KOSZTOLÁNYI – MIKE

MATEMATIKA ÖSSZEFOGLALÓ FELADATGYŰJTEMÉNY 10 – 14 ÉVESEKNEK MEGOLDÁSOK (II. KÖTET)

Kosztolányi József - Mike János

MATEMATIKA

ÖSSZEFOGLALÓ FELADATGYŰJTEMÉNY 10-14 ÉVESEKNEK

MEGOLDÁSOK

**

imosoft

Mozaik Oktatási Stúdió - Szeged, 1996

SZERZŐK:

Kosztolányi József
középiskolai tanár

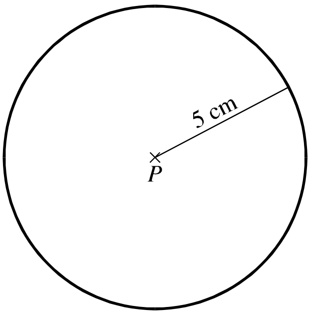
Mike János
középiskolai tanár

ISBN 963 697 102 1

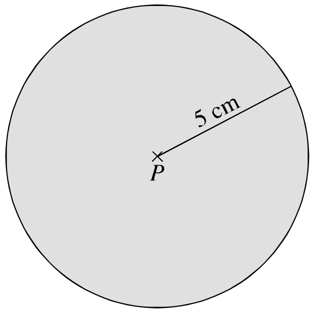
GEOMETRIA

Ponthalmazok

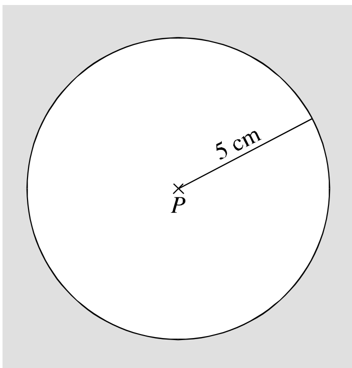
1982. *a)*



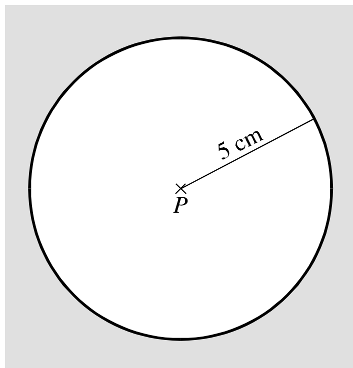
b)



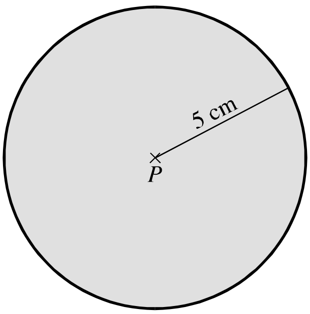
c)



d)



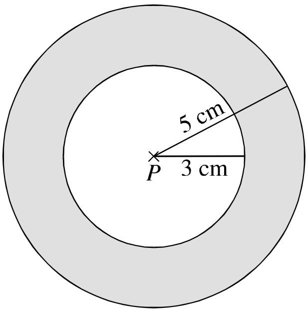
e)



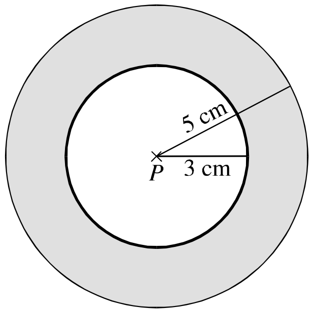
1983. *a)* A *P* ponttól 3 cm távolságra levő pontok halmaza a síkban.
b) A *P* ponttól 3 cm-nél nem nagyobb távolságra levő pontok halmaza a síkban.
c) A *P* ponttól 3 cm-nél kisebb távolságra levő pontok halmaza a síkban.
d) Azon pontok halmaza a síkban, amelyeknek a *P* ponttól mért távolsága *nem* 3 cm.
e) A *P* ponttól 3 cm-nél nagyobb távolságra levő pontok halmaza a síkban.
f) A *P* ponttól 3 cm-nél nem kisebb távolságra levő pontok halmaza a síkban.

1984. *a)* A *P* ponttól 2 cm távolságra levő pontok halmaza a síkban.
b) A *P* ponttól 2 cm-nél nem nagyobb távolságra levő pontok halmaza a síkban.
c) A *P* ponttól 2 cm-nél kisebb távolságra levő pontok halmaza a síkban.
d) A *P* ponttól 2 cm-nél nem kisebb távolságra levő pontok halmaza a síkban.
e) A *P* ponttól 2 cm-nél nagyobb távolságra levő pontok halmaza a síkban.

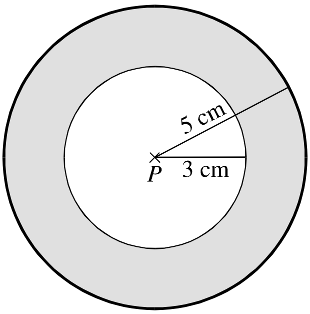
1985. *a)*



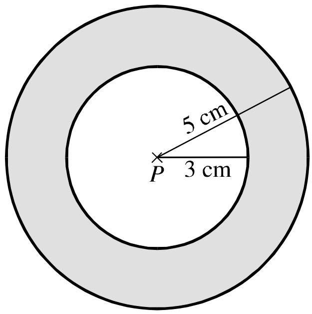
b)



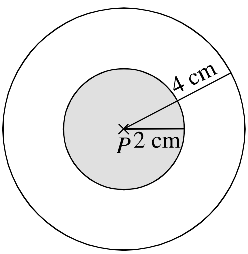
c)



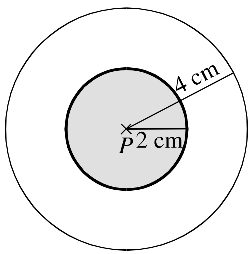
d)



1986. *a)*

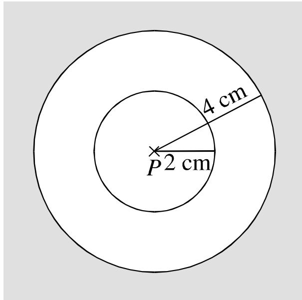


b)



c) Nincs a feltételeknek megfelelő pont.

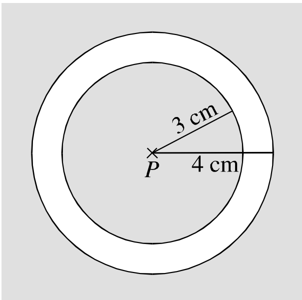
d)



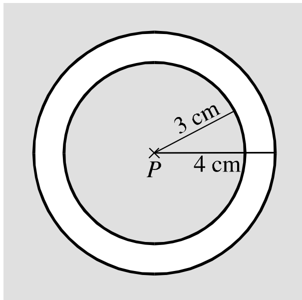
e) Nincs a feltételeknek megfelelő pont.

f) Nincs a feltételeknek megfelelő pont.

