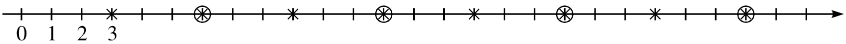
OSZTHATÓSÁG

Osztók és többszörösök

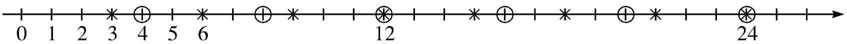
1783. A megadott számok első tíz többszöröse:

3:	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4:	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5:	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6:	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60

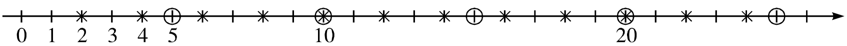
1784. ×: a 3 többszörösei ○: a 6 többszörösei



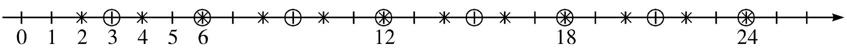
1785. ×: a 3 többszörösei ○: a 4 többszörösei
Ahol mindkét jel megtalálható a 12 többszöröseit találjuk.



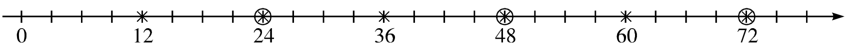
1786. ×: a 2 többszörösei ○: az 5 többszörösei ⊗: a 10 többszörösei



1787. ×: a 2 többszörösei ○: az 3 többszörösei ⊗: a 6 többszörösei



1788. ×: a 12 többszörösei ⊗: a 12 azon többszörösei, amelyek 8-nak is többszörösei



1789. A többszörösöket gyűjtsük táblázatba:

a)	2 többszörösei:	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
	3 többszörösei:	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
	2 és 3 közös többszörösei:	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
b)	2 többszörösei:	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
	5 többszörösei:	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
	2 és 5 közös többszörösei:	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
c)	3 többszörösei:	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
	4 többszörösei:	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
	3 és 4 közös többszörösei:	12	24	36	48	60	72	84	96	108	120

d)	3 többszörösei:	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
	6 többszörösei:	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
	3 és 6 közös többszörösei:	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
e)	10 többszörösei:	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
	12 többszörösei:	12	24	36	48	60	72	84	96	108	120
	10 és 12 közös többszörösei:	60	120	180	240	300	360	420	480	540	600
f)	12 többszörösei:	12	24	36	48	60	72	84	96	108	120
	15 többszörösei:	15	30	45	60	75	90	105	120	135	150
	12 és 15 közös többszörösei:	60	120	180	240	300	360	420	480	540	600
g)	14 többszörösei:	14	28	42	56	70	84	98	112	126	140
	21 többszörösei:	21	42	63	84	105	126	147	168	189	210
	14 és 21 közös többszörösei:	42	84	126	168	210	252	294	336	378	420
h)	28 többszörösei:	28	56	84	112	140	168	196	224	252	280
	36 többszörösei:	36	72	108	144	180	216	252	288	324	360
	28 és 36 közös többszörösei:	252	504	756	1008	1260	1512	1764	2016	2268	2520

1790

a)	30	60	90	120	150	*b)*	18	36	54	72	90
c)	30	60	90	120	150	*d)*	20	40	60	80	100
e)	24	48	72	96	120	*f)*	7	14	21	28	35
g)	38	76	114	152	190	*h)*	180	360	540	720	900

1791.

a)	2 többszörösei:	2	4	6	8	10
	3 többszörösei:	3	6	9	12	15
	6 többszörösei:	6	12	18	24	30
	2 és 3 közös többszörösei:	6	12	18	24	30
	2 és 6 közös többszörösei:	6	12	18	24	30
	3 és 6 közös többszörösei:	6	12	18	24	30
	2, 3 és 6 közös többszörösei:	6	12	18	24	30
b)	4 többszörösei:	4	8	12	16	20
	6 többszörösei:	6	12	18	24	30
	9 többszörösei:	9	18	27	36	45
	4 és 6 közös többszörösei:	12	24	36	48	60
	4 és 9 közös többszörösei:	36	72	108	144	180
	6 és 9 közös többszörösei:	18	36	54	72	90
	4, 6 és 9 közös többszörösei:	36	72	108	144	180

c)

4 többszörösei:	4	8	12	16	20
7 többszörösei:	7	14	21	28	35
12 többszörösei:	12	24	36	48	60
4 és 7 közös többszörösei:	28	56	84	112	140
4 és 12 közös többszörösei:	12	24	36	48	60
7 és 12 közös többszörösei:	84	168	252	336	420
4, 7 és 12 közös többszörösei:	84	168	252	336	420

d)

10 többszörösei:	10	20	30	40	50
15 többszörösei:	15	30	45	60	75
20 többszörösei:	20	40	60	80	100
10 és 15 közös többszörösei:	30	60	90	120	150
10 és 20 közös többszörösei:	20	40	60	80	100
15 és 20 közös többszörösei:	60	120	180	240	300
10, 15 és 20 közös többszörösei:	60	120	180	240	300

e)

10 többszörösei:	10	20	30	40	50
12 többszörösei:	12	24	36	48	60
15 többszörösei:	15	30	45	60	75
10 és 12 közös többszörösei:	60	120	180	240	300
10 és 15 közös többszörösei:	30	60	90	120	150
12 és 15 közös többszörösei:	60	120	180	240	300
10, 12 és 15 közös többszörösei:	60	120	180	240	300

f)

2 többszörösei:	2	4	6	8	10
10 többszörösei:	10	20	30	40	50
12 többszörösei:	12	24	36	48	60
2 és 10 közös többszörösei:	10	20	30	40	50
2 és 12 közös többszörösei:	12	24	36	48	60
10 és 12 közös többszörösei:	60	120	180	240	300
2, 10 és 12 közös többszörösei:	60	120	180	240	300

g)

6 többszörösei:	6	12	18	24	30
8 többszörösei:	8	16	24	32	40
10 többszörösei:	10	20	30	40	50
6 és 8 közös többszörösei:	24	48	72	96	120
6 és10 közös többszörösei:	30	60	90	120	150
8 és 10 közös többszörösei:	40	80	120	160	200
6, 8 és 10 közös többszörösei:	120	240	360	480	600

h)

10 többszörösei:	10	20	30	40	50
15 többszörösei:	15	30	45	60	75
18 többszörösei:	18	36	54	72	90
10 és 15 közös többszörösei:	30	60	90	120	150
10 és 18 közös többszörösei:	90	180	270	360	450
15 és 18 közös többszörösei:	90	180	270	360	450
10, 15 és 18 közös többszörösei:	90	180	270	360	450

1792. A két egymást követő többszörös különbségéből következtethetünk a keresett számra.

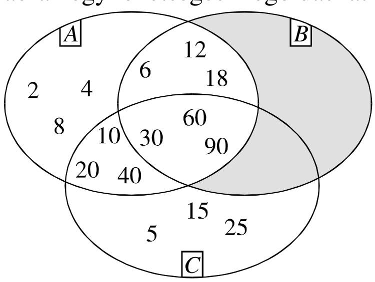
a) 3 *b)* 7 *c)* 13 *d)* 14

1793. Mindegyik esetben triviális megoldás az 1. Az ettől eltérő megoldásokat adjuk csak meg:

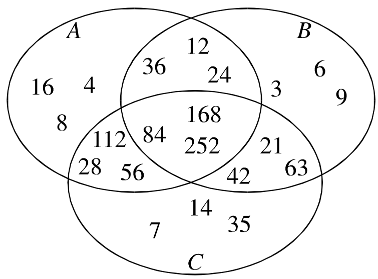
a) 3 *b)* 5 *c)* 2, 3, 4 vagy 12 *d)* 13
e) 2, 3, 4 vagy 12 *f)* 3, 5 vagy 15.

