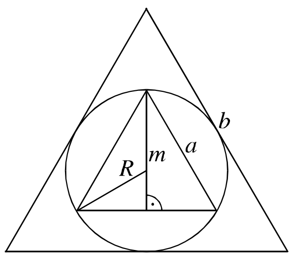
2490. $T = 35{,}84 \text{ m}^2$.

2491. $T_{ABFE} = AB \cdot AG$ és $T_{EFCD} = AB \cdot GD$.
Összegük:

$T_{ABFE} + T_{EFCD} =$
$= AB \cdot (AG + GD) = AB \cdot AD =$
$= T_{ABCD}$.



2492. *a)* A szabályos háromszög beírt és köréírt körének középpontja a háromszög súlypontja, amely 2 : 1 arányban osztja a súlyvonalakat. Ezt és a 2446. feladat kapcsán leírtakat felhasználva adódik, hogy a beírt háromszög magassága $m=\frac{3}{2}R$, oldala pedig $a=\frac{2m}{\sqrt{3}}=\frac{3R}{\sqrt{3}}$. A beírt há-



2492/1. ábra

romszög területe így

$$t = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4} =$$
$$= 12\sqrt{3}\ \text{cm}^2 \approx 20{,}78\ \text{cm}^2 .$$

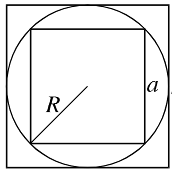
Hasonló okoskodással adódik, hogy a köréírt háromszögre nézve $b = \frac{2\cdot(3R)}{\sqrt{3}} = \frac{6R}{\sqrt{3}} = 2a$, ami alapján $T : t = 4 : 1$. (T a köréírt háromszög területe.)

b) A beírt négyzet átlójára nézve

$$a\sqrt{2} = 2R ,$$

így a beírt négyzet területe

$$t = 2R^2.$$



2492/2. ábra

A köréírt négyzet oldala

$$b = 2R,$$

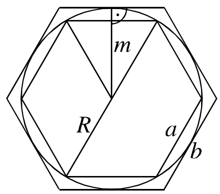
így területe

$$T = 4R^2.$$

Kaptuk, hogy $T : t = 2 : 1$.

c) A beírt szabályos hatszög oldala egyenlő a kör sugarával, így területe:

$$t = 6\cdot\frac{R^2\cdot\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}\cdot R^2}{2} \approx$$
$$\approx 41{,}57\ \text{cm}^2 .$$



2492/3. ábra

A köréírt hatszög középponti háromszögének m magasságára nézve: $m = R$. Így $b = \frac{2R}{\sqrt{3}}$, és a terület:

$$T = 6\cdot\frac{\left(\frac{2R}{\sqrt{3}}\right)^2\cdot\sqrt{3}}{4} = 2R^2\sqrt{3} .$$

Ezek alapján a területek aránya:

$$\frac{T}{t} = \frac{2R^2\sqrt{3}}{\frac{3\sqrt{3}R^2}{2}} = \frac{4}{3} .$$

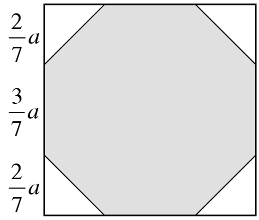
Megjegyzés: Megfigyelhető, hogy a sokszögek oldalszámának növekedésével a kérdéses arány csökken.

2493. Ha a jelöli a négyzet oldalának hosszát, akkor a levágott háromszögek területének összege:

$$\frac{8}{49}a^2 = 98\ \text{cm}^2.$$

Ebből $a = 24{,}5$ cm, és így a nyolcszög területe

$$T = a^2 - 98\ \text{cm}^2 = 502{,}25\ \text{cm}^2.$$



A kör és részeinek kerülete, területe

2494. *a)* $K = 8\pi\ \text{cm} \approx 25{,}12\ \text{cm}$, $T = 16\pi\ \text{cm}^2 \approx 50{,}24\ \text{cm}^2$;

b) $K = 10\pi\ \text{m} \approx 31{,}42\ \text{m}$, $T = 25\pi\ \text{m}^2 \approx 78{,}55\ \text{m}^2$;

c) $K = 56\pi\ \text{mm} \approx 175{,}84\ \text{mm}$, $T = 784\pi\ \text{mm}^2 \approx 2461{,}76\ \text{mm}^2$;

d) $K = 4{,}6\pi\ \text{dm} \approx 14{,}44\ \text{dm}$, $T = 5{,}29\pi\ \text{dm}^2 \approx 16{,}61\ \text{dm}^2$;

e) $K = \frac{4}{3}\pi\ \text{m} \approx 4{,}19\ \text{m}$, $T = \frac{4}{9}\pi\ \text{m}^2 \approx 1{,}4\ \text{m}^2$;

f) $K = \frac{18}{5}\pi\ \text{cm} \approx 11{,}3\ \text{cm}$, $T = \frac{81}{25}\pi\ \text{cm}^2 \approx 10{,}17\ \text{cm}^2$;

g) $K = \frac{50}{9}\pi\ \text{dm} \approx 17{,}44\ \text{dm}$, $T = \frac{625}{81}\pi\ \text{dm}^2 \approx 24{,}23\ \text{dm}^2$;

h) $K = 10\ \text{mm}$, $T = \frac{25}{\pi}\ \text{mm}^2 \approx 7{,}96\ \text{mm}^2$.

2495. *a)* $K = 10\pi\ \text{m} \approx 31{,}42\ \text{m}$, $T = 25\pi\ \text{m}^2 \approx 78{,}55\ \text{m}^2$;

b) $K = 24\pi\ \text{cm} \approx 75{,}36\ \text{cm}$, $T = 144\pi\ \text{cm}^2 \approx 452{,}16\ \text{cm}^2$;

c) $K = 1{,}6\pi\ \text{dm} \approx 5{,}024\ \text{dm}$, $T = 0{,}64\pi\ \text{dm}^2 \approx 2{,}01\ \text{dm}^2$;

d) $K = 3{,}64\pi\ \text{mm} \approx 11{,}43\ \text{mm}$, $T \approx 10{,}4\ \text{mm}^2$;

e) $K = 1{,}16\pi\ \text{m} \approx 3{,}64\ \text{m}$, $T \approx 1{,}06\ \text{m}^2$;

f) $K = \frac{4}{9}\pi\ \text{cm} \approx 1{,}4\ \text{cm}$, $T \approx 0{,}16\ \text{cm}^2$;

g) $K = \frac{39}{11}\pi\ \text{cm} \approx 11{,}13\ \text{cm}$, $T \approx 9{,}87\ \text{cm}^2$;

h) $K = 6\ \text{dm}$, $T = \frac{9}{\pi}\ \text{dm}^2 \approx 2{,}87\ \text{dm}^2$.

2496.

r	**2,26 m**	3 cm	**9 dm**	**3 cm**	**≈ 8,6 m**	**4 mm**
d	4,52 m	**6 cm**	**18 dm**	**6 cm**	**≈ 17,2 m**	**8 mm**
K	**≈ 14,2 m**	**≈ 18,84 cm**	18π dm	**≈ 18,84 cm**	54 m	**≈ 25,12 mm**
T	**≈ 16,04 m²**	**≈ 28,26 cm²**	**≈ 254,34 dm²**	9π cm²	**≈ 232,23 m²**	50,24 mm²

2497. $R = 1$ m; $\frac{R}{2} = r = 0{,}5$ m ; $\pi \approx 3{,}14$.

a) 6,28 m, 3,14 m; *b)* 12,56 m, 6,28 m; *c)* 3,14 m, 1,57 m;
d) 1,57 m, 0,785 m; *e)* 5,024 m, 2,512 m; *f)* 753,6 m, 376,8 m;
g) 1055,04 m, 527,52 m; *h)* 3692,64 m, 1846,32 m; *i)* 55012,8 m, 27506,4 m;
j) 275064 m, 137532 m.

2498. A kerék kerülete: $\frac{3{,}4\text{ km}}{1800} = \frac{3400\text{ m}}{1800} = \frac{17}{9}\text{ m} \approx 1{,}89\text{ m}$. Így

$$d = \frac{1{,}89\text{ m}}{\pi} \approx 0{,}602\text{ m} = 60{,}2\text{ cm},\ r = 30{,}1\text{ cm}.$$

2499. Egy menet hossza: $2r\pi \approx 25{,}12$ cm. Így a szükséges rézhuzal hossza: 502,4 m.

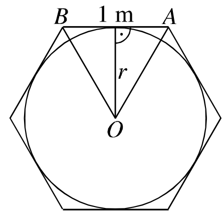
2500. Az r sugarú félkörív hossza $r\pi$. Az $\frac{r}{2}$ sugarú félkörívek összhossza: $2 \cdot \frac{r}{2} \cdot \pi = r\pi$. Hasonlóan adódik, hogy az $\frac{r}{2^n}$ (n természetes szám) sugarú félkörívek összhossza: $2^n \cdot \frac{r}{2^n} \cdot \pi = r\pi$.

2501. A kerületek aránya megegyezik az átmérők arányával, a területek aránya pedig az átmérők arányának négyzete, nevezetesen

a) 1 : 4; *b)* 4 : 9; *c)* 9 : 25; *d)* 1 : 12,25; *e)* 49 : 81; *f)* $p^2 : q^2$.

2502. *a)* A legnagyobb kivágható kör sugara a háromszög beírható körének sugara, ami a szabályos háromszög magasságának harmada. (Lásd a 2347., 2446. és 2492. feladatokat!) Így $r = \frac{m}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} m = \frac{\sqrt{3}}{6} m$. A hulladék területe: $\frac{\sqrt{3}}{4}\text{ m}^2 - \frac{\pi}{12}\text{ m}^2 \approx$ $\approx 0{,}17\text{ m}^2$.

b) A legnagyobb kivágható kör sugara a négyzet oldalának fele, azaz 0,5 m. A hulladék területe: $1\text{ m}^2 - \frac{\pi}{4}\text{ m}^2 \approx 0{,}21\text{ m}^2$.



c) A legnagyobb kivágható kör sugara az 1 m oldalú szabályos háromszög magassága (lásd az ábrát), azaz $r = \frac{\sqrt{3}}{2} m$. A hulladék területe (lásd a 2492. feladatot): $6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}\ \mathrm{m}^2 - \frac{3\pi}{4}\ \mathrm{m}^2 = 0{,}24\ \mathrm{m}^2$.

A kivágott körlap és a sokszöglap területének aránya az egyes esetekben:

a) $\frac{T_{\bigcirc}}{T_{\triangle}} = \frac{\frac{\pi}{12}}{\frac{\sqrt{3}}{4}} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \approx 0{,}6;$ *b)* $\frac{T_{\bigcirc}}{T_{\square}} = \frac{\pi}{4} \approx 0{,}79;$ *c)* $\frac{T_{\bigcirc}}{T_{⬡}} = \frac{\frac{3\pi}{4}}{\frac{3\sqrt{3}}{2}} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \approx 0{,}91.$

2503. Mindhárom esetben az adott körbe írható szabályos sokszöglemezt vágjuk ki.

a) A szabályos háromszög köré írható kör sugara a magasság kétharmada. (Lásd a 2347., 2446. és 2492. feladatokat!) Így $1\ \mathrm{m} = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, ahonnan $a = \sqrt{3}\ \mathrm{m}$.