1987. *a)*

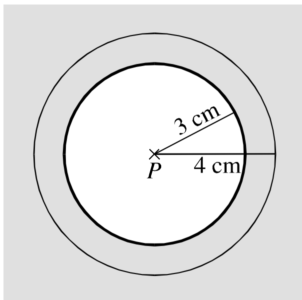


b)



c) A sík minden pontja megfelel a feltételnek.

d)



1988. *a)* Azon pontok halmaza a síkon, amelyek a sík egy adott *P* pontjától 2 cm-nél nem kisebb és 4 cm-nél nem nagyobb távolságra vannak.

b) Azon pontok halmaza a síkon, amelyek a sík egy adott *P* pontjától 2 cm-nél nem kisebb és 4 cm-nél kisebb távolságra vannak.

c) Azon pontok halmaza a síkon, amelyek a sík egy adott *P* pontjától 2 cm-nél nagyobb és 4 cm-nél nem nagyobb távolságra vannak.

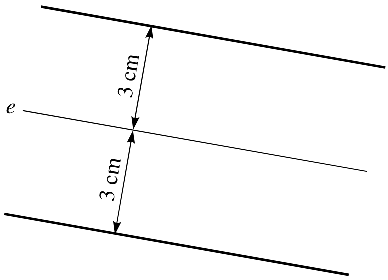
1989. *a)* Azon pontok halmaza a síkon, amelyek a sík egy adott *P* pontjától 3 cm-nél nem nagyobb vagy 6 cm-nél nem kisebb távolságra vannak.

b) Azon pontok halmaza a síkon, amelyek a sík egy adott *P* pontjától 3 cm-nél kisebb vagy 6 cm-nél nem kisebb távolságra vannak.

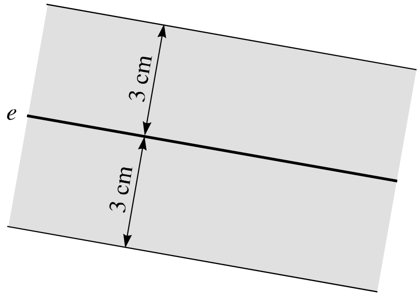
c) Azon pontok halmaza a síkon, amelyek a sík egy adott *P* pontjától 3 cm-nél kisebb vagy 6 cm-nél nagyobb távolságra vannak.

d) Azon pontok halmaza a síkon, amelyek a sík egy adott *P* pontjától 3 cm-nél nem nagyobb vagy 6 cm-nél nagyobb távolságra vannak.

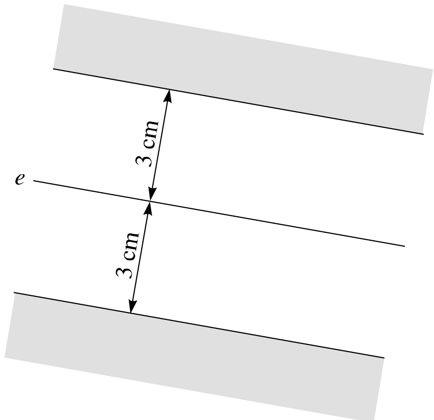
1990. *a)*



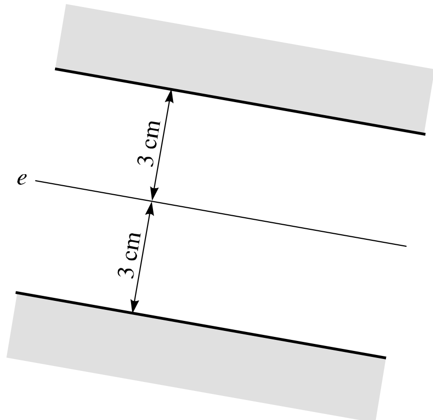
b)



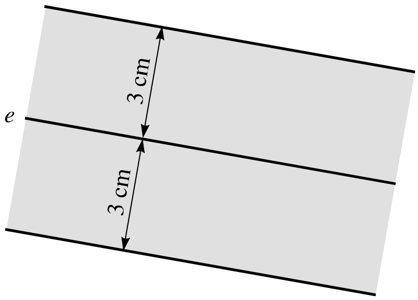
c)



d)



e)



1991. *a)* Azon pontok halmaza a síkban, amelyek a sík egy adott *e* egyenesétől 1 cm-nél nem kisebb távolságra vannak.

b) Azon pontok halmaza a síkban, amelyek a sík egy adott *e* egyenesétől 1 cm-nél nem nagyobb távolságra vannak.

c) Azon pontok halmaza a síkban, amelyek a sík egy adott *e* egyenesétől 1 cm-nél nagyobb távolságra vannak.

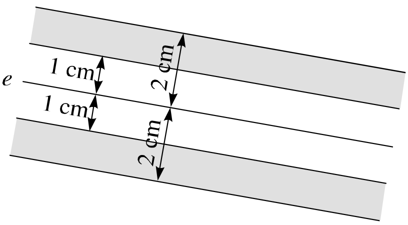
d) Azon pontok halmaza a síkban, amelyek a sík egy adott *e* egyenesétől 1 cm-nél kisebb távolságra vannak.

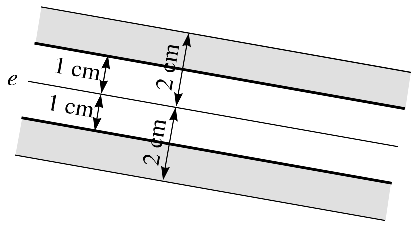
1992. A feladat szövegezése a korábbi kiadásokban sajnos technikai okokból hiányos, ebből adódóan értelmetlen. Helyesen a feladat szövege:

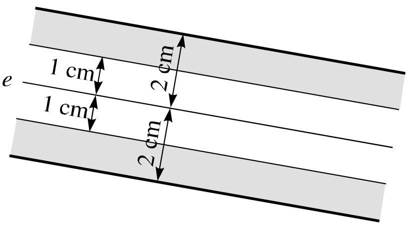
Szerkesszük meg azon pontok halmazát, melyek egy adott *e* egyenestől

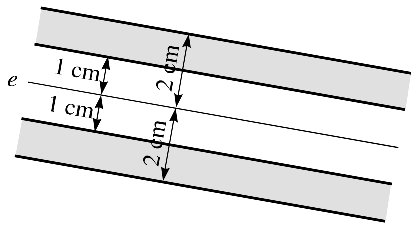
a) 1 cm-nél nagyobb és 2 cm-nél kisebb;

b) 1 cm-nél nem kisebb és 2 cm-nél kisebb;
c) 1 cm-nél nagyobb és 2 cm-nél nem nagyobb;
d) 1 cm-nél nem kisebb és 2 cm-nél nem nagyobb;
e) 1 cm-nél nem nagyobb és 2 cm-nél nem kisebb
távolságra vannak!