1794. Az ábrán egy lehetséges megoldás látható.

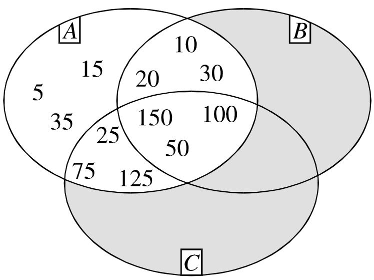
a)



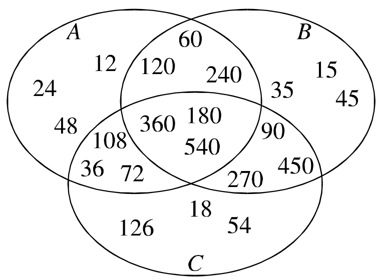
b)



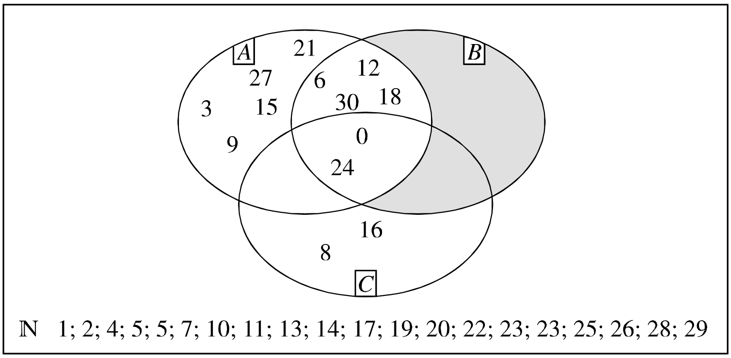
c)



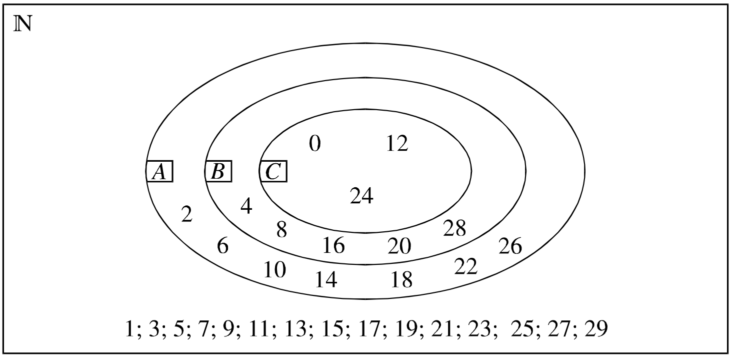
d)



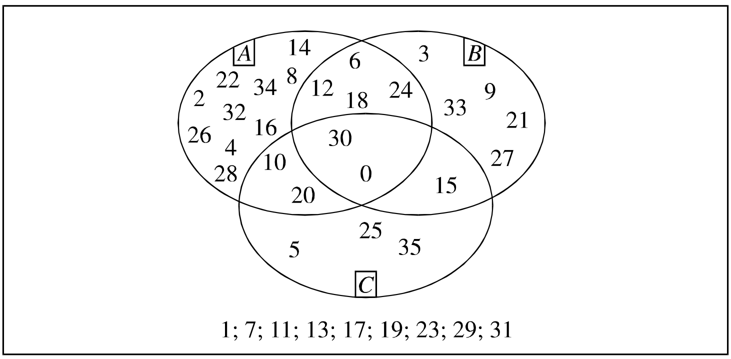
1795.



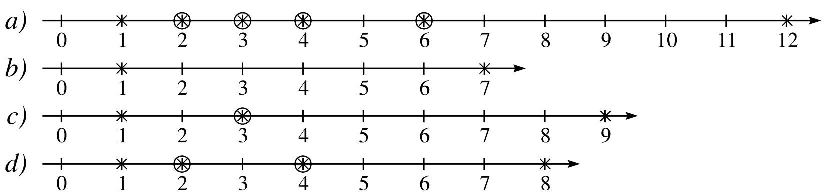
1796. A megadott halmazokra teljesül, hogy $C \subset B \subset A$.

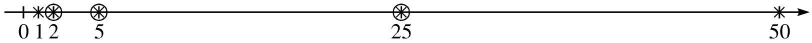


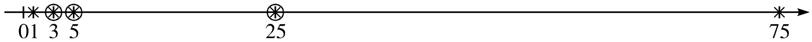
1797. Mivel $D = A \cap B$, ezért az ábra így is felvehető

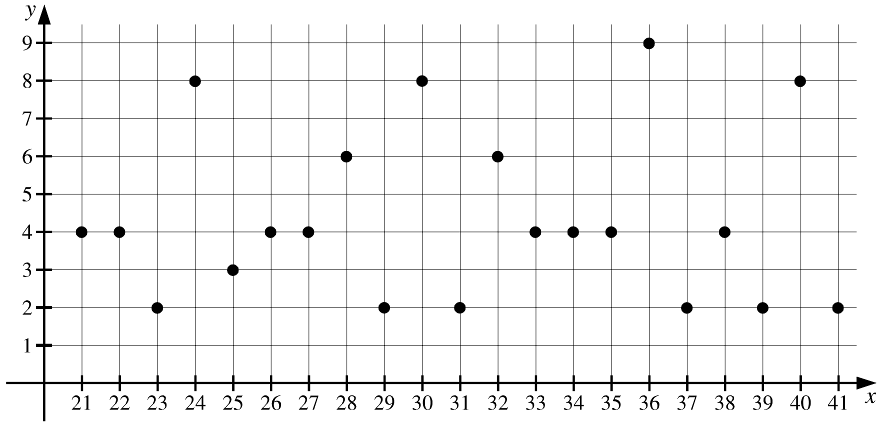


1784. ×: osztók ○: valódi osztók



e) 

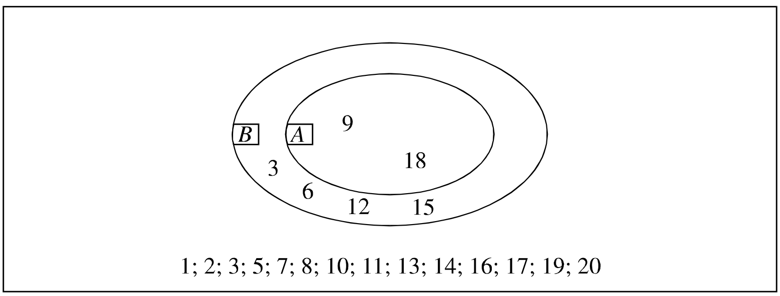
f) 

1799. 