A hulladék területe: $\pi\,\mathrm{m}^2 - \frac{3\sqrt{3}}{4}\ \mathrm{m}^2 \approx 1{,}84\ \mathrm{m}^2$.

b) A négyzet köré írható kör sugara az átló fele, így $1\ \mathrm{m} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, ahonnan $a = \sqrt{2}\ \mathrm{m}$.

A hulladék területe: $\pi\,\mathrm{m}^2 - 2\ \mathrm{m}^2 \approx 1{,}14\ \mathrm{m}^2$.

c) A szabályos hatszög köré írható kör sugara a hatszög oldalával egyenlő, így a hulladék területe: $\pi\,\mathrm{m}^2 - \frac{3\sqrt{3}}{2}\ \mathrm{m}^2 \approx 0{,}54\ \mathrm{m}^2$.

A kivágott sokszöglap és a kör területének aránya az egyes esetekben:

a) $\frac{T_{\triangle}}{T_{\bigcirc}} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{4}}{\pi} \approx 0{,}41;$ *b)* $\frac{T_{\square}}{T_{\bigcirc}} = \frac{2}{\pi} \approx 0{,}64;$ *c)* $\frac{T_{⬡}}{T_{\bigcirc}} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}}{\pi} \approx 0{,}82.$

2504. Ha a kör átmérője d és a középponti szög fokokban α, akkor a körcikk területe:

$$T = \frac{d^2 \cdot \pi}{4} \cdot \frac{\alpha}{360°},$$

kerülete pedig:

$$K = d + d\pi \cdot \frac{\alpha}{360°}.$$

a) $T = \frac{25\pi}{6}\ \mathrm{cm}^2 \approx 13{,}08\ \mathrm{cm}^2$, $K = \left(10 + \frac{5\pi}{3}\right)\ \mathrm{cm} \approx 15{,}23\ \mathrm{cm};$

b) $T = \frac{25\pi}{4}\text{ cm}^2 \approx 19{,}63\text{ cm}^2$, $K = \left(10 + \frac{5\pi}{2}\right)\text{ cm} \approx 17{,}85\text{ cm}$;

c) $T = \frac{25\pi}{12}\text{ cm}^2 \approx 6{,}54\text{ cm}^2$, $K = \left(10 + \frac{5\pi}{6}\right)\text{ cm} \approx 12{,}62\text{ cm}$;

d) $T = \frac{25\pi}{8}\text{ cm}^2 \approx 9{,}82\text{ cm}^2$, $K = \left(10 + \frac{5\pi}{4}\right)\text{ cm} \approx 13{,}92\text{ cm}$;

e) $T = \frac{25\pi}{2}\text{ cm}^2 \approx 39{,}26\text{ cm}^2$, $K = (10 + 5\pi)\text{ cm} \approx 25{,}7\text{ cm}$;

f) $T = \frac{3}{4}\cdot 25\pi\text{ cm}^2 \approx 58{,}88\text{ cm}^2$, $K = \left(10 + \frac{3}{2}\cdot 5\pi\right)\text{ cm} \approx 33{,}55\text{ cm}$;

g) $T = \frac{25\pi}{36}\text{ cm}^2 \approx 2{,}18\text{ cm}^2$, $K = \left(10 + \frac{5\pi}{18}\right)\text{ cm} \approx 10{,}87\text{ cm}$;

h) $T = \frac{25\pi}{24}\text{ cm}^2 \approx 3{,}27\text{ cm}^2$, $K = \left(10 + \frac{5\pi}{12}\right)\text{ cm} \approx 11{,}31\text{ cm}$;

i) $T = \frac{25\pi}{18}\text{ cm}^2 \approx 4{,}36\text{ cm}^2$, $K = \left(10 + \frac{5\pi}{9}\right)\text{ cm} \approx 11{,}75\text{ cm}$;

j) $T = \frac{25\pi}{16}\text{ cm}^2 \approx 4{,}91\text{ cm}^2$, $K = \left(10 + \frac{5\pi}{8}\right)\text{ cm} \approx 11{,}96\text{ cm}$;

k) $T = \frac{11}{48}\cdot 25\pi\text{ cm}^2 \approx 18\text{ cm}^2$, $K = \left(10 + \frac{11}{24}\cdot 5\pi\right)\text{ cm} \approx 17{,}2\text{ cm}$.

2505. *a)* 180°; *b)* 90°; *c)* 60°; *d)* 240°; *e)* ≈ 257,14°; *f)* 216°; *g)* 270°.

2506. Ha R jelöli a körcikk sugarát és α a körcikk középponti szöge fokokban, akkor

$$\frac{r}{R} = \frac{\alpha}{360°}.$$

Így a körcikk területe

$$T = R^2\pi\cdot\frac{\alpha}{360°} = R^2\pi\cdot\frac{r}{R} = rR\pi,$$

kerülete pedig

$$K = 2R + 2r\pi = 2(R + r\pi).$$

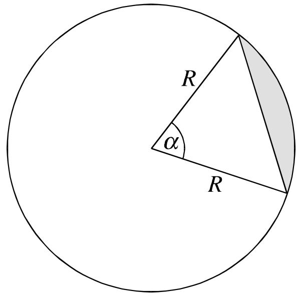
a) $T = 1{,}5\pi\text{ cm}^2 \approx 4{,}71\text{ cm}^2$, $K \approx 9{,}14\text{ cm}$;

b) $T = 3\pi\text{ cm}^2 \approx 9{,}42\text{ cm}^2$, $K \approx 12{,}28\text{ cm}$;

c) $T = 4{,}5\pi\text{ cm}^2 \approx 14{,}13\text{ cm}^2$, $K \approx 15{,}42\text{ cm}$;

d) $T = 6\pi\text{ cm}^2 \approx 18{,}84\text{ cm}^2$, $K \approx 18{,}56\text{ cm}$.

2507. Az α középponti szöghöz tartozó körszelet az ábrán vonalkázással jelölt síkidom.



a) $\alpha = 90°$,

$$T = \frac{R^2\pi}{4} - \frac{R^2}{2} = \frac{R^2}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) \approx 28{,}5 \text{ cm}^2,$$

$$K = \frac{2R\pi}{4} + R\cdot\sqrt{2} = R\left(\frac{\pi}{2} + \sqrt{2}\right) \approx 29{,}84 \text{ cm}.$$

b) $\alpha = 180°$. A körszelet most maga a félkörlap, így $T = \dfrac{R^2\pi}{2} \approx 157 \text{ cm}^2$, $K = R\pi + 2R \approx 51{,}4$ cm.

c) $\alpha = 270°$. A megfelelő körszelet a körlapnak az *a)* pontbeli körszelet elhagyása után kapott része.

$$T = R^2\pi - \left(\frac{R^2\pi}{4} - \frac{R^2}{2}\right) = \frac{R^2}{2}\left(1 + \frac{3\pi}{2}\right) \approx 285{,}5 \text{ cm}^2,$$

$$K = \frac{3}{4}\cdot 2R\pi + R\cdot\sqrt{2} = R\left(\frac{3\pi}{2} + \sqrt{2}\right) \approx 61{,}24 \text{ cm}.$$

d) $\alpha = 360°$. A körszelet most a teljes körlap. $T = R^2\pi \approx 314 \text{ cm}^2$, $K = 2R\pi \approx 62{,}8$ cm.

e) $\alpha = 60°$. Ekkor a körszeletet határoló húr hossza R, és a középponti háromszög területe $\dfrac{R^2\sqrt{3}}{4}$. (Lásd a 2446. feladatot!)

$$T = \frac{R^2\pi}{6} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{R^2}{2}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \approx 9{,}03 \text{ cm}^2,$$

$$K = R + \frac{2R\pi}{6} = R\left(1 + \frac{\pi}{3}\right) \approx 20{,}47 \text{ cm}.$$

f) $\alpha = 120°$. A körszeletet határoló húr hossza $R\sqrt{3}$ és a megfelelő középponti háromszög területe $\dfrac{R^2\sqrt{3}}{4}$. (Lásd a 2446. és 2452. feladatokat!)

$$T = \frac{R^2\pi}{3} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4} = R^2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) \approx 61{,}37 \text{ cm}^2,$$

$$K = \frac{2R\pi}{3} + R\sqrt{3} = R\left(\frac{2\pi}{3} + \sqrt{3}\right) \approx 38{,}25 \text{ cm}.$$

2508. A körgyűrű területe: $T = (R^2 - r^2)\pi = (R + r)(R - r)\pi = (R + r) \cdot d \cdot \pi$.

r	R	d	T
3 cm	5 cm	**2 cm**	**50,24 cm²**
25 mm	0,04 m	**1,5 cm**	**30,62 cm²**
5 cm	**7 cm**	0,2 dm	**75,36 cm²**
5,6 m	6 m	40 cm	**14,57 m²**
–	10 mm	–	30 cm²
2,8 dm	**4,16 m**	**3,88 m**	54 m²
7,5 cm	**12,5 cm**	5 cm	314 cm²
6,75 cm	**7,25 cm**	5 mm	7π cm²

2509. $T = (R + r)(R - r)\pi$.

a) $T \approx 62{,}8$ cm^2; *b)* $T \approx 33$ dm^2; *c)* $T \approx 45{,}75$ m^2; *d)* $T \approx 47{,}1$ mm^2.

2510. Jelölje R a külső, r a belső kör sugarát. A kérdezett arány:

$$\frac{\left(R^2 - r^2\right)\pi}{R^2\pi} = 1 - \frac{r^2}{R^2} = 1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2.$$

a) $\frac{3}{4}$; *b)* $\frac{8}{9}$; *c)* $\frac{7}{16}$; *d)* $\frac{9}{25}$; *e)* $\frac{24}{49}$; *f)* $\frac{n^2 - m^2}{n^2}$.

2511. A kérdezett arány számértékileg a vonalkázott területtel egyezik meg.

a) A vonalkázott síkidom egy 1 sugarú körlap negyede, így az arány $\frac{\pi}{4} \approx 0{,}785$.

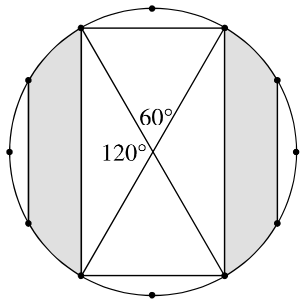
b) A vonalkázott terület most a négyzet területéből az előző pontban kimaradt terület kétszeresét kivonva adódik. $1 - 2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} - 1 \approx 0{,}57$.

c) Összességében egy $\frac{1}{2}$ sugarú kör területét kell levonni a négyzet területéből. $1 - \frac{\pi}{4} \approx 0{,}215$.

d) Az eredeti négyzetet négy olyan $\frac{1}{2}$ oldalú négyzetre lehet bontani, amelyekben a vonalkázott terület a *b)* pont négyzetéből kimaradt területnek felel meg. Így a vonalkázott terület: $4 \cdot 2\left(\frac{1}{4} - \frac{\pi}{16}\right) = 2 - \frac{\pi}{2} \approx 0{,}43$.