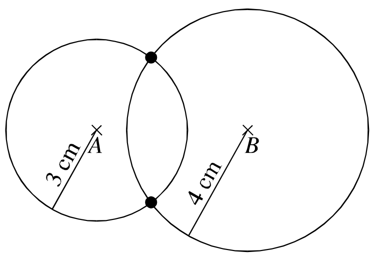
a)


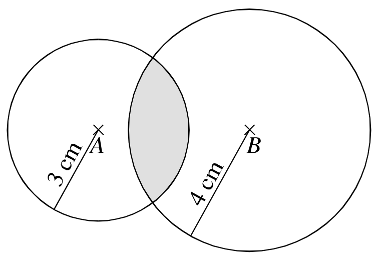
b)


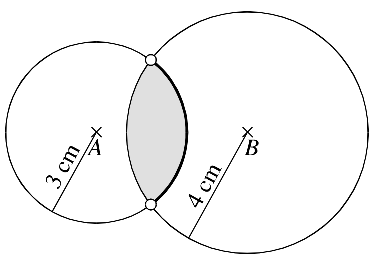
c)


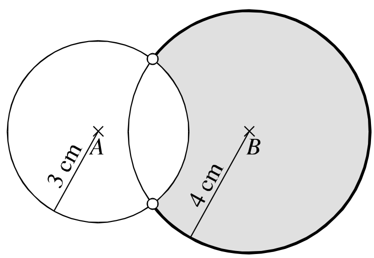
d)


e) Nincs a feltételeknek megfelelő pont.

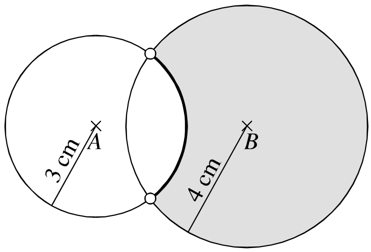
1993. *a)*


b)


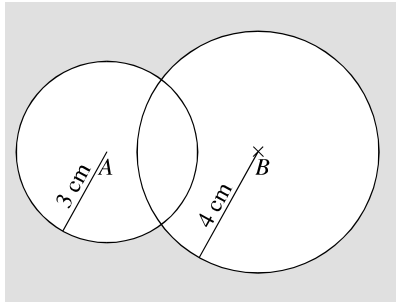
c)


d)


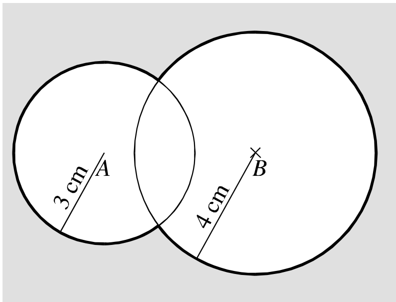
e)



f)



g)



1994. *a)* Az *A* ponttól 2 cm-nél kisebb és a *B* ponttól 3 cm-nél kisebb távolságra levő pontok halmaza a síkban.

b) Az *A* ponttól 2 cm-nél nem nagyobb és a *B* ponttól 3 cm-nél kisebb távolságra levő pontok halmaza a síkban.

c) Az *A* ponttól 2 cm-nél nem kisebb és a *B* ponttól 3 cm-nél kisebb távolságra levő pontok halmaza a síkban.

d) Az *A* ponttól 2 cm-nél nem nagyobb és a *B* ponttól 3 cm-nél nagyobb távolságra levő pontok halmaza a síkban.

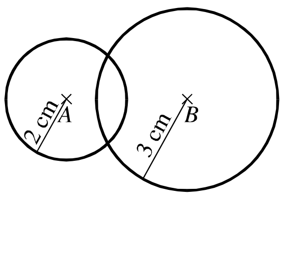
e) Az *A* ponttól 2 cm-nél nem kisebb és a *B* ponttól 3 cm-nél nem nagyobb távolságra levő pontok halmaza a síkban.

f) Az *A* ponttól 2 cm-nél nagyobb és a *B* ponttól 3 cm-nél nagyobb távolságra levő pontok halmaza a síkban.

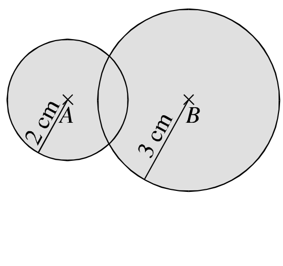
g) Az *A* ponttól 2 cm-nél nagyobb és a *B* ponttól 3 cm-nél nem kisebb távolságra levő pontok halmaza a síkban.

h) Az *A* ponttól 2 cm-nél nem kisebb és a *B* ponttól 3 cm-nél nem kisebb távolságra levő pontok halmaza a síkban.

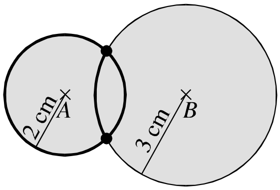
1995. *a)*



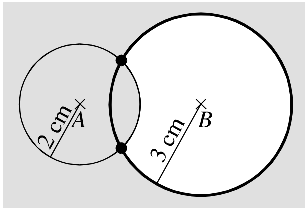
b)



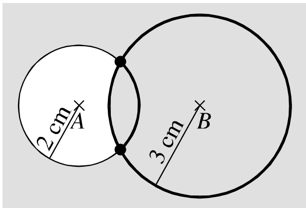
c)



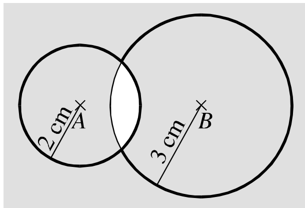
d)



e)



f)



1996. *a)* Az *A* ponttól 3 cm vagy a *B* ponttól 4 cm távolságra levő pontok halmaza a síkban.

b) Az *A* ponttól 3 cm-nél kisebb vagy a *B* ponttól 4 cm-nél kisebb távolságra levő pontok halmaza a síkban.

c) Az *A* ponttól 3 cm-nél nem nagyobb vagy a *B* ponttól 4 cm-nél kisebb távolságra levő pontok halmaza a síkban.

d) Az *A* ponttól 3 cm-nél nem kisebb vagy a *B* ponttól 4 cm-nél nem nagyobb távolságra levő pontok halmaza a síkban.

e) Az *A* ponttól 3 cm-nél nem nagyobb vagy a *B* ponttól 4 cm-nél nagyobb távolságra levő pontok halmaza a síkban.

f) Az *A* ponttól 3 cm-nél nem kisebb vagy a *B* ponttól 4 cm-nél nem nagyobb távolságra levő pontok halmaza a síkban.

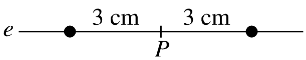
1997. *a)* Az *A* ponttól 4 cm-nél nem nagyobb és a *B* ponttól 5 cm-nél nem nagyobb és a *C* ponttól 3 cm-nél nem nagyobb távolságra levő pontok halmaza a síkban.

b) Az *A* ponttól 4 cm-nél nem nagyobb és a *B* ponttól 5 cm-nél nem nagyobb és a *C* ponttól 3 cm-nél nem kisebb távolságra levő pontok halmaza a síkban.