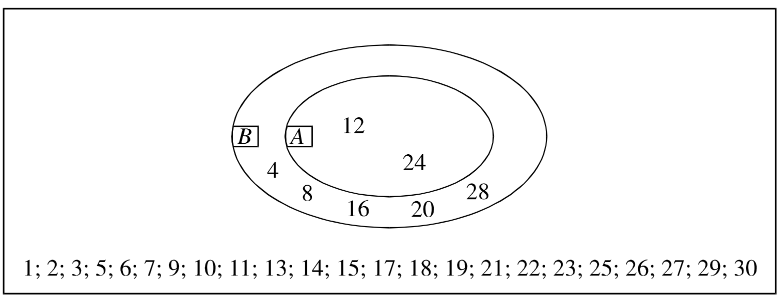
1800. *a)* Nincs ilyen természetes szám. *b)* 1.
c) A prímszámok (2; 3; ...). *d)* Az 1 és a prímszámok (2; 3; ...).
e) Nincs ilyen természetes szám.

1801. Azokat az 1-nél nagyobb természetes számokat, amelyeknek pontosan két pozitív osztójuk van **prímszámoknak** nevezzük. Azokat a természetes számokat, amelyeknek kettőnél több osztójuk van, **összetett számoknak** nevezzük. Az 1 egyik halmaznak sem eleme.

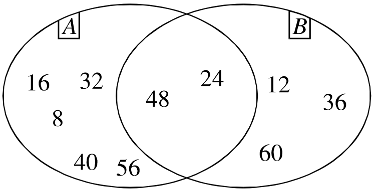
1802. A halmazokra teljesül, hogy $A \subset B$.



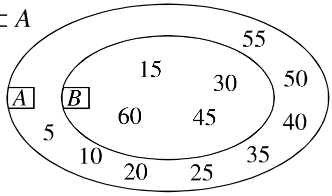
1803. A halmazokra teljesül, hogy $B \subset A$.



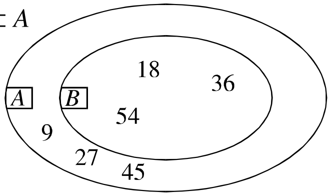
1804. *a)*



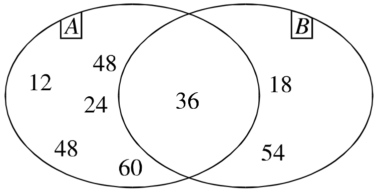
b) $B \subset A$



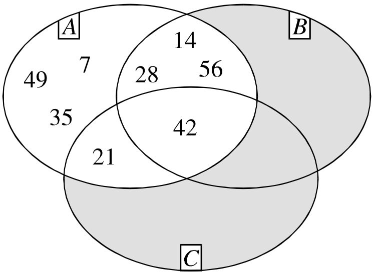
c) $B \subset A$



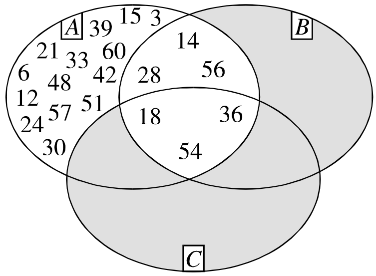
d)



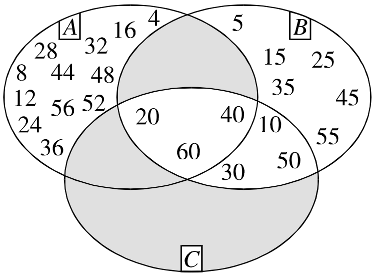
1805. *a)*



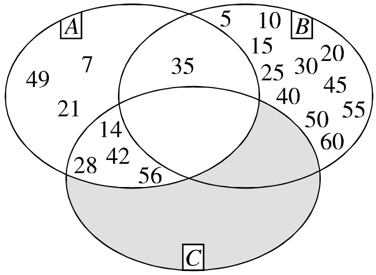
b)



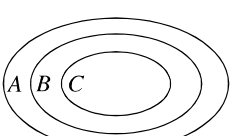
c)



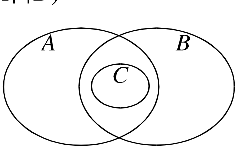
d)



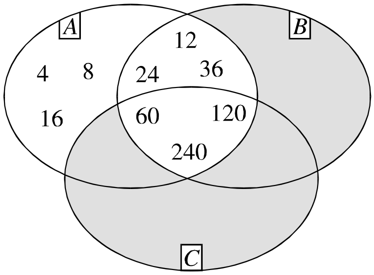
1806. Mivel $C \subset B \subset A$, ezért:



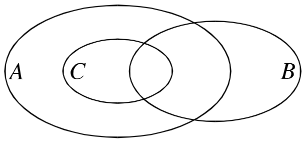
1807. $C \subset (A \cap B)$



1808. $C \subset B \subset A$



1809.



Maradékos osztás

1810. *a)* Nem igaz. Példa rá a 3. *b)* Igaz. *c)* Nem igaz. A 3 nem páros
d) Igaz. *e)* Nem igaz. A 6 páros szám.

1811. *a)* Igaz. Például a 6. *b)* Igaz. A 6 is ilyen szám.
c) Nem igaz. *d)* Igaz. Például a 3.

1812. *a)* Igaz *b)* Igaz *c)* Igaz
d) Nem igaz. Például a 12 10-es maradéka és 5-ös maradéka is 2. *e)* Igaz.

1813. *a)* Igaz. *b)* Igaz.
c) Akkor a 2-es maradéka is 0, hiszen osztható 2-vel.
d) Akkor a 2-es maradéka is 1, hiszen biztosan páratlan számról van szó.

1814. *a)* Ekkor a szám 10-es maradéka vagy 0 vagy 5. Attól függ, hogy 0-ra vagy 5-re végződik.
b) A 10-es maradéka lehet: 0; 2; 4; 6 vagy 8.

1815. *a)* Nem igaz. Például a 12 2-vel osztható pedig nem mindegyik számjegye osztható 2-vel.
b) Igaz. *c)* Nem igaz. Például a 22 sem osztható 4-gyel.
d) Igaz. *e)* Nem igaz. Példa rá a 12.
f) Igaz. *g)* Nem igaz. Példa rá a 33.

1816. *a)* 68-nak a 7-es maradéka 5, mert $68 = 9 \cdot 7 + 5$.
b) 72-nek a 15-ös maradéka 12, mert $72 = 4 \cdot 15 + 12$.
c) 32-nek a 8-as maradéka 0, mert $32 = 4 \cdot 8$.

d) 135-nek a 10-es maradéka 5, mert 135 = 13 · 10 + 5.

e) 152-nek a 100-as maradéka 52, mert 152 = 1 · 100 + 52.

f) 2897-nek az 1000-es maradéka 897, mert 2897 = 2 · 1000 + 897.

1817. Az eredményt táblázatba foglalva:

	237	135	2000	132	43	1112	1960
10-es maradék	7	5	0	2	3	2	0
2-es maradék	1	1	0	0	1	0	0
5-ös maradék	2	0	0	2	3	2	0

1818.

	27	38	93	112	321	716	1920
6-os maradék	3	2	3	4	3	2	0
2-es maradék	1	0	1	0	1	0	0
3-as maradék	0	2	0	1	0	2	0

1819.

	91	125	137	600	111	2555	10 125
100-as maradék	91	25	37	0	11	55	25
4-es maradék	3	1	1	0	3	3	1
25-ös maradék	16	0	12	0	11	5	0

1820.

	137	106	240	503	211	1992	2000
3-as maradék	2	1	0	2	1	0	2
9-es maradék	2	7	6	8	4	3	2

1821.