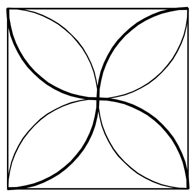
2512. Az alapkör területe π. Legyen A a kérdezett arány.

a) $A = \dfrac{\pi - \frac{\pi}{4}}{\pi} = \dfrac{3}{4}$; *b)* $A = \dfrac{\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{16}}{\pi} = \dfrac{5}{16}$; *c)* $A = \dfrac{\frac{1}{2}\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)}{\pi} = \dfrac{3}{8}$;



d) Az ábráról leolvasható, hogy az alap körlapból kimaradó síkidomok:
1. 2 darab 60°-os középponti szöghöz tartozó háromszög, összterületük $\frac{\sqrt{3}}{2}$. (Lásd a 2446. feladatot!)
2. 2 darab 120°-os középponti szöghöz tartozó háromszög, ezek összterülete is $\frac{\sqrt{3}}{2}$. (Lásd a 2452. feladatot!)
3. 4 darab 60°-os középponti szöghöz tartozó körszelet, ezek összterülete $4\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)=\frac{2\pi}{3}-\sqrt{3}$. (Lásd a 2507/*e)* feladatot!)

Így a megmaradó (vonalkázott) terület: $\pi-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\left(\frac{2\pi}{3}-\sqrt{3}\right)=\frac{\pi}{3}$, tehát $A=\frac{1}{3}$.



2513. Az ábráról leolvasható, hogy a feladatban pontozással jelölt területrész valóban a négyzet területének negyede.
A másik állításra is gyorsan adódik a bizonyítás, ha figyelembe vesszük, hogy az oldalakra írt félkörök területének összege egyenlő annak a negyedkörnek a területével, amelynek sugara a négyzet oldala.

2514. Jelölje A a kérdezett arányt.

a) A rombusz két szabályos háromszögből tevődik össze, így területe $\frac{\sqrt{3}}{2}$. (Lásd a 2446. feladatot!) A vonalkázott rész két $\frac{1}{2}$ sugarú, 60°-os középponti szöghöz tartozó körcikk, amelyek összterülete $\frac{\pi}{12}$. (Lásd a 2504. feladatot.) Így

$$A=\frac{\frac{\pi}{12}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\pi}{6\cdot\sqrt{3}}\approx 0{,}31.$$

b) A trapéz három darab 2 oldalhosszúságú szabályos háromszögből tevődik össze, így területe $3\cdot\frac{2^2\cdot\sqrt{3}}{4}=3\sqrt{3}$. (Lásd a 2446. és 2466/*c)* feladatokat!) A kimaradó rész összességében két $\frac{1}{2}$ sugarú körlap és két 1 sugarú, 60°-os középponti szöghöz tartozó körcikk. Ezek összterülete $2 \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$. (Lásd a 2504. feladatot!) A vonalkázott terület így $3\sqrt{3} - \frac{5\pi}{6}$, az arány pedig $A = \frac{3\sqrt{3} - \frac{5\pi}{6}}{3\sqrt{3}} = 1 - \frac{5\pi}{18\sqrt{3}} \approx 0{,}49.$

c) Az egyenlő szárú derékszögű háromszög átfogóhoz tartozó magassága 4, így a vonalkázott terület $16 - 4\pi$, az arány pedig $A = \frac{16 - 4\pi}{16} = 1 - \frac{\pi}{4} \approx 0{,}22.$

d) A hatszög 6 darab 2 oldalhosszúságú szabályos háromszögből tevődik össze, így területe $6\sqrt{3}$. (Lásd a 2446. feladatot!) A kimaradó rész összességében 3 darab 1 sugarú kör, amelyek összterülete 3π. A vonalkázott terület $6\sqrt{3} - 3\pi$, az arány pedig $A = \frac{6\sqrt{3} - 3\pi}{6\sqrt{3}} = 1 - \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \approx 0{,}09.$

2515. Legyen 1 a befogók hossza. Ekkor a háromszög területe $\frac{1}{2}$. A holdacska területe a $\frac{\sqrt{2}}{2}$ sugarú félkörlap és az 1 sugarú, 90°-os középponti szöghöz tartozó körszelet területének különbsége, azaz $T_{☽} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = \frac{1}{2}.$ (Lásd a 2507/*a)* feladatot!)

2516. Jelölje a háromszög befogóit a és b, átfogóját c. Pitagorasz tétele értelmében $a^2 + b^2 = c^2$. A holdacskák területének összege:

$$\frac{ab}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{a^2\pi}{4} + \frac{b^2\pi}{4}\right) - \frac{1}{2}\frac{c^2\pi}{4} = \frac{ab}{2} + \frac{\pi}{8}\left(a^2 + b^2 - c^2\right) = \frac{ab}{2}.$$

Pitagorasz tételének alkalmazása

2517. *a)* 5 m; *b)* 13 cm; *c)* 10 dm; *d)* 25 mm; *e)* 26 cm; *f)* 17 cm; *g)* 34 m; *h)* $\sqrt{2}$ cm $\approx 1{,}41$ cm; *i)* $\sqrt{5}$ m $\approx 2{,}24$ m; *j)* $\sqrt{3}$ cm $\approx 1{,}73$ cm; *k)* $\sqrt{8}$ dm $\approx 2{,}83$ dm; *l)* 4 mm.

2518. *a)* 4 cm; *b)* 3 dm; *c)* 12 mm; *d)* 8 m; *e)* 15 dm; *f)* 11 mm; *g)* 18 mm; *h)* 3,5 cm; *i)* 16 cm; *j)* 2 m; *k)* 1 cm *l)* $\sqrt{6}$ dm $\approx 2{,}45$ dm.

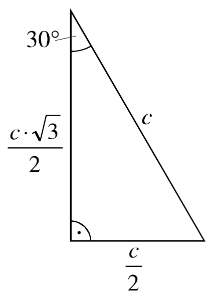
2519.

a	3,5 cm	≈ **7,16 cm**	4,6 cm	610 mm	≈ **6,7 dm**	4,82 m
b	0,43 dm	42 mm	≈ **87,88 cm**	5,2 m	66,4 cm	5240 mm
c	≈ **5,54 cm**	8,3 cm	88 cm	≈ **5,24 m**	9,43 dm	≈ **7,12 m**

2520. Ha c jelöli a háromszög legnagyobb oldalát, akkor a háromszög hegyesszögű, ha $a^2 + b^2 > c^2$; derékszögű, ha $a^2 + b^2 = c^2$; tompaszögű, ha $a^2 + b^2 < c^2$.

a) derékszögű (itt b a legnagyobb oldal); *b)* hegyesszögű;
c) tompaszögű; *d)* tompaszögű; *e)* derékszögű; *f)* tompaszögű.

2521. Ha a háromszöget tükrözzük a hosszabbik befogó egyenesére ,akkor az eredeti és a képháromszög egyesítése szabályos háromszög. Ebből adódóan, ha az átfogó hossza c, akkor a befogók $\frac{c}{2}$, illetve $\frac{c\cdot\sqrt{3}}{2}$ hosszúak Pitagorasz tétele alapján. (Lásd még a 2447. feladatot!)



a) 1 cm, $\sqrt{3}$ cm ≈ 1,732 cm;
b) 2 m, $2\sqrt{3}$ m ≈ 3,464 m;
c) 1,6 dm ≈ 2,77 dm;
d) 42 mm ≈ 72,746 mm;
e) 3,9 m ≈ 6,755 m;
f) $2\frac{8}{9}$ cm ≈ 5,004 cm.

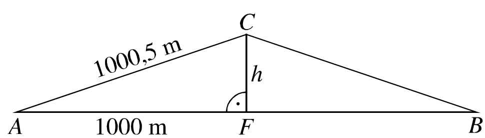
2522. Ha az átfogó hossza c, akkor a befogó $\frac{c}{\sqrt{2}} = \frac{c\sqrt{2}}{2}$ hosszúságú.

a) 2 m; *b)* ≈ 15,56 mm; *c)* ≈ 4,53 cm; *d)* 3,5 mm;
e) ≈ 24,04 mm; *f)* ≈ 212,13 mm.

2523. Lásd az előző feladatot!

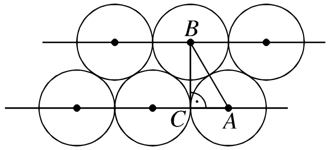
a) 2 cm; *b)* 6 m; *c)* $400\sqrt{2}$ mm ≈ 565,68 mm; *d)* ≈ 7,92 dm;
e) ≈ 67,88 cm; *f)* ≈ 7,49 mm; *g)* $a\sqrt{2}$.

2524. Alkalmazva Pitagorasz tételét $h = \sqrt{AC^2 - AF^2} = \sqrt{1000{,}25\ \text{m}^2} \approx$ ≈ 31,6 m. A kicsit talán meglepő eredmény azt mutatja, hogy bőven átsétálhat egy ember a kötél alatt.



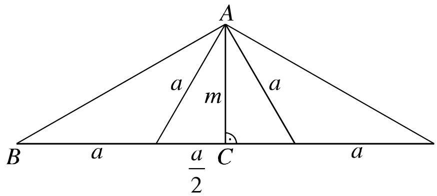
2525. Ha l a huzal hossza, akkor $\frac{l}{2} = \sqrt{(10\ \text{m})^2 + (0{,}6\ \text{m})^2} \approx 10{,}018$ m, ahonnan $l \approx 20{,}036$ m.

2526. Az ábrán látható ABC háromszögben $AB = 2r$, $AC = r$, így $d = BC = \sqrt{(2r)^2 - r^2} = r\sqrt{3} \approx 24{,}25$ mm.



2527. A csúszda emelkedése 4 m, így hossza $l = \sqrt{(10\text{ m})^2 + (4\text{ m})^2} = \sqrt{116}\text{ m} \approx 10{,}77$ m.

2528. Az ábrán látható ABC derékszögű háromszögben $AC = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ (lásd pl. a 2521. feladatot) és $BC = \dfrac{3a}{2}$. Így



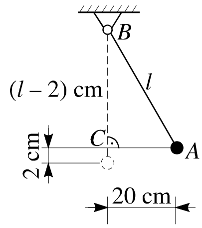
$$AB = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} + \frac{9a^2}{4}} = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3} \approx 6{,}93 \text{ m}.$$

2529. Jelölje az inga centiméterekben kifejezett hosszát l. Ekkor az ábrán látható ABC derékszögű háromszögben $BC = (l - 2)$ cm. Így

$$l^2 = (l - 2)^2 + 20^2.$$

Ebből

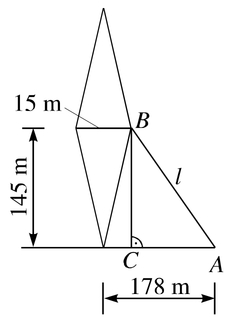
$$l = 101 \text{ cm}.$$



2530. $l = \sqrt{(1{,}2\text{ m})^2 + (2\text{ m})^2} = \sqrt{5{,}44}\text{ m} \approx 2{,}33$ m.