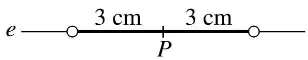
c) Az *A* ponttól 4 cm-nél kisebb és a *B* ponttól 5 cm-nél nem kisebb és a *C* ponttól 3 cm-nél kisebb távolságra levő pontok halmaza a síkban.

d) Az *A* ponttól 4 cm-nél nem kisebb és a *B* ponttól 5 cm-nél nem kisebb és a *C* ponttól 3 cm-nél nem kisebb távolságra levő pontok halmaza a síkban.

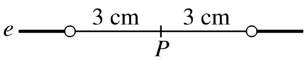
1998. *a)*



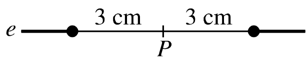
b)



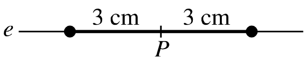
c)



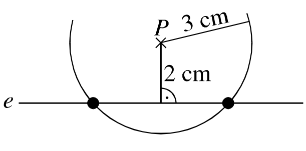
d)



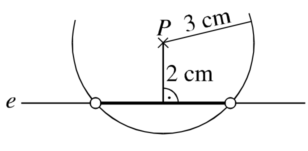
e)



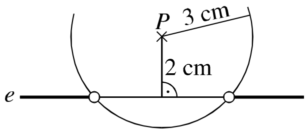
1999. *a)*



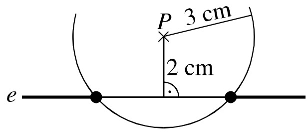
b)



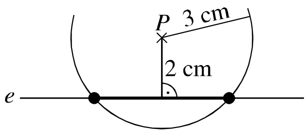
c)



d)



e)



2000. *a)* Az *e* egyenes azon pontjai, amelyek a *P* ponttól 4 cm távolságra vannak.

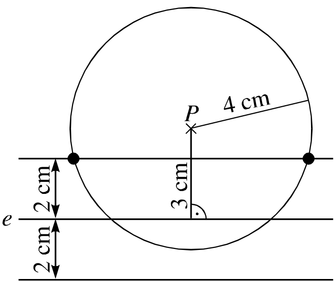
b) Az *e* egyenes azon pontjai, amelyek a *P* ponttól 4 cm-nél kisebb távolságra vannak.

c) Az *e* egyenes azon pontjai, amelyek a *P* ponttól 4 cm-nél nem nagyobb távolságra vannak.

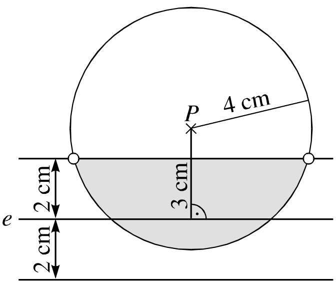
d) Az *e* egyenes azon pontjai, amelyek a *P* ponttól 4 cm-nél nagyobb távolságra vannak.

e) Az *e* egyenes azon pontjai, amelyek a *P* ponttól 4 cm-nél nem kisebb távolságra vannak.

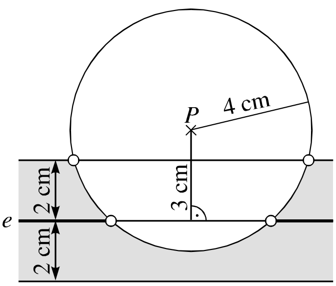
2001. *a)*



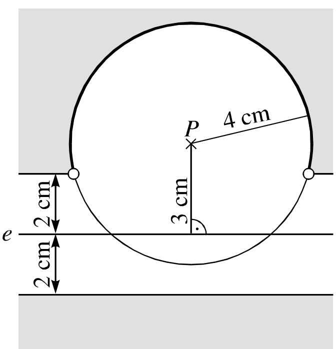
b)



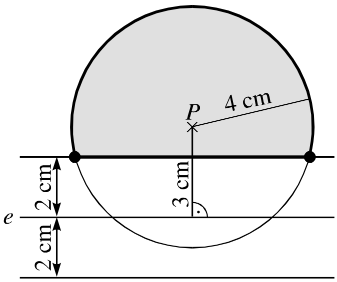
c)



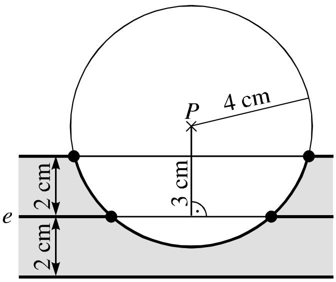
d)



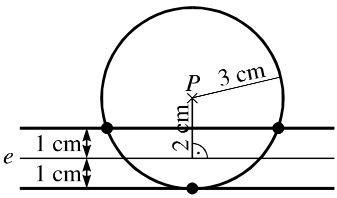
e)



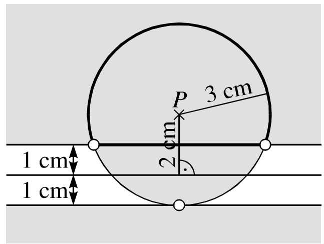
f)



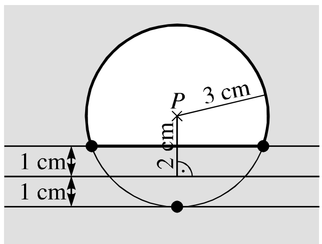
2002. *a)*



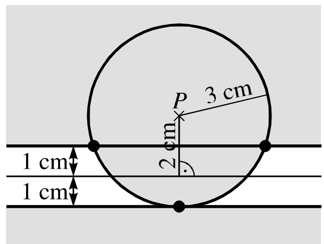
b)



c)



d)



2003. *a)* Azon pontok halmaza a *P* pont és az *e* egyenes síkjában, amelyek a *P* ponttól 4 cm és az *e* egyenestől 2 cm távolságra vannak.

b) Azon pontok halmaza a *P* pont és az *e* egyenes síkjában, amelyek a *P* ponttól legfeljebb 4 cm és az *e* egyenestől legfeljebb 2 cm távolságra vannak.

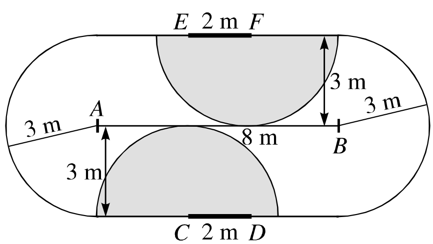
c) Azon pontok halmaza a *P* pont és az *e* egyenes síkjában, amelyek a *P* ponttól legfeljebb 4 cm és az *e* egyenestől 2 cm-nél nagyobb távolságra vannak.

d) Azon pontok halmaza a *P* pont és az *e* egyenes síkjában, amelyek a *P* ponttól 4 cm-nél nagyobb és az *e* egyenestől legfeljebb 2 cm távolságra vannak.