	86 937	111 118	10 000 000	199 219 921 992
3-as maradék	0	1	1	0
9-es maradék	6	4	1	0

1822. 3-as maradéka

0: 1992; 997 122.
1: 13; 1111; 367; 100 00.
2: 812.

1823. *a)* 1000 · 3 = 3000 *b)* 99 · 3 + 1 = 298 *c)* 199 · 3 + 2 = 599

1824. A sorozatot a következő szabály adja meg.

$$a_n = (n - 1) \cdot 5 + 2$$

Az első három eleme a sorozatnak: 2; 7; 12.

a) 99 · 5 + 2 = 497 *b)* 322 a 65. helyen áll, mert 64 · 5 + 2 = 322.

1825. A sorozat szabálya: $a_n = (n - 1) \cdot 7 + 3$.

a) A kétszázadik eleme: 199 · 7 + 3 = 1396.

b) Az 1354 a 194. helyen áll, mert 193 · 7 + 3 = 1354.

1826. A sorozatot két sorozat „összefésülése” adja meg: $a_n = 3n$; $b_n = 3 \cdot (n - 1) + 2$.
Az első néhány elem: 2; 3; 5; 6; 8; 9; ...

a) A századik szám: 150. *b)* Az 572 a 381. elem lesz.

1827. A sorozatot az $a_n = 4 \cdot (n - 1) + 3$ és a $b_n = 4n$ sorozatok „összefésülése” határozza meg.
a) Az ezredik helyen a 2000 áll.
b) Az 1000 a 250. eleme lesz a sorozatnak.

1828. *a)* Adhat maradékul: 1-et, 4-et vagy 7-et. *b)* A maradék csak 1 lehet.

1829. *a)* A maradék lehet 2; 5; 8 vagy 11. *b)* A maradék csak 2 lehet.

1830. *a)* A maradék szintén 1 lesz. *b)* A maradék lehet 1 vagy 6.

1831. *a)* Mivel a 120 osztható 6-tal így több felbontás is elképzelhető. Például:

$$6 + 114 = 12 + 108 = 18 + 102 = 120$$

b) Ilyen felbontás nem létezik, ha az összeg egyik tagja 6-tal osztható, akkor a másik tag is az lesz.

1832. *a)* Ilyen felbontás nem létezik, mert a 333 nem osztható 6-tal.
b) Több ilyen felbontás létezik. Például:

$$6 + 327 = 12 + 321 = 18 + 315 = 333.$$

1833. *a)* Mivel 520 nem osztható 12-vel, ezért ilyen felbontás nem létezik.
b) Például: $12 + 508 = 24 + 496 = 36 + 484 = 520$.

1834. Minden $13k + m$ és $13l - m$ alakú számpár megfelelő. Például: $13 + 1 = 14$ és $13 - 1 = 12$.

1835. Minden $17k + m$ és $17l - m$ alakú számpár megfelelő.

1836. A kérdés nyilván a lehetséges maradékokra vonatkozik. Ha $a + b$ osztható 7-tel, akkor a lehetséges 7-es maradékok a következők lehetnek

a 7-es maradéka	0	1	2	3	4	5	6
b 7-es maradéka	0	6	5	4	3	2	1

1837. Az 1836-os feladathoz hasonlóan a két szám lehetséges maradékai ha $a + b$ osztható 8-cal:

a 8-as maradéka	0	1	2	3	4	5	6	7
b 8-as maradéka	0	7	6	5	4	3	2	1

1838. A feladat szerint $x = 5k + 2 \quad y = 5l + 1$.
a) $x + y = 5(k + l) + 3$, a maradék 3.
b) $x \cdot y = 25kl + 5k + 10l + 2$, a maradék 2.
c) $2x + y = 5(2k + l + 1)$, a maradék 0.

1839. Legyen $x = 7k + 1$ és $y = 7l + 2$.
a) $x + y = 7(k + l) + 3$, a maradék 3.
b) $x \cdot y = 7(7kl + 2k + l) + 2$, a maradék 2.

c) $2x + y = 7(k + 2l) + 5$, a maradék 5.

1840. Legyen $x = 9k + 2$ és $y = 9l + 5$.

a) $x + y = 9(k + l) + 7$, a maradék 7.

b) $x \cdot y = 9(9kl + 5k + 2l + 1) + 1$, a maradék 1.

c) $2x + 3y = 9(2k + 3l + 2) + 1$, a maradék 1.

1841. Legyen $x = 5k + 2$ és $y = 5l + 1$.

a) $x + y = 5(k + l) + 3$, a 10-es maradék 3, ha $k + l$ páros és 8, ha $k + l$ páratlan.

b) $x \cdot y = 5(5kl + k + 2l) + 2$, a 10-es maradék 2, ha $5kl + k$ páros és 7, ha $5kl + k$ páratlan.

c) $2x + y = 5(2k + l + 1)$, a 10-es maradék 0, ha $l + 1$ páros és 5, ha $l + 1$ páratlan.

1842. Mivel a 105 osztható 7-tel, ezért a lehetséges maradék az 1. Többféle felbontás is lehetséges. Például: $36 + 36 + 36 = 8 + 36 + 64 = 15 + 22 + 71 = 108$.

1843. Mivel $196 = 17 \cdot 11 + 9$, ezért az azonos maradék csak a 3 lehet. Néhány lehetséges felbontás: $14 + 25 + 157 = 25 + 36 + 135 = 36 + 47 + 113 = 196$.

1844. Mivel $47 = 3 \cdot 13 + 8$, ezért a maradékok értéke mindegyik számnál csak a 2 lehet. Néhány megoldás: $2 + 15 + 15 + 15 = 2 + 2 + 15 + 28 = 2 + 2 + 2 + 41 = 47$.

1845. *a)* A két szám maradéka legyen azonos: $x = 7k + m$ és $y = 7l + m$.

$$x - y = 7(k - l),$$

a különbség 7-tel osztható. Például: (14; 7) , (36; 8)

b) Legyen $x = 7k + m$ és $y = 7l - m$.

$$x + y = 7(k + l)$$

Például: (32; 10)

c) Ez csak akkor lehetséges, ha mindkét szám 7-tel osztható. Például: (14; 7)

1846. *a)* Legyen $x = 8k + m$ és $y = 8l + m$ alakú. Ekkor

$$x - y = 8(k - l).$$

Például: (16; 8) , (35; 11)

b) Legyen $x = 8k + m$ és $y = 8l - m$.

$$x + y = 8(k + l)$$

Például: (9; 7)

c) Ez két esetben teljesülhet. Ha mindkét szám 8-cal osztható, vagy mindkét szám 8-as maradéka 4. Például: (48; 8) , (52; 12)

1847. *a)* Legyen $x = 12k + m$ és $y = 12l + m$ alakú.

$$x - y = 12(k - l).$$

Például: (26; 14)

b) Legyen $x = 12k + m$ és $y = 12l - m$.

$x + y = 12(k + l)$

Például: (26; 10)

c) Ez két esetben teljesülhet. Ha mindkét szám osztható 12-vel, vagy mindkét szám 12-es maradéka 6. Például: (72; 24) , (18; 6)

1848. *a)* Legyen $x = 11k + m$ és $y = 12l + m$ alakú.

$x - y = 11(k - l)$.

Például: (12; 1)

b) Legyen $x = 11k + m$ és $y = 12l - m$.