2531. Az ábrán látható ABC derékszögű háromszögben $BC = 145$ m, $AC = 178$ m – 7,5 m = 170,5 m, így

$$l = \sqrt{(145\text{ m})^2 + (170{,}5\text{ m})^2} =$$
$$= \sqrt{50095{,}25}\text{ m} \approx 223{,}82 \text{ m}.$$



2532. $h = \sqrt{(3{,}8\text{ m})^2 - (1{,}7\text{ m})^2} = \sqrt{11{,}55}\text{ m} \approx 3{,}4$ m.

2533. A gyalogos által megtett út:

$$s = 5\ \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 3{,}5\text{ h} + 5{,}5\ \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 2\text{ h} = 28{,}5 \text{ km}.$$

Jelölje d a gyalogos elmozdulását kilométerben mérve. Ekkor $d^2 = s_1^2 + s_2^2$, ahol $s_1 = 17{,}5$ km és $s_2 = 11$ km. Így

$$d = \sqrt{17{,}5^2 + 11^2}\ \text{km} \approx 20{,}67\ \text{km}.$$

2534. A $P(x; y)$ pont origótól vett távolsága $d = \sqrt{x^2 + y^2}$.

a) 1; *b)* $\sqrt{5} \approx 2{,}24$; *c)* 5; *d)* 13; *e)* 5;

f) $\sqrt{26} \approx 5{,}1$; *g)* $\sqrt{109} \approx 10{,}44$; *h)* $\sqrt{27{,}25} \approx 5{,}22$.

2535. A $P_1(x_1; y_1)$ és $P_2(x_2; y_2)$ pontok távolsága $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

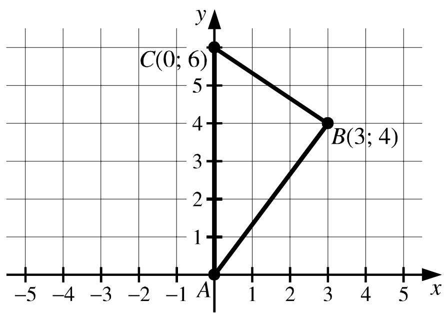
a) 5; *b)* $\sqrt{136} \approx 11{,}66$; *c)* $\sqrt{41} \approx 6{,}4$; *d)* $\sqrt{76{,}25} \approx 8{,}73$;

e) $\sqrt{117} \approx 10{,}82$; *f)* $\sqrt{250} \approx 15{,}81$.

2536. *a)* $AB = 5$; $AC = 6$; $BC = \sqrt{13}$

$K = 11 + \sqrt{13} \approx 14{,}6$

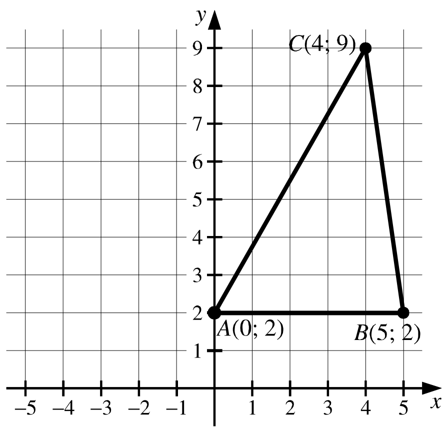
$T = \dfrac{6 \cdot 3}{2} = 9$



b) $AB = 5$; $AC = \sqrt{65}$; $BC = \sqrt{50}$

$K = 5 + \sqrt{65} + 5\sqrt{2} \approx 20{,}13$

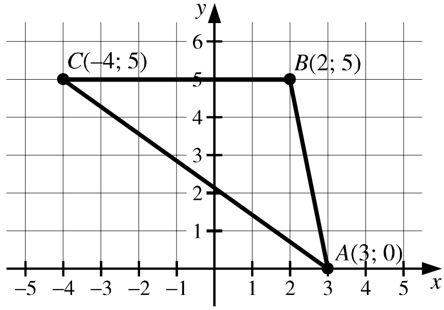
$T = \dfrac{5 \cdot 7}{2} = 17{,}5$



c) $AB = \sqrt{26}$; $AC = \sqrt{74}$; $BC = 6$

$K = 6 + \sqrt{26} + \sqrt{74} \approx 19{,}7$

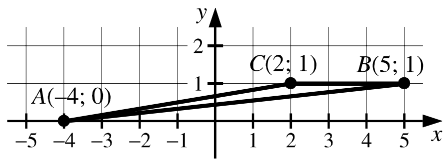
$T = \dfrac{6 \cdot 5}{2} = 15$



d) $AB=\sqrt{82}$; $AC=\sqrt{37}$; $BC=3$

$K=3+\sqrt{82}+\sqrt{37}\approx 18{,}14$

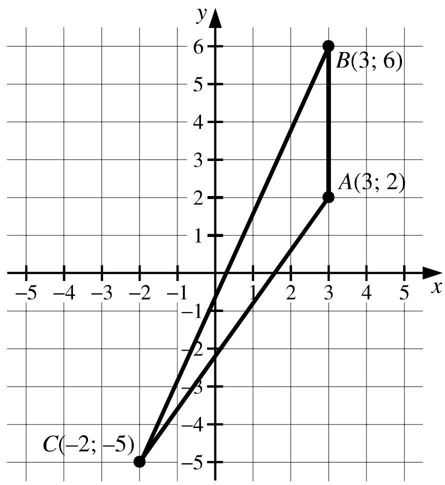
$T=\dfrac{3\cdot 1}{2}=1{,}5$



e) $AB=4$; $AC=\sqrt{74}$; $BC=\sqrt{146}$

$K=4+\sqrt{74}+\sqrt{146}\approx 24{,}68$

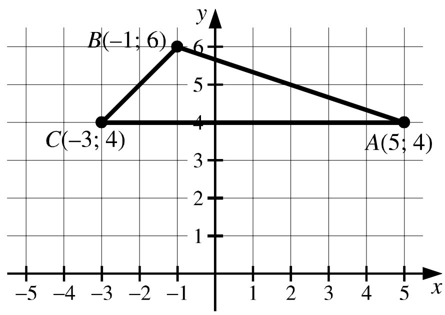
$T=\dfrac{4\cdot 5}{2}=10$



f) $AB=8$; $AC=\sqrt{8}$; $BC=\sqrt{40}$

$K=8+2\sqrt{2}+2\sqrt{10}\approx 17{,}15$

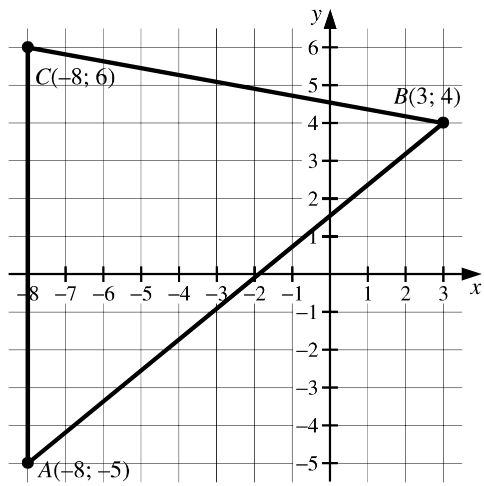
$T=\dfrac{8\cdot 2}{2}=8$



g) $AB=\sqrt{202}$; $AC=11$; $BC=\sqrt{125}$

$K=11+\sqrt{202}+5\sqrt{5}\approx 36{,}4$

$T=\dfrac{11\cdot 11}{2}=60{,}5$



h) $AB = 2b$; $AC = \sqrt{a^2 + 4b^2}$; $BC = a$

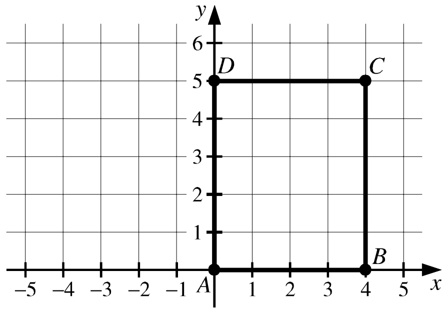
$K = a + 2b + \sqrt{a^2 + 4b^2}$; $T = \dfrac{a \cdot 2b}{2} = ab$

Ez a háromszög $a \neq 0$ és $b \neq 0$ esetén derékszögű.

2537. Az $ABCD$ négyszög mind a négy esetben téglalap.

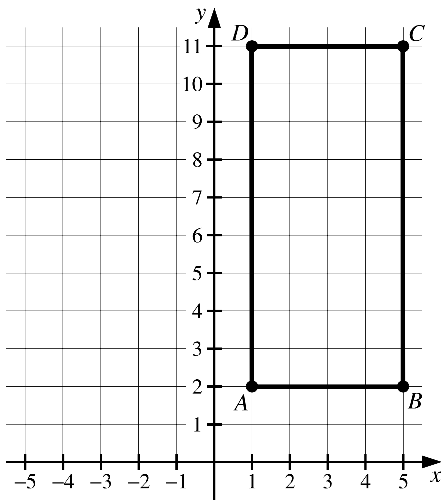
a) $AB = CD = 4$; $BC = AD = 5$
$K = 18$; $T = 20$

Az A és a B pont második koordinátájának a feladatban leírt változtatásával a téglalap egy szakasszá zsugorodik össze.