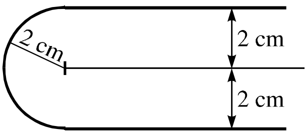
e) Azon pontok halmaza a *P* pont és az *e* egyenes síkjában, amelyek a *P* ponttól legalább 4 cm és az *e* egyenestől legalább 2 cm távolságra vannak.

f) Azon pontok halmaza a *P* pont és az *e* egyenes síkjában, amelyek a *P* ponttól legfeljebb 4 cm vagy az *e* egyenestől legfeljebb 2 cm távolságra vannak.

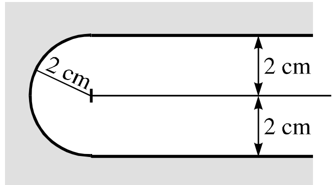
2004. A vastagon húzott *CD* és *EF* szakaszok bármely pontjába tűzhetjük Bobi cölöpjét.



2005. *a)*



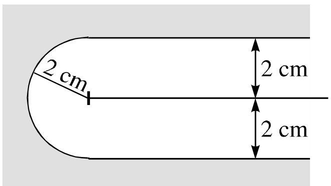
b)



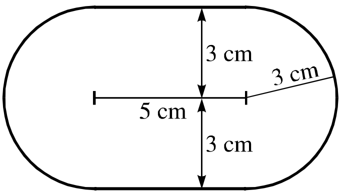
c)

d)

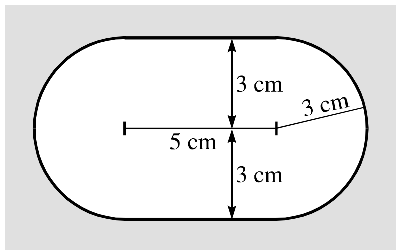
e)



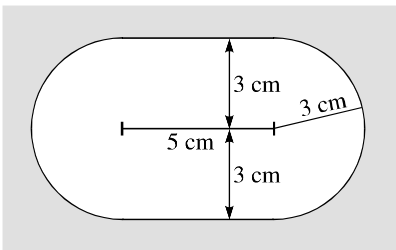
2006. *a)*



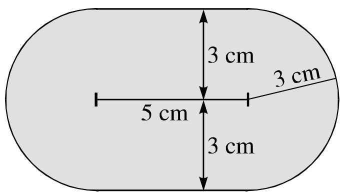
b)



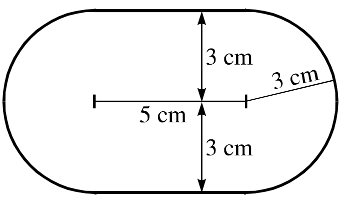
c)



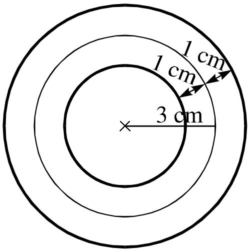
d)



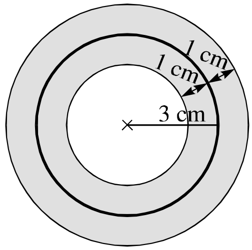
e)



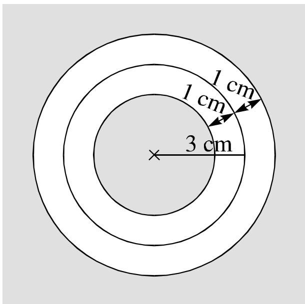
2007. *a)*



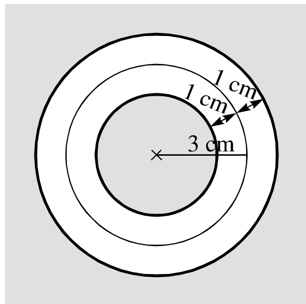
b)



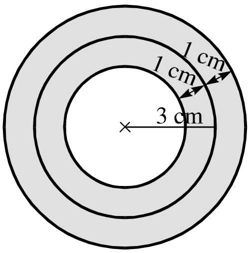
c)



d)

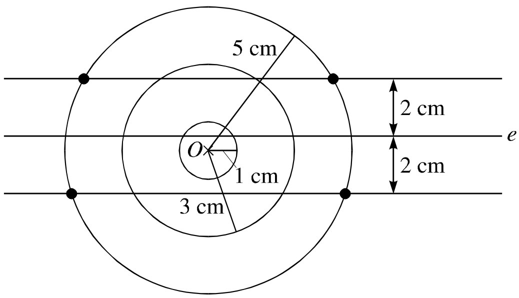


e)

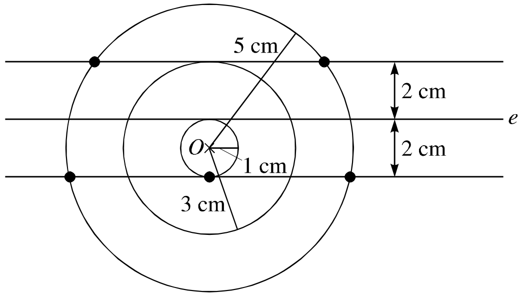


2008. Az *e* egyenes és a kör *O* középpontjának távolságát tekintve 7 esetet különböztetünk meg.

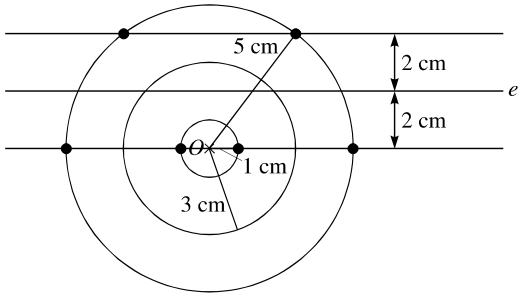
1. Ha *e* és *O* távolsága kisebb 1 cm-nél, akkor 4 megfelelő pont van.



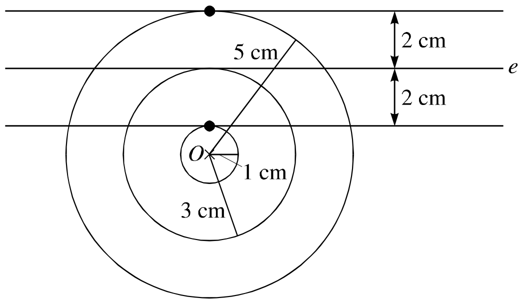
2. Ha *e* és *O* távolsága 1 cm, akkor 5 megfelelő pont van.



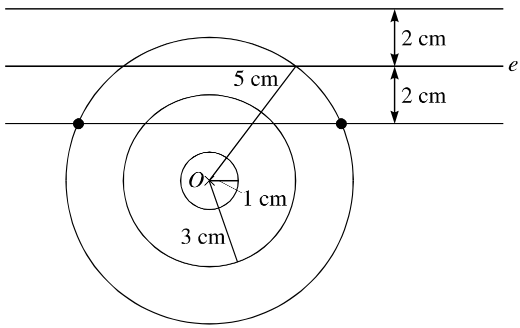
3. Ha *e* és *O* távolsága 1 cm-nél nagyobb, de 3 cm-nél kisebb, akkor 6 megfelelő pont van.