$x + y = 11(k + l)$

Például: (23; 10)

c) Mivel a 11 prím,ezért ez csak akkor teljesül, ha mindkét szám osztható 11-gyel. Például: (33; 23)

1849. *a)* Nem szerepelhet azonos maradékú szám, így legfeljebb három számot adhatunk meg.

b) Végtelen sok szám megadható így. Például, ha mindegyik szám 3-as maradéka 1.

c) Az *a)* válaszból következik, hogy legfeljebb három szám adható meg a különbség miatt. De ekkor lesz egy olyan, amelynek 3-as maradéka 1 és egy olyan, amelynek 3-as maradéka 2. Így legfeljebb két számot adhatunk meg. Például: 2; 3.

1850. Az 1849. feladat megoldása alapján:

a) Kilenc számot adhatunk meg. *b)* Végtelen sok szám megadható.

c) Öt számot tudunk megadni. Például: 5; 6; 7; 8; 9.

1851. Az 1849. feladat megoldása alapján:

a) Legfeljebb hét szám adható meg. Például: 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7.

b) Végtelen sok szám megadható. Mindegyik szám 7-es maradéka legyen 0-tól különböző azonos szám.

c) Legfeljebb négy ilyen számot tudunk megadni. Például: 4; 5; 6; 7.

Oszthatósági szabályok

1852. *a)* 2; 5 vagy 8. *b)* 5.
c) Bármelyik számjegy beírható. *d)* 1; 3; 5; 7 vagy 9.
e) Nincs ilyen számjegy. *f)* 2; 5 vagy 8.

1853. *a)* 0; 3; 6 vagy 9. *b)* 3. *c)* 0; 2; 4; 6 vagy 8.
d) 2 vagy 6. *e)* Nincs ilyen számjegy. *f)* 0; 3; 6 vagy 9.

1854. *a)* 0; 3; 6 vagy 9. *b)* 3 vagy 9. *c)* 3 vagy 7.
d) 3. *e)* 9. *f)* Nincs ilyen szám.

1855. *a)* 1 vagy 7. *b)* 1. *c)* Nincs ilyen számjegy.
d) 4. *e)* 1; 5 vagy 9. *f)* Nincs ilyen számjegy.

1856. *a)* A △ és a □ helyére bármilyen számjegy behelyettesíthető. Ez összesen 100 megoldáspárt eredményez.

b) Nincs ilyen számpár, hiszen az utolsó két számjegy alkotta szám nem osztható 4-gyel.

c) A △ helyére bármilyen számjegy írható, míg a □-re nem található megoldás.

d) és *e)* megoldásai megegyeznek, hiszen a vizsgált szám biztosan páros. A lehetséges számpárok:

△	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
□	1;4;7	0;3;6;9	2;5;8	1;4;7	0;3;6;9	2;5;8	1;4;7	0;3;6;9	2;5;8	1;4;7

f)

△	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
□	1	0	8	7	6	5	4	3	2	1

1857. *a)* Bármilyen számjegypár behelyettesíthető.

b) Bármilyen számjegypár behelyettesíthető.

c) 0; 4 vagy 8 a □ helyére. △ bármilyen értéket felvehet.

d) és *e)* megoldásai:

△	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
□	1;4;7	0;3;6;9	2;5;8	1;4;7	0;3;6;9	2;5;8	1;4;7	0;3;6;9	2;5;8	1;4;7

f)

△	1;4;7	0;3;6;9	2;5;8
□	0	4	8

1858. *a)*

△	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
□	1;4;7	0;3;6;9	2;5;8	1;4;7	0;3;6;9	2;5;8	1;4;7	0;3;6;9	2;5;8	1;4;7

b)

△	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
□	1	0	8	7	6	5	4	3	2	1

c) Bármilyen számpár megoldás lesz.

d) Ugyanaz a megoldás mint az *a)* esetben.

e) △ helyére bármi írható. A □ lehetséges értékei: 2 vagy 7.

f) Ugyanaz a megoldás mint a *b)* esetben.

1859. *a)* A 2-ek száma 3-mal osztható kell, hogy legyen. Például: 222; 222 222.

b) Nincs ilyen szám, hiszen a 22 nem sztható 4-gyel.

c) Ugyanaz a megoldás mint az *a)* pontban.

d) A 2-ek száma 9-cel osztható kell legyen. Például: 222 222 222.

e) Ha jegyek száma páros, akkor a szám osztható lesz 11-gyel. Például: 22; 2222.

f) Ugyanaz a megoldás mint a *d)* pontban.

1860. *a)* A számjegyek száma legyen 3-mal osztható. Például: 444; 444 444.

b) Mivel a 44 4-gyel osztható, így minden 4-es számjegyekből felírt szám megfelelő. Például: 4; 44; 444.

c) Ugyanaz a megoldás mint az *a)* pontban.

d) Ugyanaz a megoldás mint az *a)* pontban.

e) Legyen a számjegyek száma 9-cel osztható. Például: 444 444.
f) Ugyanaz a megoldás mint az *e)* pontban.

1861. *a)* A jegyek száma legyen 3-mal osztható. Például: 555; 555 555.
b) A jegyek száma bármennyi lehet: Például: 5; 55.
c) A jegyek száma legyen 9-cel osztható.
d) Ugyanaz a megoldás mint az *a)* pontban.
e) Ugyanaz a megoldás mint a *c)* pontban.
f) Nincs ilyen szám, hiszen a 25-tel osztható számok nem végődhetnek 55-re.

Közös többszörös, közös osztó

1862. *a)* $2^2 \cdot 7 \cdot 17$ *b)* $3^2 \cdot 7^2$ *c)* $2^4 \cdot 5 \cdot 23$ *d)* $2^3 \cdot 3 \cdot 83$
e) $2^3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13$ *f)* $2^3 \cdot 5^2 \cdot 17$ *g)* $3^2 \cdot 5^3 \cdot 7$ *h)* $2^5 \cdot 3^3 \cdot 5^2$

1863. *a)* $1; 2; 3; 2 \cdot 3$
b) $1; 2; 2^2; 2^3$
c) $1; 2; 2^2; 3; 3 \cdot 2; 3 \cdot 2^2$
d) $1; 2; 2^2; 3; 3^2; 2 \cdot 3; 2 \cdot 3^2; 2^2 \cdot 3; 2^2 \cdot 3^2$
e) $1; 2; 2^2; 2^3; 2 \cdot 7; 2^2 \cdot 7; 2^3 \cdot 7; 7$
f) $1; 2; 2^2; 2^3; 2^4; 5; 2 \cdot 5; 2^2 \cdot 5; 2^3 \cdot 5; 2^4 \cdot 5; 5^2; 2 \cdot 5^2; 2^2 \cdot 5^2; 2^3 \cdot 5^2; 2^4 \cdot 5^2$
g) $1; 2; 2^2; 2^3; 3; 2 \cdot 3; 2^2 \cdot 3; 2^3 \cdot 3; 3^2; 2 \cdot 3^2; 2^2 \cdot 3^2; 2^3 \cdot 3^2; 3^3; 2 \cdot 3^3; 2^2 \cdot 3^3; 2^3 \cdot 3^3$
h) $1; 2; 2 \cdot 3; 3^2; 2 \cdot 3^2; 5; 2 \cdot 5; 5^2; 2 \cdot 5^2; 3 \cdot 5; 2 \cdot 3 \cdot 5; 3^2 \cdot 5; 2 \cdot 3^2 \cdot 5; 3^2 \cdot 5^2;$ $2 \cdot 3^2 \cdot 5^2; 3 \cdot 5^2; 2 \cdot 3 \cdot 5^2$