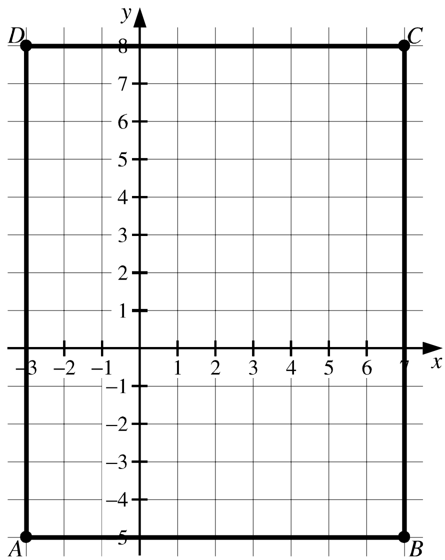
b) $AB = CD = 4$; $BC = AD = 9$
$K = 26$; $T = 36$

A változtatással kapott $A'B'CD$ négyzetre
$A'B' = CD = 4$; $B'C = A'D = 4$
$K' = 16$; $T' = 16$



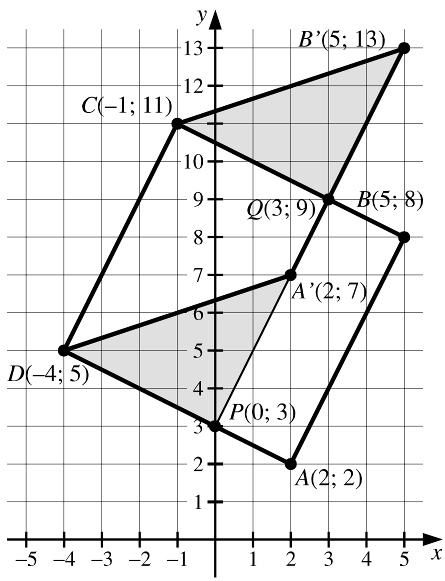
c) $AB = CD = 10$; $BC = AD = 13$
$K = 46$; $T = 130$

A változtatással kapott $A'B'CD$ téglalapra
$A'B' = CD = 10$; $B'C = A'D = 8$
$K' = 36$; $T' = 80$



d) A négyszög négyzet.
$AB = BC = CD = DA = \sqrt{3^2 + 6^2} =$
$= \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$.
$K = 12\sqrt{5} \approx 26{,}83;\ T = \left(3\sqrt{5}\right)^2 = 45$

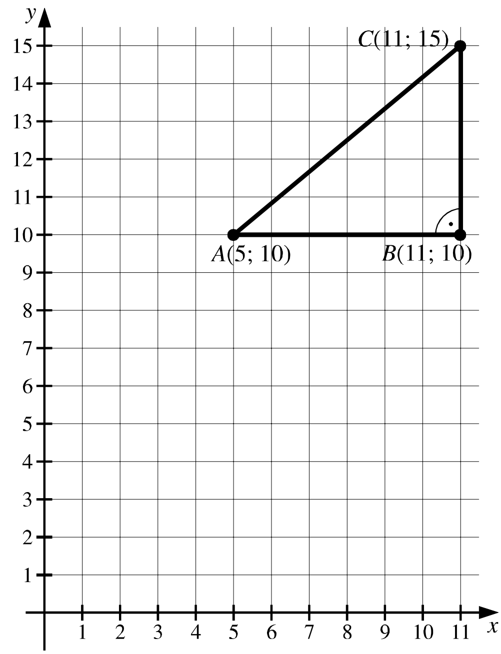
A változtatással kapott négyszög paralelogramma, amelyre nézve
$A'B' = CD = 3\sqrt{5}$ és
$B'C = A'D = \sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$.
Így $K = 6\sqrt{5} + 4\sqrt{10} = 2\sqrt{5}\left(3 + 2\sqrt{2}\right) \approx$
$\approx 26{,}07$. Az ábrán vonalkázással jelölt háromszögek egybevágók, így
$T_{A'B'CD} = T_{PQCD} = \left(3 \cdot \sqrt{5}\right) \cdot \left(2 \cdot \sqrt{5}\right) =$
$= 30$. (Felhasználtuk, hogy
$QC = PD = = 2 \cdot \sqrt{5}$.)



2538. A feladatnak a koordináták változtatására vonatkozó utasítása minden esetben a **v**(–3; 4) vektorral történő eltolást jelent, így a kapott alakzat egybevágó az eredetivel.

a) $AB = 6;\ BC = 5;\ AC = \sqrt{61}$.
$K = 11 + \sqrt{61} \approx 18{,}81$

$$T = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$$

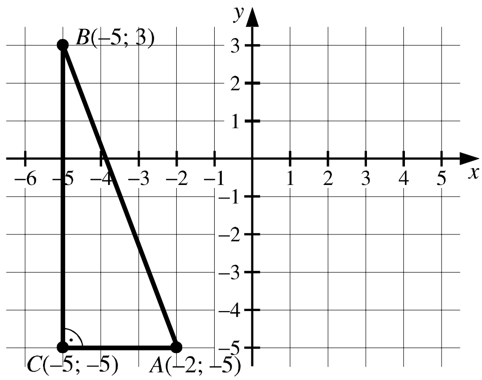


b) A kapott derékszögű háromszög oldalai

$AB = \sqrt{73}$; $BC = 8$; $AC = 3$.

$K = 11 + \sqrt{73} \approx 19{,}54$

$$T = \frac{8 \cdot 3}{2} = 12$$



c) A kapott háromszög oldalai

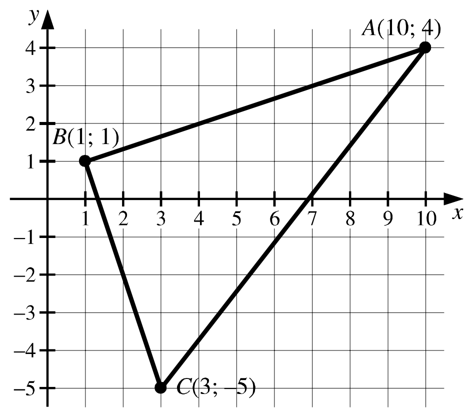
$AB = \sqrt{9^2 + 3^2} = \sqrt{90}$;

$BC = \sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{40}$;

$AC = \sqrt{9^2 + 7^2} = \sqrt{130}$.

A kapott adatokból látható, hogy $AB^2 + BC^2 = AC^2$, amiből Pitagorasz tételének megfordítását alkalmazva adódik, hogy a háromszög derékszögű ($ABC\sphericalangle = 90°$).

$K = 3\sqrt{10} + 2\sqrt{10} + \sqrt{130} \approx 27{,}21$



$$T = \frac{3\sqrt{10} \cdot 2\sqrt{10}}{2} = 30$$

d) A háromszög oldalainak hossza (lásd a 2535. feladatot): $AB = \sqrt{17}$, $BC = \sqrt{629}$, $AC = \sqrt{612}$. Az adatokból látható, hogy $BC^2 = AC^2 + AB^2$, azaz a háromszög derékszögű ($BAC\sphericalangle = 90°$). $K \approx 53{,}94$; $T = \frac{\sqrt{17} \cdot \sqrt{612}}{2} = 51$

2539. Alkalmazva a két pont távolságát megadó összefüggést és Pitagorasz tételének megfordítását kapjuk, hogy mind a 4 háromszög derékszögű. Ekkor viszont Thalesz tételének megfordításából adódóan a köréírt kör sugara az átfogó (a leghosszabb oldal) fele.

a) $r = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{13}}{2}$, $K = \sqrt{13} \cdot \pi \approx 11{,}32$, $T = \frac{13\pi}{4} \approx 10{,}21$;

b) $r = \frac{AC}{2} = 5$, $K = 10\pi \approx 31{,}42$, $T = 25\pi \approx 78{,}53$;

c) $r = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{130}}{2}$, $K = \sqrt{130} \cdot \pi \approx 35{,}81$, $T = \frac{65}{2}\pi \approx 102{,}1$;

d) $r = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{85}}{2}$, $K = \sqrt{85} \cdot \pi \approx 28{,}96$, $T = \frac{85}{4}\pi \approx 66{,}76$.

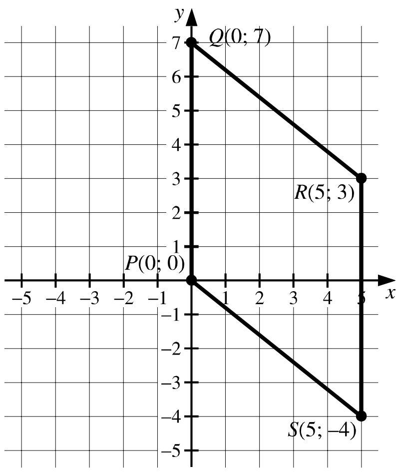
2540. Legyen a paralelogramma negyedik csúcsa S, és a betűzés valamelyik körüljárási irányban $PQRS$. (Ezzel egyértelművé tettük a megoldást, a feltevés nélkül három megoldást kapnánk.)

a) $S(5; -4)$;

$PQ = RS = 7$; $QR = PS = \sqrt{41}$;

$K = 14 + 2\sqrt{41} \approx 26{,}81$.

A PQ oldalhoz tartozó magasság $m = 5$, így $T = 35$.

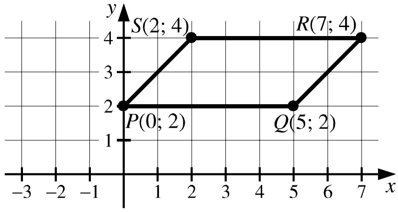


b) $S(2; 4)$;

$PQ = RS = 5$; $QR = PS = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$;

$K = 10 + 4\sqrt{2} \approx 15{,}66$;

$T = 5 \cdot 2 = 10$.

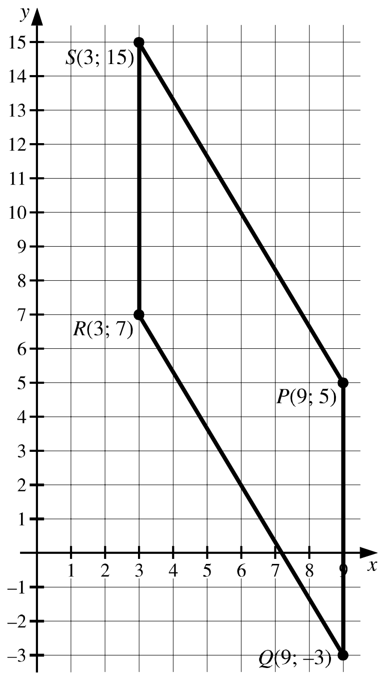


c) $S(3;\,15)$;

$PQ = RS = 8$; $QR = PS = \sqrt{136} =$
$= 2\sqrt{34}$;

$K = 16 + 4\sqrt{34} \approx 39{,}32$;

$T = 8 \cdot 6 = 48$.

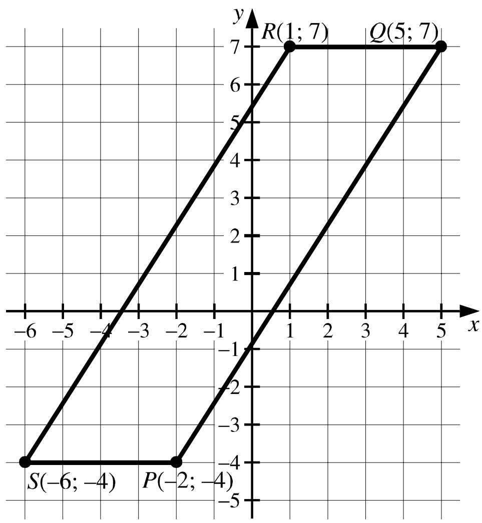


d) $S(-6;\,-4)$;

$PQ = RS = \sqrt{170}$; $QR = PS = 4$;

$K = 8 + 2\sqrt{170} \approx 34{,}08$;

$T = 4 \cdot 11 = 44$.