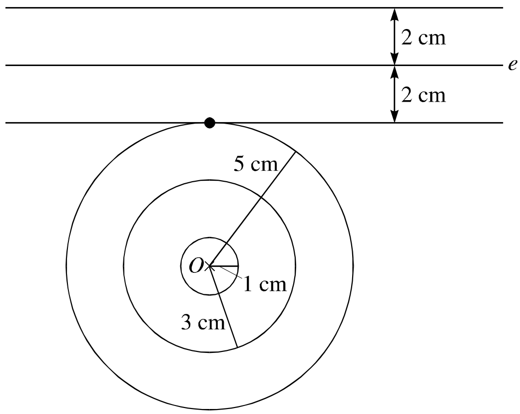
4. Ha *e* és *O* távolsága 3 cm, akkor 2 megfelelő pont van.



5. Ha *e* és *O* távolsága 3 cm-nél nagyobb, de 7 cm-nél kisebb, akkor is 2 megfelelő pont van.

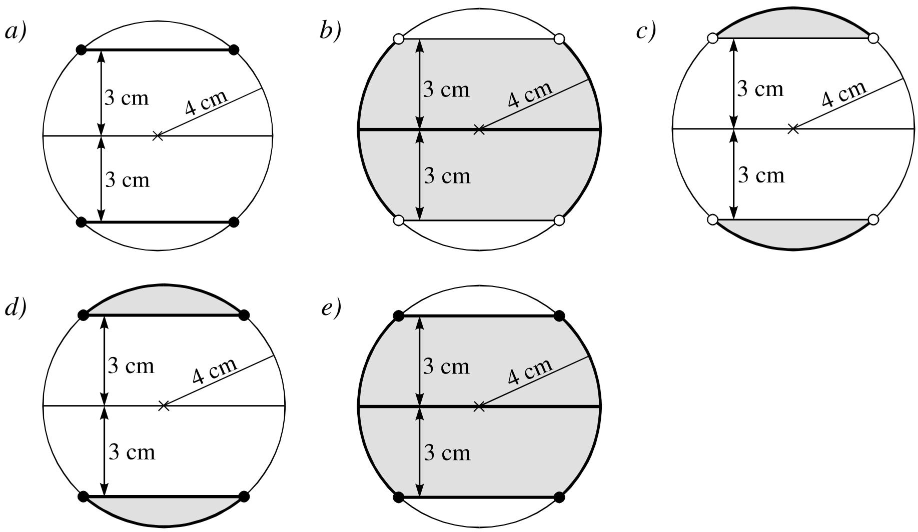


6. Ha e és O távolsága 7 cm, akkor 1 megfelelő pont van.

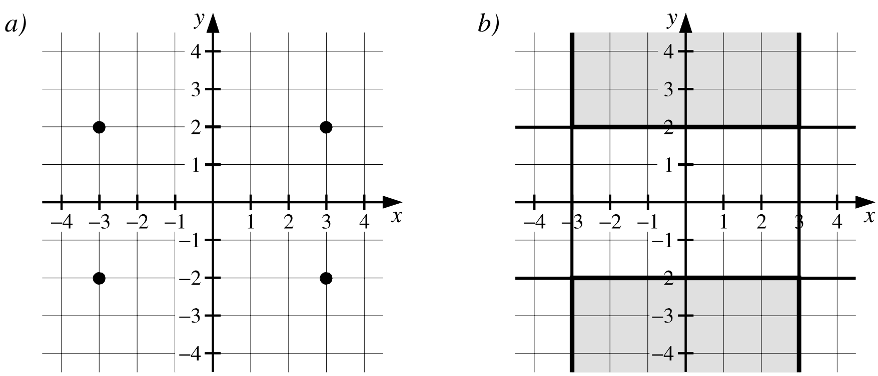


7. Ha e és O távolsága nagyobb 7 cm-nél, akkor nincs megfelelő pont.

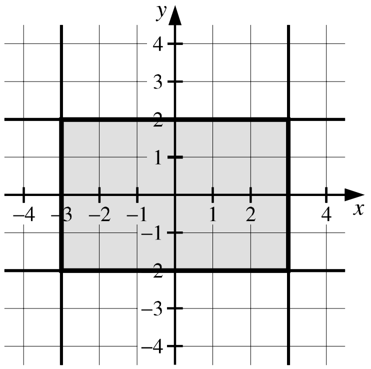
2009. *a)*



2010. *a)*

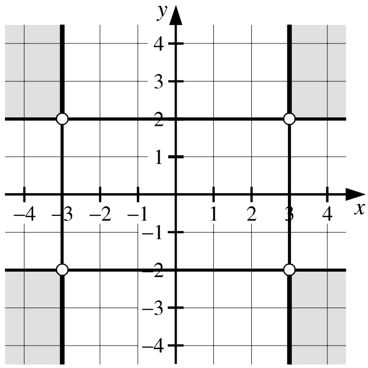


c)



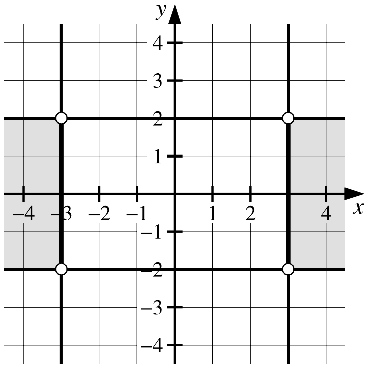
y
x
4
3
2
1
−1
−2
−3
−4

d)



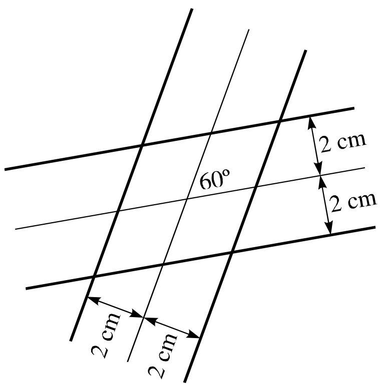
y
x
4
3
2
1
−1
−2
−3
−4

e)



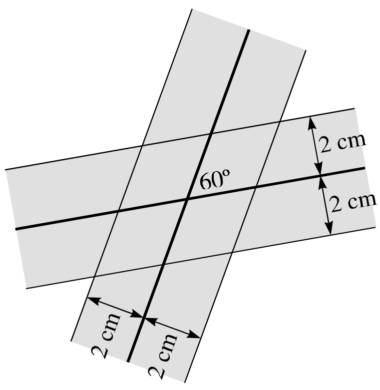
y
x
4
3
2
1
−1
−2
−3
−4

2011. *a)*



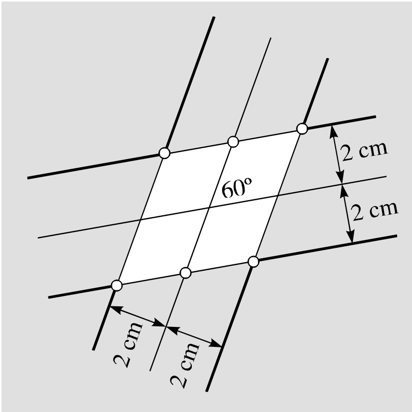
2 cm
2 cm
60º
2 cm
2 cm

b)