1864. *a)* $348 = 2^2 \cdot 3 \cdot 29$
Osztói: $1; 2; 2^2; 3; 2 \cdot 3; 2^2 \cdot 3; 29; 2 \cdot 29; 2^2 \cdot 29; 3 \cdot 29; 2 \cdot 3 \cdot 29; 2^2 \cdot 3 \cdot 29$.
b) $3400 = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 17$. A fentiekhez hasonlóan összesen 24 osztó adható meg.
c) $4550 = 2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 13$. Az osztók száma 24.
d) $392 = 2^3 \cdot 7^2$. Az osztók száma 12 lesz.
e) $2000 = 2^4 \cdot 5^3$. Az osztók száma 20.
f) $1568 = 2^5 \cdot 7^2$. Az osztók száma 18.

1865. *a)* (12; 18) = 6. A közös osztók: 1; 2; 3; 6.
b) (25; 25) = 25. A közös osztók: 1; 5; 25.
c) (9; 12) = 3. A közös osztók: 1; 3.
d) (108; 90) = 18. A közös osztók: 1; 2; 3; 6; 9; 18.
e) (600; 126) = 6. A közös osztók: 1; 2; 3; 6.
f) (475; 570) = 95. A közös osztók: 1; 5; 19; 95.

1866. *a)* [9; 12] = 36 *b)* [8; 18] = 72 *c)* [15; 25] = 75
d) [348; 476] = 41 412 *e)* [475; 570] = 2850 *f)* [625; 1024] = 640 000

1867. (60; 84; 90) = 6.

1868. (210; 300; 165) = 15.

1869. A számláló és a nevező legnagyobb közös osztójával tudunk egyszerűsíteni. Így a következő törtek adódnak:

a) $\frac{36}{96}=\frac{3}{8}$ *b)* $\frac{128}{512}=\frac{1}{4}$ *c)* $\frac{101}{211}=\frac{101}{211}$ *d)* $\frac{567}{1053}=\frac{7}{13}$ *e)* $\frac{629}{799}=\frac{37}{47}$

f) $\frac{754}{221}=\frac{58}{17}$.

1870. A nevezők legkisebb közös többszöröse adja közös nevezőt. Az összeadás után a törtet ahol lehetett még egyszerűsíthetjük is. Az egyes esetekben kapott eredmények:

a) $\frac{19}{112}$ *b)* $\frac{61}{450}$ *c)* $\frac{19}{1260}$ *d)* $\frac{8}{10\,353}$ *e)* $\frac{36}{539}$ *f)* $\frac{5}{209}$.

1871. Megfigyelhető, hogy mindegyik a és b számpárra teljesül, hogy $a \cdot b = (a; b) \cdot [a; b]$. A kapott számokat a kérdésben megadott sorrendben adtuk meg.

a) $2 \cdot 3 = 6$; $(2; 3) = 1$; $[2; 3] = 6$; $(2; 3) \cdot [2; 3] = 6$.

b) 448; 4; 112; 448 *c)* 48; 2; 24; 48 *d)* 48; 2; 60; 120

e) 300; 5; 60; 300 *f)* 6750; 15; 450; 6750.

1872. *a)* [840; 1800] = 12 600; (840; 1800) = 120

b) 9095; 107 *c)* 42 427; 551 *d)* 29 580; 2465

1873. (60; 72; 108; 396) = 12.

1874. [60; 72; 108; 396] = 11 880.

1875. *a)* $x = 528$ *b)* $x = 720$

c) Mivel $6 = 2 \cdot 3$ és $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ ezért az x lehetséges értékei: $2^2 \cdot 5$; $2^2 \cdot 3 \cdot 5$.

d) $16 = 2^4$ és $48 = 2^4 \cdot 3$, ezért a lehetséges megoldások: 3; $2 \cdot 3$; $2^2 \cdot 3$; $2^3 \cdot 3$ és $2^4 \cdot 3$.

e) $4 = 2^2$ és $36 = 2^2 \cdot 3^2$, ezért a lehetséges megoldások: 3^2; $2 \cdot 3^2$; $2^2 \cdot 3^2$.

f) Minden olyan természetes szám megoldás lesz, amelyik a 32-nek osztója: 1; 2; 4; 8; 16; 32.

1876. *a)* $x = 10$ *b)* $x = 15$

c) $x = 12k$ alakú szám, ahol a k nem osztható sem 2-vel sem 3-mal.

d) x olyan természetes szám, amelyik sem 3-mal sem 5-tel nem osztható.

e) $x = 6k$ alakú szám, ahol a k sem 2-vel sem 3-mal nem osztható.

f) $x = 11k$ alakú szám, ahol a k nem osztható 11-gyel.

1877. AZ 1871. feladat alapján megfogalmazható, és igazolható, hogy a, b természetes számok esetén igaz, hogy $a \cdot b = (a; b) \cdot [a; b]$. Így a keresett értékek:

a) 300 *b)* 144 *c)* 144 *d)* 1792

1878. A szorzat végén álló nullák száma attól függ, hogy szorzatban hányszor szerepel az 5-ös prímtényező. Ezek száma biztosan nem több mint az előforduló 2-es prímtényezők száma. Így mindegyik 5-ös tényezőhöz kapcsolhatunk egy 2-es tényezőt, amelyek szorzata 10-et ad.

a) $10! = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot 10 = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7 = 3\,628\,800$
Két nulla szerepel a szorzat végén.

b) $25! = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot 25 = 2^{22} \cdot 3^{10} \cdot 5^6 \cdot 7^3 \cdot 11^2 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23$
Hat nulla szerepel a szorzat végén.

c) A 100!-ban szereplő 5-ös prímtényezők száma 24. Ugyanis 20 5-tel osztható szám van, de ezek között szerepel 4 olyan, amelyik 5^2-tel is osztható. A szorzat végén álló nullák száma tehát 24.

1879. A szorzat biztosan osztható lesz 6-tal, hiszen lesz a számok között legalább egy páros, és legalább egy 3-mal osztható.

1880. Legyen a két természetes szám x és y. Mivel $(x; y) = 24$, ezért mindkét szám felírható $x = 24k$ és $y = 24l$ alakban, ahol $(k; l) = 1$. Mivel

$$24k + 24l = 72$$
$$k + l = 3$$

Így a megoldások

$$k = 1 \quad l = 2 \quad \text{vagy} \quad k = 2 \quad l = 1$$
$$x_1 = 24 \quad y_1 = 24 \quad \text{vagy} \quad x_2 = 48 \quad y_2 = 24$$

1881. Az 1880. feladat gondolatmenetét alkalmazva:

$$x_1 = 36 \quad y_1 = 144 \quad x_2 = 72 \quad y_2 = 108$$
$$x_3 = 108 \quad y_3 = 72 \quad x_4 = 144 \quad y_4 = 36$$

1882. Az 1880. feladat gondolatmenetét alkalmazva:

$$x_1 = 147 \quad y_1 = 1176 \quad x_2 = 294 \quad y_2 = 1029$$
$$x_3 = 588 \quad y_3 = 735 \quad x_4 = 735 \quad y_4 = 588$$
$$x_5 = 1029 \quad y_5 = 294 \quad x_6 = 1176 \quad y_6 = 147$$

1883. Legyen $x = 5k$ és $y = 5l$, ahol $(k; l) = 1$. A feltételek szerint:

$$xy = 75$$
$$25kl = 75$$
$$kl = 3$$

Így $k_1 = 1$ $l_1 = 3$ és $k_2 = 3$ $l_2 = 1$. A feladat megoldásai: $x_1 = 5$ $y_1 = 15$ és $x_2 = 15$ $y_2 = 5$.