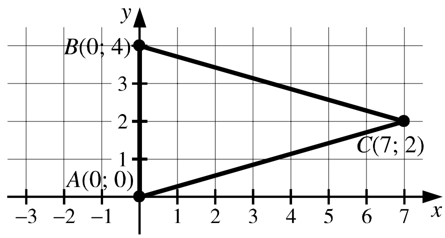


2541. Az *ABC* háromszög mind a négy esetben egyenlő szárú.

a) $AB = 4$, $BC = AC = \sqrt{53}$;

$K = 4 + 2\sqrt{53} \approx 18{,}56$;

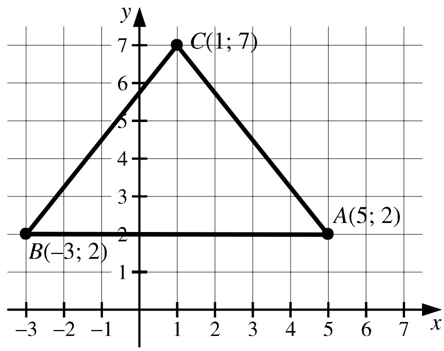
$T = \dfrac{4 \cdot 7}{2} = 14$.



b) $AB = 8,\ BC = AC = \sqrt{41}$;

$K = 8 + 2\sqrt{41} \approx 20{,}81$;

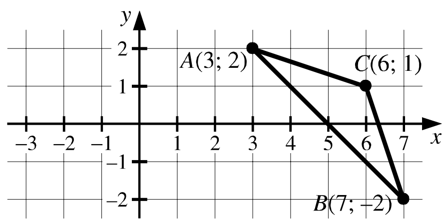
$T = \dfrac{8 \cdot 5}{2} = 20$.



c) $AB = \sqrt{32} = 4\sqrt{2},\ \ BC = AC = \sqrt{10}$;

$K = 4\sqrt{2} + 2\sqrt{10} \approx 9{,}15$;

$T = \dfrac{4\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2} = 4$.

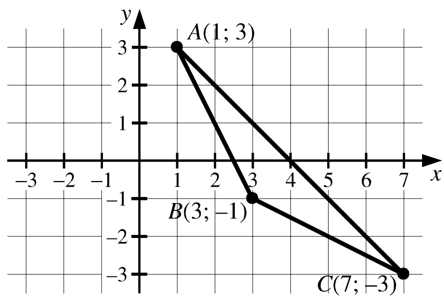


d) $AB = BC = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$,

$AC = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$;

$K = 4\sqrt{5} + 6\sqrt{2} \approx 17{,}43$;

$T = \dfrac{6\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2} = 6$.

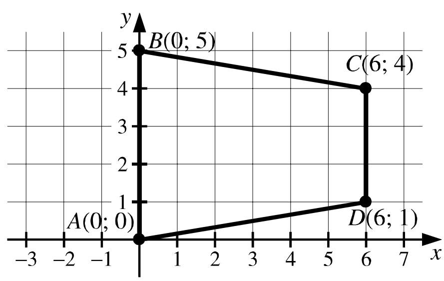


2542. *a)* $D(6; 1)$

$AB = 5,\ BC = AD = \sqrt{37},\ CD = 3$;

$K = 8 + 2\sqrt{37} \approx 20{,}17$;

$T = \dfrac{5 + 3}{2} \cdot 6 = 24$.



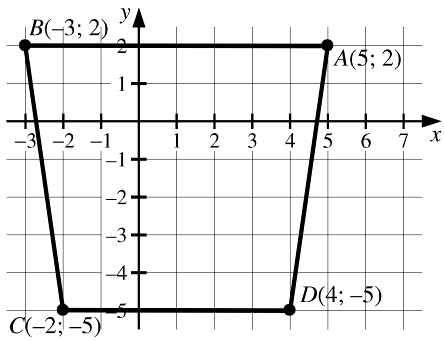
b) $D(4; -5)$

$AB = 8$, $BC = AD = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$,

$CD = 6$;

$K = 14 + 10\sqrt{2} \approx 28{,}14$;

$T = \dfrac{8+6}{2} \cdot 7 = 49$.



c) $D(7; 10)$

$AB = \sqrt{80}$, $BC = AD = \sqrt{50}$,

$CD = \sqrt{20}$;

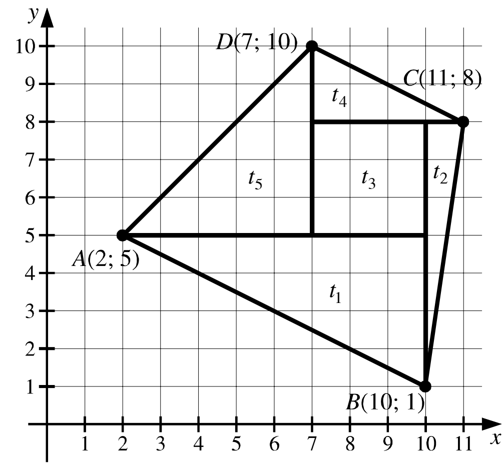
$K = 4\sqrt{5} + 2\sqrt{5} + 10\sqrt{2} =$

$= 6\sqrt{5} + 10\sqrt{2} \approx 27{,}56$.

A terület könnyen számolható például az ábrán látható felbontás segítségével.

$T = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 =$

$= 16 + 3{,}5 + 9 + 4 + 12{,}5 = 45$



d) $D(-9; 7)$

$AB = \sqrt{40}$, $BC = AD = 10$,

$CD = \sqrt{160}$;

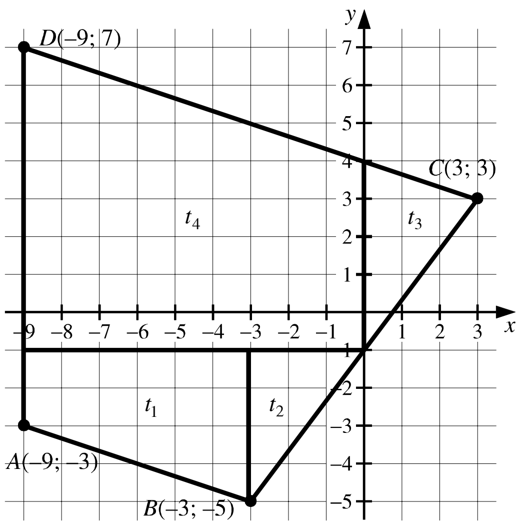
$K = 2\sqrt{10} + 4\sqrt{10} + 20 =$

$= 6\sqrt{10} + 20 \approx 38{,}97$.

Az ábrán látható felbontás alapján

$T = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 =$

$= 18 + 6 + 7{,}5 + 58{,}5 = 90.$

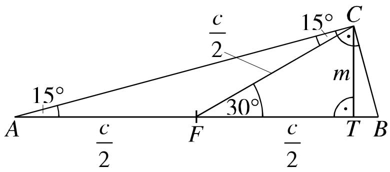


Vegyes feladatok

2543. Lásd a 2521. feladatot!

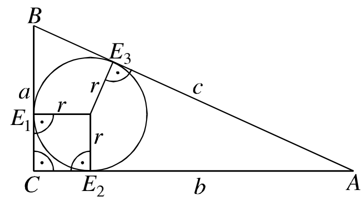
2544. A hegyesszögek: 15°, 75°. Thalesz tételének megfordításából adódóan $AF = FB = FC = \frac{c}{2}$. A háromszög külső szögére vonatkozó tétel miatt $CFB\sphericalangle = 30°$. (Lásd az ábrát!) Az AFC háromszögre teljesül az előző feladat feltétele, így

$$m = TC = \frac{FC}{2} = \frac{c}{4}.$$

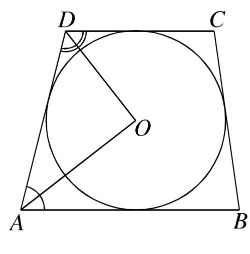


2545. A körhöz külső pontból húzott érintőszakaszok egyenlő hosszúak, így
$E_1C = CE_2 = r$;
$E_2A = AE_3$;
$E_3B = BE_1$.
Ezeket felhasználva

$$a + b = BE_1 + 2r + E_2A = \\ = 2r + E_3B + AE_3 = 2r + c.$$



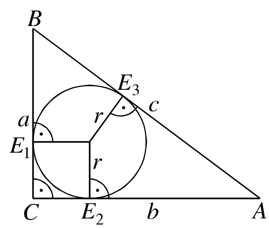
2546. Az O pont a háromszög belső szögfelezőinek metszéspontja, így $DAO\sphericalangle + ODA\sphericalangle = \frac{1}{2}(DAB\sphericalangle + CDA\sphericalangle) = \frac{1}{2} \cdot 180° = 90°$. Ebből pedig $AOD\sphericalangle = 90°$. Hasonlóan látható be az állítás második fele is.



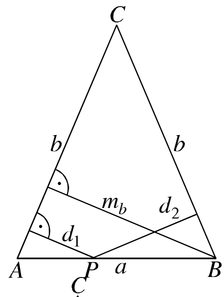
2547. Legyen $B = 4r$. A 2545. feladat alapján $a + b = c + 2r$, ahonnan $c = a + 2r$. Felírva a háromszögre a Pitagorasz tételét:

$$(a + 2r)^2 = a^2 + 16r^2.$$

Ebből adódik, hogy $a = 3r$.



2548. Írjuk fel a háromszög területét kétféleképpen: egyrészt $T = \frac{b \cdot m_b}{2}$, másrészt $T = \frac{b \cdot d_1}{2} + \frac{b \cdot d_2}{2} = \frac{b}{2}(d_1 + d_2)$. (Lásd az ábrát!) Ezen kifejezések egyenlőségéből adódik, hogy $d_1 + d_2 = m_b$, ami adott háromszögre valóban állandó.



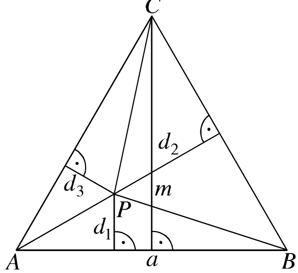
2549. Az előző feladathoz hasonlóan most is a terület kétféle felírásából kapjuk az állítást. (Lásd az ábrát!)

$$\frac{a \cdot m}{2} = \frac{a \cdot d_1}{2} + \frac{a \cdot d_2}{2} + \frac{a \cdot d_3}{2} =$$

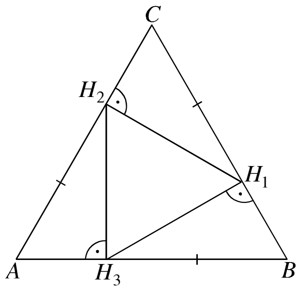
$$= \frac{a}{2}(d_1 + d_2 + d_3)$$

Ebből

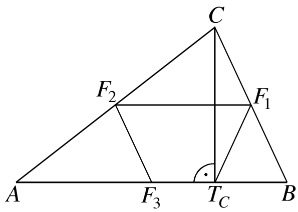
$$d_1 + d_2 + d_3 = m.$$



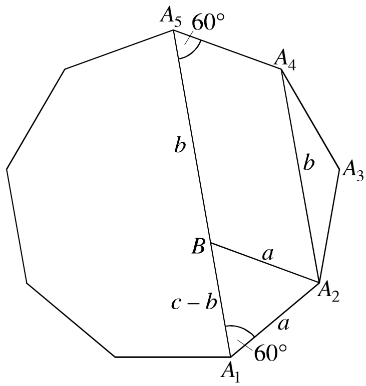
2550. Az AH_3H_2, BH_1H_3 és CH_2H_1 háromszögek egybevágóak, ugyanis két-két oldaluk és a közbezárt szög megegyezik, tehát a $H_1H_2H_3$ háromszög szabályos. Az AH_3H_2 háromszögben $AH_2 = 2 \cdot AH_3$ és $H_2AH_3 \sphericalangle = 60°$, így a háromszög derékszögű. (Lásd a 2447. és 2521. feladatokat!) Ugyanez igaz a BH_1H_3 és CH_2H_1 háromszögekre is.