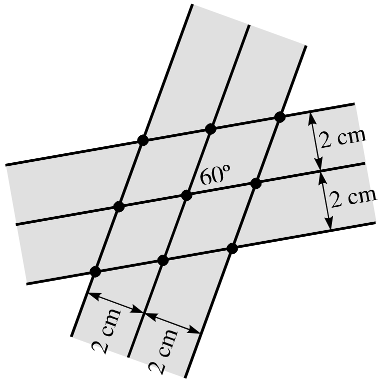


2 cm
2 cm
60º
2 cm
2 cm

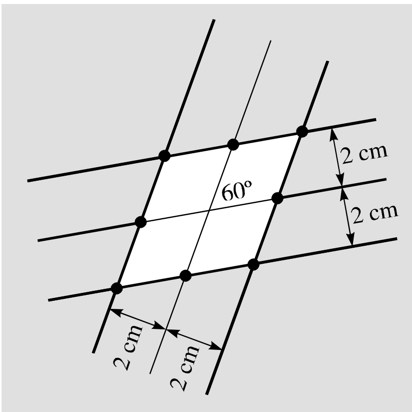
c)


2 cm
2 cm
60º
2 cm
2 cm

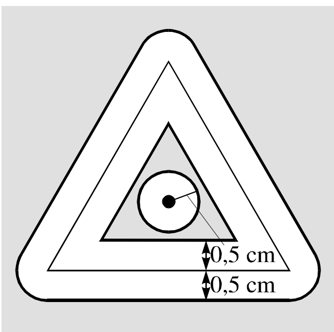
d)


2 cm
2 cm
60º
2 cm
2 cm

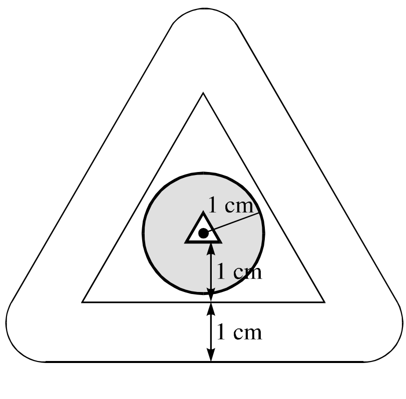
e)


2 cm
2 cm
60º
2 cm
2 cm

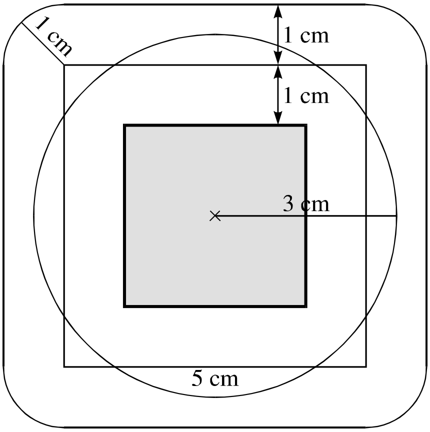
2012. *a)*


0,5 cm
0,5 cm

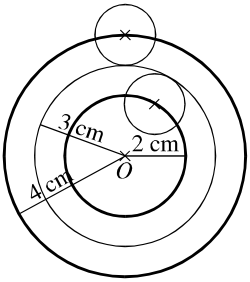
b)


1 cm
1 cm
1 cm

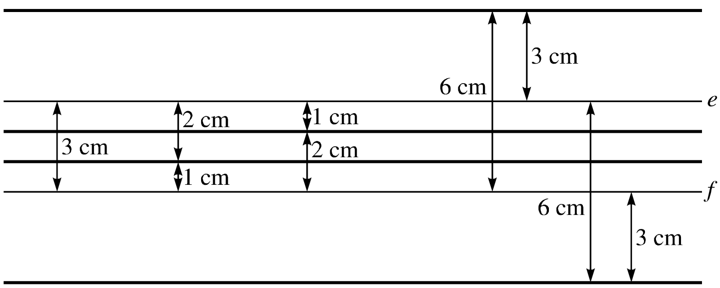
2013.



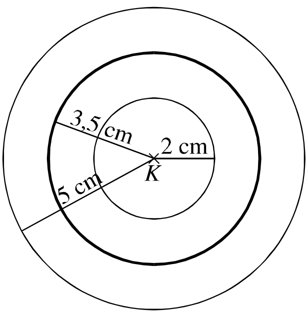
2014.



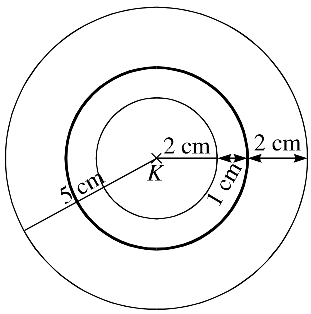
2015.



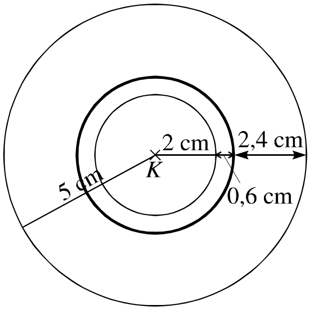
2016. *a)*



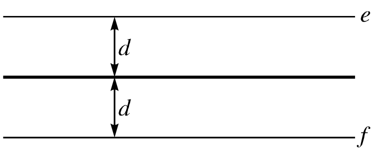
b)



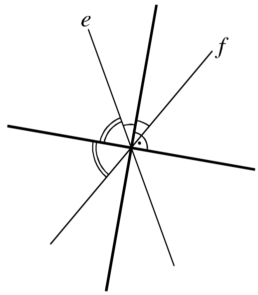
c)



2017. *a)*



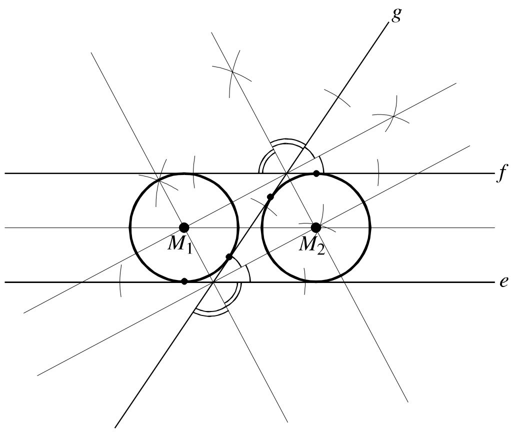
b)



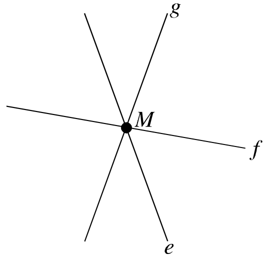
A keresett ponthalmaz egy, az eredeti egyenesekkel párhuzamos egyenes, amely felezi az eredeti egyenesek közötti távolságot.