1884. Mivel $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$, ezért hogy a feltételek teljesülhessenek legalább az egyik szám tartalmazza a 2^2, 3^2 és az 5 tényezőket. Így a lehetséges x és y megoldások:

x	1	5	2^2	3^2	$2^2 \cdot 5$	$3^2 \cdot 5$	$2^2 \cdot 3^2$	1
y	$2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$	$2^2 \cdot 3^2$	$5 \cdot 3^2$	$2^2 \cdot 5$	3^2	2^2	5	$2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$

1885. Legyen $x = 5k$ és $y = 5l$, ahol $(k; l) = 1$.

$$x^2 - y^2 = 25k^2 - 25l^2 = 75$$
$$k^2 - l^2 = 3$$
$$(k - l)(k + l) = 3$$

Így adódik, hogy $k - l = 1$ és $k + l = 3$.

$k = 2 \quad l = 1$

A feladat megoldása $x = 10$ és $y = 5$.

1886. Az 1885. feladat alapján adódik, hogy $x = 18$ és $y = 12$.

1887. Meg kell hatátozni a visszatérésekhez szükséges idők legkisebb közös többszörösét.

$[4; 8; 12; 16] = 48$

Ez kisebb mint 52, ezért még ebben az évben 48 hét múlva találkoznak.

1888. Meg kell határozni a darabszámok legnagyobb közös osztóját. $(48; 72; 100) = 4$. Legfeljebb 4-en lehettek a csoportban. (Megoldás lenne még az 1 és a 2, de egyik létszám esetén sem beszélhetnénk csapatról.)

1889. Mivel $[12; 15] = 60$. Ezért pontosan egy óra múlva indul egyszerre a két busz.

1890. Mivel $[35; 20] = 140$, ezért a pedállal rendelkező fogaskereket négyszer kell körbeforgatni.

1891. Mivel $[62; 64] = 1984$, és a győztes ideje 2646 másodperc, ezért még egyszer találkoznak, azaz a gyorsabb lekörözi a másikat.

1892. A találkozások $[15; 40] = 120$ méterenként ismétlődnek.

Vegyes feladatok

1893. Nyilván a legkisebb ilyen természetes szám az 1. A rá következő a $7 \cdot 8 + 1 = 57$ lesz.

1894. A megoldás a 2. A rá következő természetes szám, amely megfelelő: $2 \cdot 3 \cdot 7 + 1 = 44$. Minden ilyen természetes szám felírható $2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot k + 2$ alakban, ahol k természetes szám.

1895. A legkisebb ilyen szám a 3. A megfelelő számok felírhatók $2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot k + 3$ alakban. Így a második sorban a 993 lesz.

1896. Olyan számot keresünk, amelyhez 1-et hozzáadva 6-tal és 7-tel is osztható lesz, azaz $6 \cdot 7 \cdot k$ alakú. Így a keresett szám $6 \cdot 7 \cdot k - 1$ alakú lesz. Ezek közül a legkisebb a 41.

1897. Az 1896. feladat gondolatmenetét követve adódik, hogy a megoldás az 59.

1898. Az 1896. feladat alapján megoldva adódik, hogy: 1429.

1899. A feltétel azt jelenti, hogy a létszámból 3-at levonva olyan számot kapunk, amely osztható 6-tal, 7-tel, 8-cal és 10-zel. A prímtényezőket figyelembe véve $2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$-tel. Ezek alapján a létszám: $840 + 3 = 843$.

1900. *a)* Páros számot kapunk, hiszen van egy páros prímszám a tényezők között, a 2.

b) Így 49 páratlan számot és egy páros (2) számot adunk össze. Az eredmény páratlan lesz.

1901. *a)* Mivel az első tíz pozitív egész szám összege 55, ezért ezt két egyenlő egész részre nem tudjuk felosztani.

b) Ha egyenlő lenne a két halmazban levő számok szorzata, akkor a prímtényezős felbontásuk is megegyezne. Ez viszont nem lehetséges, hiszen például a 7-es prímtényező csak az egyik halmaznak lehet eleme.

1902. *a)* Felírtunk néhány számot, amelynek 12 osztója van. Nyilván arra kell törekednünk, hogy a prímtényezős felbontásban a lehető legkisebb prímek szerepeljenek!

$$2^{11} = 2048;\ 2^3 \cdot 3^2 = 72;\ 2^5 \cdot 3 = 96;\ 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$$

Ezek között a legkisebb a 60.

b) Csak a k^{10} alakú számoknak van 11 osztója. Ezek között a legkisebb a $2^{10} = 1024$. Megjegyzés: Általában igaz, hogy valamely n természetes szám pozitív osztóinak száma, ha n prímtényezős alakja $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot ... \cdot p_r^{\alpha_r}$, akkor $(\alpha_1 + 1)$ $(\alpha_2 + 1) ... (\alpha_r + 1)$.

1903. *a)* Mivel $\frac{n+2}{n} = 1 + \frac{2}{n}$, ezért a kifejezés csak akkor lesz egész, ha n osztója 2-nek, azaz $n = 1$ vagy 2.

b) $\frac{2n+2}{n} = 2 + \frac{2}{n}$. Így a megoldás $n = 1$ vagy 2.

c) $\frac{2n+6}{n+3} = \frac{2(n+6)}{n+3} = 2$. Így minden pozitív egész szám megfelelő.

d) $\frac{2n+6}{n-3} = \frac{2n-6+12}{n-3} = a + \frac{12}{n-3}$. Ez akkor egész, ha $n - 3 = 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 6;\ 12$. Így $n = 4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 9$ vagy 15.

1904. Ha a maradék ugyanaz, akkor a két szám különbsége a háromjegyű számmal osztható lesz. 11 863 – 10 839 = 1024. Így az osztó lehetséges értékei: 512; 256 vagy 128. Ezekhez tartozó lehetséges maradékok 87-et adnak mindegyik esetben.

1905. Az 1904. feladat megoldása alapján adódó osztók: 597 vagy 199. A maradék mindkét esetben 7.

1906. A feltétel azt jelenti, hogy a 2529 és a 2731 ugyanazt a maradékot adja az osztás során. Az 1904. feladat megoldása alapján az osztók. 202 vagy a 101. A maradékok értéke pedig rendre 105 vagy 4.

1907. *a)* A 3-mal osztható számok négyzetei nyilván 0 maradékot adnak. Mivel

$$(3k+1)^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 1$$
$$(3k+2)^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1,$$

a másik két esetben mindig 1-et kapunk maradékul. A négyzetszámok hármas maradéka 0 vagy 1.

b) Az *a)* ponthoz hasonlóan adódik, hogy a lehetséges maradékok: 0 vagy 1.

c) Az *a)* ponthoz hasonlóan adódik, hogy a lehetséges maradékok: 0; 1 vagy 4.