2551. F_1F_2 a háromszög egyik középvonala, ezért F_1F_2 párhuzamos F_3T_C-vel, tehát az $F_1F_2F_3T_C$ négyszög trapéz. (Lásd az ábrát!) F_2F_3 is középvonal, ezért $F_2F_3 = \frac{BC}{2}$. A BCT_C háromszög derékszögű, ezért Thalesz tételének megfordításából adódóan $\frac{BC}{2} = F_1T_C$. Eddigi megállapításainkat összevetve $F_2F_3 = F_1T_C$, azaz a trapéz valóban egyenlő szárú.



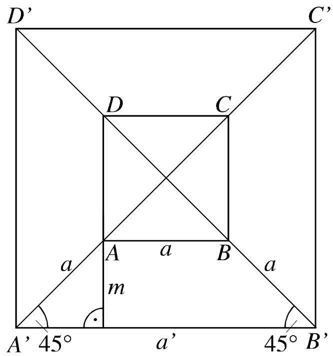
2552. A szabályos kilencszög egy belső szöge $\frac{(9-2)\cdot 180°}{9} = 140°$. Azábrán látható $A_1A_2A_3A_4A_5$ tengelyesen szimmetrikus ötszögben így $A_5A_1A_2\sphericalangle = A_4A_5A_1\sphericalangle =$ $= 60°$. Jelölje a a kilencszög oldalát, b a legrövidebb, c a leghosszabb átlóját, és legyen B az A_1A_5 átlónak az a pontja, amelyre $A_5B = b$. Az $A_1A_2A_4A_5$ négyszög szimmetrikus trapéz, így a $A_2A_4A_5B$ négyszög olyan paralelogramma, amelynek egyik szöge 60°-os. Ebből adódóan az A_1A_2B háromszög szabályos, tehát valóban $a = c - b$.



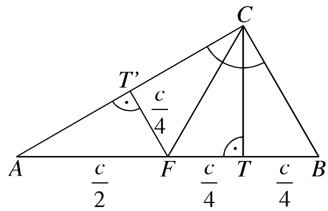
2553. A kapott $A'B'C'D'$ négyszög átlói a származtatásból adódóan egyenlő hosszúak és merőlegesen felezik egymást, tehát a négyszög négyzet. Jelölje a az eredeti, a' a kapott négyzet oldalának hosszát. Az ábrán látható $A'B'BA$ szimmetrikus trapézban $a' = a + 2m$, ahol m a trapéz magassága, és Pitagorasz tételéből adódóan $m = \frac{a}{\sqrt{2}}$. Így

$$a' = a + 2\cdot\frac{a}{\sqrt{2}} = a + a\sqrt{2}.$$

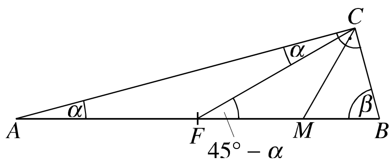
Mivel az eredeti négyzet átlója, ugyancsak Pitagorasz tételéből adódóan $a\sqrt{2}$, ezért az állítást beláttuk.



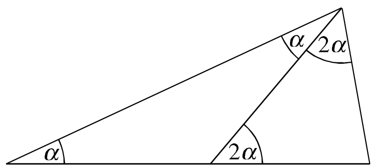
2554. Jelölje γ a kérdéses szöget. A feltételből adódóan az ábrán látható FBC háromszög egyenlő szárú és $FT = TB = \frac{AB}{4} = \frac{c}{4}$. Jelölje az AB oldal F felezőpontjából az AC oldalra állított merőleges talppontját T'. A feltételből adódik, hogy az FTC derékszögű háromszög egybevágó az $FT'C$ derékszögű háromszöggel, így $FT = FT' = \frac{c}{4}$. Az AFT' derékszögű háromszögben az átfogó kétszerese az egyik befogónak, így $\alpha = 30°$. (Lásd a 2447. és 2521. feladatot!) Az ATC derékszögű háromszögben $30° + 2 \cdot \frac{\gamma}{3} = 90°$, ahonnan $\gamma = 90°$.



2555. A feltétel nyilván csak úgy teljesülhet, ha $FM = MC$. (Lásd az ábrát!) Mivel a háromszög derékszögű, ezért $AF = FC$, így $\alpha = CAF\sphericalangle = FCA\sphericalangle$. A háromszög külső szögére vonatkozó tétel alapján $2\alpha = 45° - \alpha$, ahonnan $\alpha = 15°$, és így $ABC\sphericalangle = \beta = 75°$.



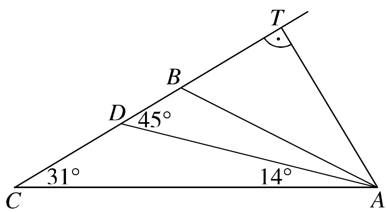
2556. A háromszög külső szögére vonatkozó tétel alapján az állítás nyilvánvaló. (Lásd az ábrát!)



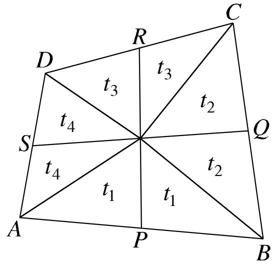
2557. A feltételekből adódóan $CAD\sphericalangle = 14°$, így az ADC háromszög D-nél levő külső szögére nézve

$$TDA\sphericalangle = 31° + 14° = 45°.$$

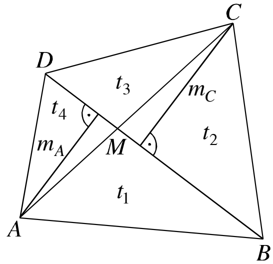
Kaptuk, hogy az ATD derékszögű háromszög egyenlő szárú, tehát valóban $AT = TD$.



2558. Mivel P, Q, R és S a megfelelő oldalak felezőpontjai, ezért az ábrán azonosan jelölt területek megegyeznek, amiből adódik a feladat állítása.



2559. Tegyük fel, hogy a $t_1 = T_{ABM}$, $t_2 = T_{BCM}$ és $t_3 = T_{CDM}$ területek adottak. (Lásd az ábrát!) Felírva a megfelelő területeket:



$$t_1 = \frac{BM \cdot m_A}{2},\ t_2 = \frac{BM \cdot m_C}{2},$$

$$t_3 = \frac{DM \cdot m_C}{2},\ t_4 = \frac{DM \cdot m_A}{2}.$$

Vegyük észre, hogy $t_1 \cdot t_3 = t_2 \cdot t_4$, így

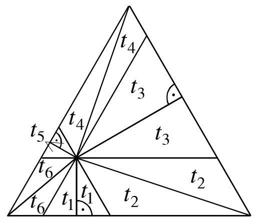
$$t_4 = \frac{t_1 \cdot t_2}{t_3}.$$

2560. Az előző feladat ábráját és jelöléseit használva a feltétel:

$$t_1 + t_2 = t_3 + t_4 \quad \text{és} \quad t_1 + t_4 = t_2 + t_3.$$

Ezeket az egyenleteket kivonva egymásból kapjuk, hogy $t_2 - t_4 = t_4 - t_2$ és $t_1 - t_3 = t_3 - t_1$, amiből adódik, hogy $t_2 = t_4$ és $t_1 = t_3$. Az előző feladat kapcsán kaptuk, hogy $t_1 \cdot t_3 = t_2 \cdot t_4$, így mindent összevetve $t_1 = t_2 = t_3 = t_4$. Ez viszont azt jelenti, hogy az átlók felezik egymást, tehát a négyszög paralelogramma.

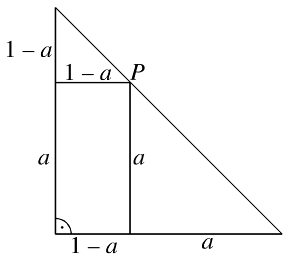
2561. Húzzunk az adott ponton keresztül a háromszög oldalaival párhuzamosokat. Ezek három szabályos háromszögre és három paralelogrammára bontják a háromszöget. A pontból a csúcsokba húzott szakaszok és az oldalakra állított merőlegesek mindegyike „megfelez” egy paralelogrammát, illetve egy szabályos háromszöget. Az ábrán azonosan jelölt területek tehát egyenlőek, ebből pedig adódik a feladat állítása.



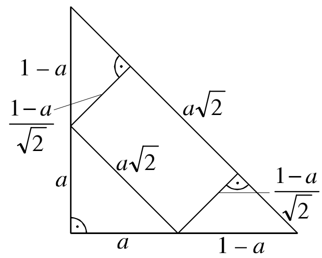
2562. A téglalap elhelyezkedésére nézve két eset lehetséges.
1. eset: Ekkor a téglalap kerülete (lásd a 2562/1. ábrát) $2(1 - a + a) = 2$, azaz állandó, függetlenül a P pont választásától.
2. eset: Ebben az esetben a téglalap kerülete Pitagorasz tétele alapján (lásd a 2562/2. ábrát):

$$2a\sqrt{2} + 2 \cdot \frac{1-a}{\sqrt{2}} = 2a\sqrt{2} + \sqrt{2} \cdot (1-a) = \sqrt{2}\,(a+1).$$

Látható, hogy pl. $a = \frac{3}{4}$ esetén ez a kifejezés 2-nél nagyobb értéket vesz fel, viszont a maximumát nem veszi fel, hiszen $a = 1$ esetén nem kapunk téglalapot.



2562/1. ábra

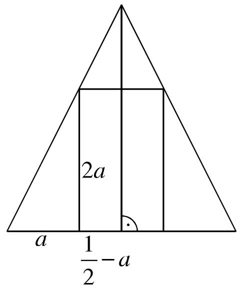


2562/2. ábra

2563. Legyen a háromszög alapjának hossza 1. Ekkor a téglalap kerülete (lásd az ábrát):

$$4a + 2(1 - 2a) = 2.$$

Kaptuk, hogy a téglalap kerülete állandó.