1908. *a)* Nincs. Hiszen az összeg azt jelentené, hogy a szám osztható lenne 3-mal de 9-cel nem, ha pedig egy négyzetszám osztható 3-mal, akkor 9-cel is.

b) Nincs. Hiszen ez a szám 3-mal osztva 2-t adna maradékul, ami az 1907. *a)* feladat eredménye alapján nem lehetséges.

c) Igen van. Ilyen például $81^2 = 6561$.

1909. A felosztás nem végezhető el. Ha elvégezhető lenne, akkor a két szorzat prímtényezős felbontása is megegyezne, ami nem lehetséges, hiszen egy nagyobb prímszám (például a 97) csak az egyik szorzatban szerepelhetne prímtényezőként.

1910. Nincs, mivel legalább egy páros szám szerepelne a három között. Egy páros prím létezik csak a 2, ennek tehát középen kell állnia. Az 1; 2; 3 számok között viszont az 1 nem prím.

1911. Az első kérdésre a válasz nem. Például az 1, 2, 3, 4 sorozatban csak egy összetett szám szerepel a 4. Az sem igaz, hogy legfeljebb három lehet közülük összetett. Példa rá a 24, 25, 26, 27 sorozat.

1912. Jelölje az első számjegyet x. Mivel a jegyek összege 3-mal osztható így $2x + 1$ 3-mal osztható számot ad. Ez $x = 1$; 4 vagy 7 esetben teljesül. A feladatra három megoldás adódik: 102; 405; 708.

1913. A három szám között biztosan lesz legalább egy páros, azaz 2-vel osztható és legalább egy 3-mal osztható szám. Ezek szorzata biztosan osztható 6-tal.

1914. A négy szám között lesz két páros és ezek között az egyik 4-gyel is osztható. Lesz legalább egy 3-mal osztható. Így a szorzat biztosan osztható $2 \cdot 4 \cdot 3 = 24$-gyel.

1915. A 120 minden ilyen szorzatnak osztója lesz. Az öt szám között van legalább két páros, melyek közül az egyik 4-gyel is osztható. Van legalább egy 3-mal és legalább egy 5-tel osztható. A szorzat tehát $2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5 = 120$-szal is osztható.

1916. Az egyik szám biztosan osztható lesz 4-gyel is.

1917. 64. A számok között van egy 2-vel egy 4-gyel és egy 8-cal osztható.

1918. Legyen a két befogó a és b. $(a; b) = 1$.

$$\frac{a \cdot b}{2} = 84$$
$$ab = 168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$$

A harmadik oldal a Pitagorasz-tétel alapján adódik:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

A lehetséges megoldások:

a	1	3	7	21	8	24	56	168
b	168	5	24	8	21	7	3	1
c	$\sqrt{28\,225}$	$\sqrt{3145}$	25	$\sqrt{505}$	$\sqrt{505}$	25	$\sqrt{3145}$	$\sqrt{28\,225}$

1919. Ez a szám a $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 = 9\,699\,690$.

1920. Jelölje a szám egy számjegyét a. A szám $\overline{aaa} = a \cdot 111 = a \cdot 3 \cdot 37$. Tehát szám prímtényezős felbontásában szerepel a 37.

1921. A szám alakja $\overline{abc\,abc} = \overline{abc} \cdot 1001 = \overline{abc} \cdot 7 \cdot 143$. Mivel a tényezők között szerepel a 143, ezért az állítás igaz.

1922. A két számot jelölje k illetve $2k$.

a) $k + 2k = 3k$ osztható 3-mal és k-val

b) $2k - k = k$ osztható k-val

c) $2k \cdot k = 2k^2$ osztható 2-vel és k^2-tel

d) $k^2 + (2k)^2 = k^2 + 4k^2 = 5k^2$ osztható 5-tel és k^2-tel

1923. Olyan páros számokat kell keresni, melyek oszthatók 9-cel, azaz a számjegyek összege is osztható 9-cel. Ezek a számok: 12 222; 21 222; 22 122 és a 22 212.

1924. A számjegyek összege 9-cel osztható kell hogy legyen, valamint az utolsó két számjegyből alkotott szám 4-gyel legyen osztható. Végtelen sok ilyen szám létezik. Az utolsó két számjegyük azonban megegyezik: 32. Ilyen számok: 2232 vagy 22 322 232.

1925. Legyen a három prím a, b és c.

$$abc = 5(a + b + c)$$

Az egyenlőségből következik, hogy az egyik prím pl. $a = 5$.

$$bc = 5 + b + c$$

Az egyenletet átrendezve:

$$bc - b - c + 1 = 6$$
$$(b - 1)(c - 1) = 6$$

Ez meghatározza a b és c lehetséges értékeit.

b	2	3	4	7
c	7	4	3	2

$a = 5$

A megoldások permutációi is megoldást adnak.

1926. Az 1925. feladat megoldása alapján adódik, hogy $a = 13$

b	2	3	8	15
c	15	8	3	2

és ezek permutációi.

1927. Ha a kapott számot 4-gyel szorozzuk, akkor az eredeti számot kapjuk. Írjuk fel a szorzást és végezzük el a megszokott lépéseket:

$$\underline{\quad 6\,4 \cdot 4}$$
$$6$$

A szorzat bármelyik jegye a szorzandóban eggyel nagyobb helyiértéken szerepel. Ezt felhasználva addig kell folytatnunk a műveleteket, amíg nem kapunk egy 4-gyel kezdődő szorzatot:

$$\begin{array}{l} \underline{102564} \cdot 4 \\ 410256 \end{array}$$

A legkisebb ilyen szám tehát a 410 256.

1928. Jelölje a 6-os számjegy törlése után kapott számot A. Ekkor igaz, hogy

$$25 \cdot A = 6 \cdot 10^n + A$$
$$24 \cdot A = 6 \cdot 10^n$$
$$4 \cdot A = 10^n$$

Keressük a legkisebb n és A értéket. $A = 25$ és $n = 2$. A megoldás 625.

1929. Az eredeti szám felírható $10^n + A$ alakban. Az átrendezett szám $10A + 1$. A feltételek szerint:

$$3(10^n + A) = 10A + 1$$
$$3 \cdot 10^n - 1 = 7 \cdot A$$

Vizsgáljuk az egyenlőség bal oldalát, ez 7-tel osztható számot kell hogy adjon. Ezek a számok: 29; 299; 2999; ... Ezek között a legkisebb megfelelő: 299 999. A keresett szám: 142 857.

1930. Legyen a két szám a és b.

$$ab = a + b$$

Az egyenletet átrendezve:

$$ab - a - b + 1 = 1$$
$$(a-1)(b-1) = 1$$

A megoldások $a = 0$ $b = 0$ és $a = 2$ $b = 2$.

1931. Legyen a három szám a, b és c. $(a; b) = 4$ $(a; c) = 6$ $(b; c) = 10$. Végtelen sok megoldás képzelhető el, ezek közül a legkisebb: $a = 4 \cdot 3 = 12$ $b = 4 \cdot 5 = 20$ $c = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$.

1932. Mivel $11\,877 = 3 \cdot 37 \cdot 107$, ezért a legvalószínűbb válasz a kérdésre az, hogy a kapitány 37 éves.