2564. Minden háromszögnek van legalább egy olyan szöge, amelynek nagysága 60°-nál nem kisebb, ugyanis ellenkező esetben a háromszög belső szögeinek összege kisebb lenne 180°-nál. Legyen $\alpha \geqq 60°$. Ekkor a másik két szög számtani közepére nézve

$$\frac{180° - \alpha}{2} = 90° - \frac{\alpha}{2} \leqq 90° - \frac{60°}{2} = 60°.$$

Kaptuk, hogy

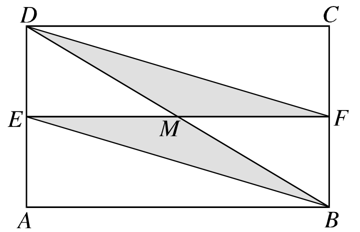
$$\frac{180° - \alpha}{2} \leqq 60° \leqq \alpha,$$

és ezzel az állítást bebizonyítottuk.

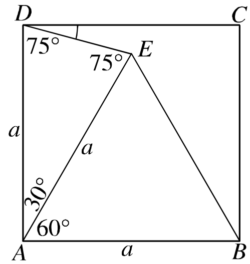
2565. Ha a, b és c jelöli a háromszög oldalainak hosszát, m_a és m_b pedig a megfelelő magasságok, akkor a feltétel értelmében $a \leqq m_a$ és $b \leqq m_b$. Ugyanakkor viszont $m_a \leqq b$ és $m_b \leqq a$ bármely háromszögben. Összevetve az egyenlőtlenségeket kapjuk, hogy $a = b = m_a = m_b$, azaz a háromszög egyenlő szárú derékszögű háromszög.

2566. Lásd a 2097. feladatot! Az ottani ábra AF egyenese (és csak az) megfelel a feltételnek. A módszer konkáv négyszögre is alkalmazható.

2567. Az $ABFE$ téglalap területének negyede a BME háromszög területe és az $EFCD$ téglalap területének is negyede a DMF háromszög területe. Ebből adódóan a vonalkázott terület negyede az $ABCD$ téglalap területének.



2568. Az ábráról leolvasható, hogy $CDE\sphericalangle = 15°$.



2569. Ha a és b a két befogó hossza, c az átfogó hossza, m_c pedig az átfogóhoz tartozó magasság hossza, akkor a feladat feltétele az *a)* esetben $c = 2m_c$, a *b)* esetben $c = 4m_c$.

a) A háromszög egyenlő szárú derékszögű háromszög.

b) Lásd a 2544. feladatot! A két hegyesszög nagysága: 15°; 75°.

2570. Ha a háromszög szabályos, akkor beírt körének sugara harmada a magasságnak (lásd pl. a 2347. feladatot), így $3m = 3 \cdot (3r) = 9r$, tehát fennáll a feladatbeli összefüggés.

Az állítás megfordításának bizonyításához tegyük fel, hogy $m_a + m_b + m_c = 9r$.

Előbb belátjuk, hogy bármely pozitív x és y esetén $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geqq 2$, és egyenlőség pontosan akkor áll, ha $x = y$. Valóban

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2 = \frac{x^2 + y^2 - 2xy}{xy} = \frac{(x-y)^2}{xy} \geqq 0.$$

Jelölje T a háromszög területét. Felhasználva a 2453. feladat területképletét a feltételi egyenlet

$$\frac{2T}{a} + \frac{2T}{b} + \frac{2T}{c} = 9 \cdot \frac{2T}{a+b+c}$$

alakban írható. Ebből ekvivalens átalakításokkal kapjuk, hogy

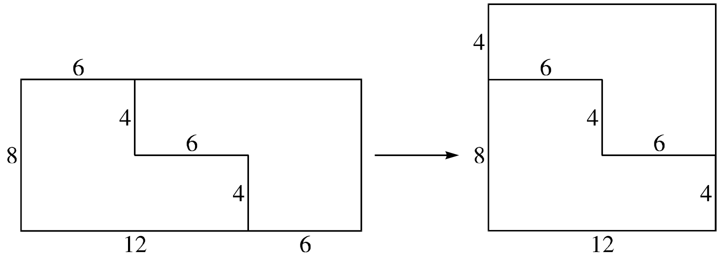
$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = 9,$$

majd a bal oldalon elvégezve a szorzást adódik, hogy

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right) = 6.$$

A bizonyított egyenlőség alapján ez csak $a = b = c$ esetén teljesülhet.

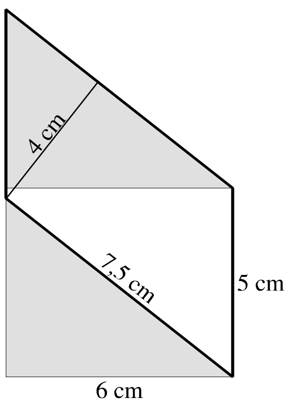
2571. Ha a jelöli a négyzet oldalát, akkor $8 \cdot 18 = a^2$, ahonnan $a = 12$. Egy lehetséges átdarabolás az ábrán látható.



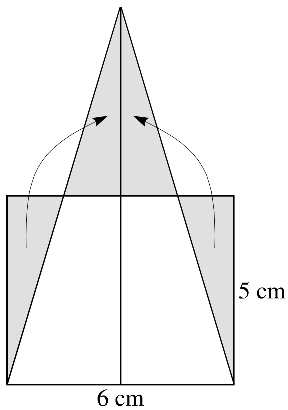
2572. A paralelogramma szerkesztésére nézve lásd a 2368/*e)* feladatot!

Az átdarabolást két lépésben hajtjuk végre.

1. A paralelogrammát átdaraboljuk egy olyan téglalapba, amelynek oldalai 5 cm és 6 cm hosszúak. (2572/1. ábra)
2. A kapott téglalapot a kívánt háromszöggé daraboljuk át a 2572/2. ábrán látható módon.

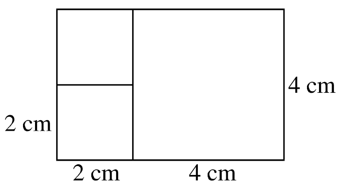


2572/1. ábra

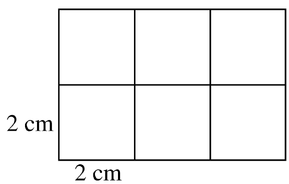


2572/2. ábra

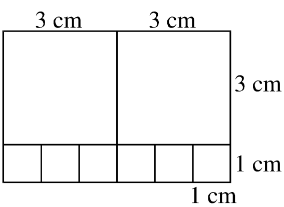
2573. *a)*



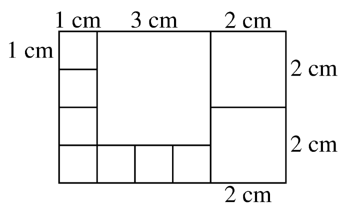
b)



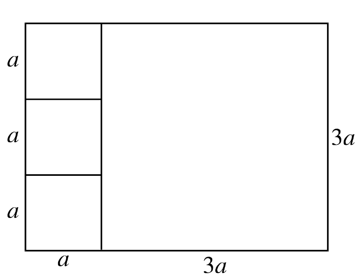
c)



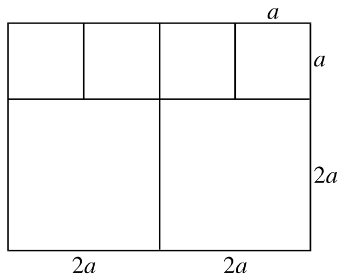
d)



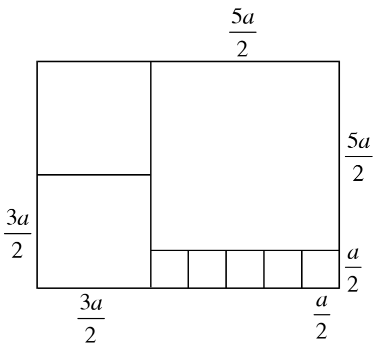
2574. *a)*



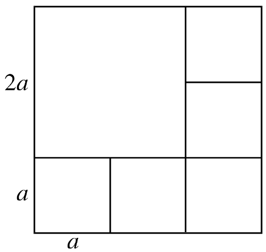
b)



c)

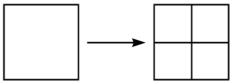


2575.

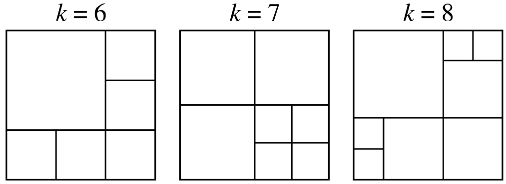


2576. Azt kell csupán megmutatnunk, hogy 6, 7 illetve 8 négyzetre felbontható az eredeti négyzet, ugyanis ha k db négyzetre felbontható, akkor $k + 3$ darabra is a 2576/1. ábrán látható helyettesítéssel.

A kívánt felbontások a 2576/2. ábrán láthatók.



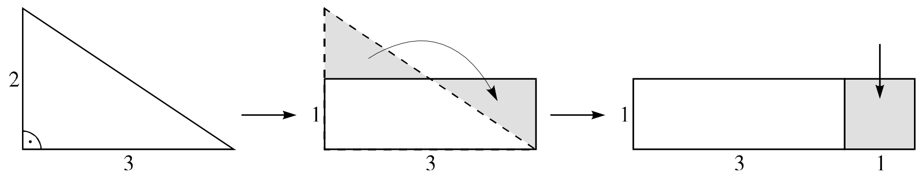
2576/1. ábra



2576/2. ábra

2577. A feltételekből adódóan a négyzet területe 100-nál kisebb négyzetszám, és mivel a téglalap oldalainak aránya 1 : 4, ezért a négyzet területének 4-gyel oszthatónak kell lennie. Így a négyzet oldala lehet: 2; 4; 6; 8. A kerületekre vonatkozó feltételt figyelembe véve a megfelelő téglalapok oldalai rendre: 1 és 4; 2 és 8; 3 és 12; 4 és 16.

2578. Egy lehetséges megoldás az ábrán látható.



2579. Az állítás abból a tényből adódik, hogy a paralelogramma középpontosan szimmetrikus az átlók metszéspontjára.

2580. A feladat lényegében megegyezik a 2096. feladattal, a megoldást lásd ott.

2581. Foglaljuk bele a háromszöget az ábrán látható módon egy olyan téglalapba, amelynek oldalai párhuzamosak a koordinátatengelyekkel és csúcsai egész koordinátájú pontok. A téglalapba az eredeti háromszögön kívül olyan derékszögű háromszögek vannak, amelyek befogói egész szám hosszúak. (Ha az eredeti háromszög tompaszögű, akkor előfordulhat, hogy a derékszögű háromszögeken kívül még egy egész oldalhosszú kisebb téglalap is fellép a felbontásban.) Az eredeti háromszög területét úgy kapjuk meg, hogy a téglalap területéből levonjuk a kimaradó derékszögű háromszögek területének összegét. Mivel a téglalap területe egész szám és a derékszögű háromszögek területe is vagy egész szám, vagy egy egész szám fele, ezért az eredeti háromszög területe is egész szám, vagy egy egész szám fele.