A keresett ponthalmaz két egymásra merőleges egyenes, amelyek a két adott egyenes által meghatározott szögek felező egyenesei.

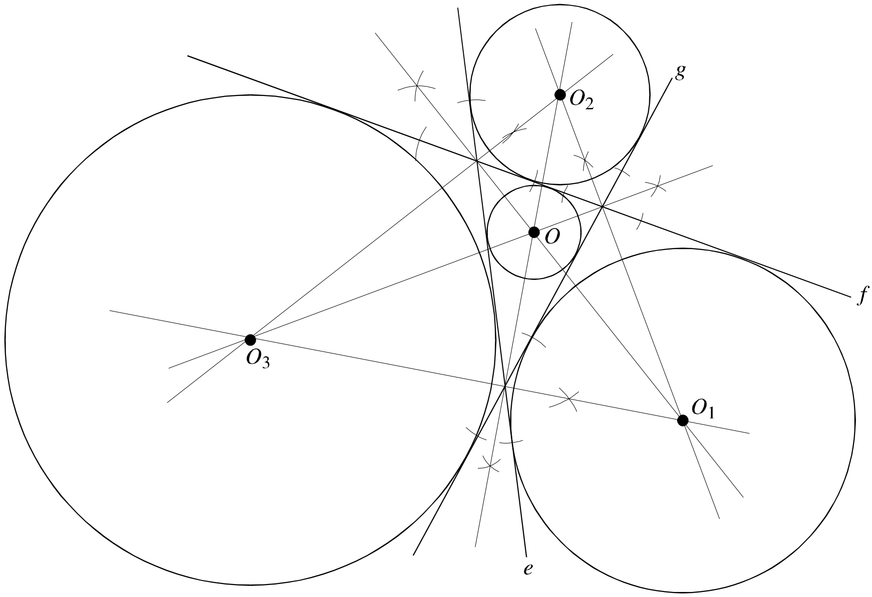
2018. Az előző feladat alapján két olyan pont van az egyenesek síkjában, amelyek kielégítik a feltételt. Ezek a pontok a középpontjai a mindhárom egyenest érintő két körnek.



2019. A kívánt tulajdonsággal csak az egyenesek M metszéspontja rendelkezik.

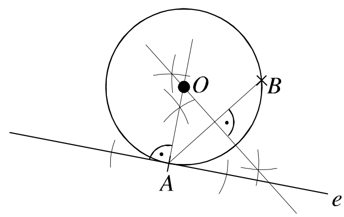


2020. 4 olyan pont van (O; O_1; O_2; O_3), amelyek mindhárom egyenestől egyenlő távolságra vannak. Ezek a pontok a középpontjai annak a 4 körnek, amelyek mindhárom adott egyenest érintik.



2021. A keresett kör középpontja A-tól és B-től egyenlő távolságra van, ezért illeszkedik az AB szakasz felezőmerőlegesére. Másrészt ez a kör A-ban érinti az e egyenest, ezért középpontjának rajta kell lennie az e egyenesre A-ban emelt merőlegesen is. Így a szerkesztés menete:

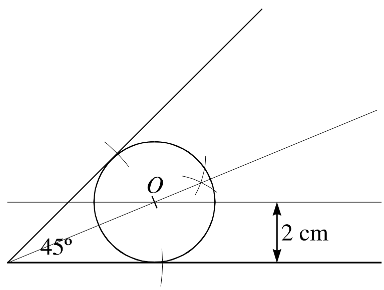
1. AB felezőmerőlegesének szerkesztése.
2. A-ban e-re merőleges szerkesztése.
3. A két egyenes metszéspontja, O a kör középpontja, $OA = OB$ a kör sugara.



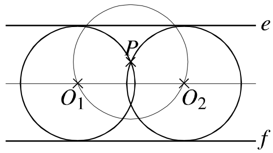
2022. A szerkesztendő kör középpontja illeszkedik a szögfelezőre, és a szögszáraktól 2 cm távolságra levő, a szögszárakkal párhuzamos egyenesekre.

A szerkesztés menete:

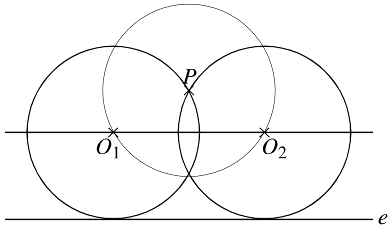
1. Az adott szög szögfelezőjének szerkesztése.
2. Az egyik szögszártól 2 cm-re a szögszárral párhuzamos szerkesztése.
3. A kapott O metszéspont körül 2 cm sugarú kör rajzolása.



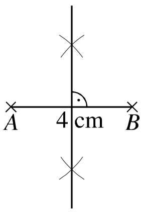
2023. A feladatnak két megoldása van, mindkét kör sugara 2 cm, középpontjaikat pedig a P középpontú 2 cm sugarú kör metszi ki a két egyenes sávfelező egyeneséből.



2024. A szerkesztendő kör(ök) középpontja illeszkedik a P körüli 3 cm sugarú körre és az e egyenessel párhuzamos, tőle 3 cm távolságban a P-t tartalmazó félsíkben fekvő egyenesre. Ha a P pont és az e egyenes távolsága kisebb, mint 6 cm, akkor két megoldása van a feladatnak, ha a távolság 6 cm, akkor 1 megoldása van, ha pedig 6 cm-nél nagyobb, akkor nincs megoldása.

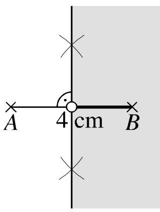


2025. *a)*



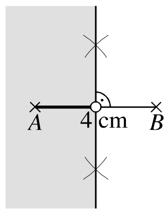
Az AB szakasz felezőmerőlegese.

b)



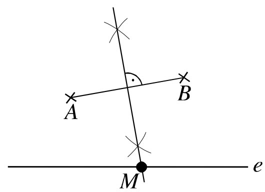
AB felezőmerőlegese által meghatározott, B-t tartalmazó nyílt félsík.

c)



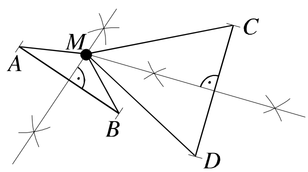
AB felezőmerőlegese által meghatározott, A-t tartalmazó nyílt félsík.

2026. A keresett pontot az AB szakasz felezőmerőlegese metszi ki e-ből. Nem kapunk megoldást, ha az AB egyenes merőleges az e egyenesre.



2027. A keresett pont a 2026. feladat módszerével kapható meg. Ha az AB egyenes merőleges e-re és e nem felezőmerőlegese az AB szakasznak, akkor nincs megoldás, ha e felezőmerőlegese AB-nek, akkor e minden pontja megoldás.

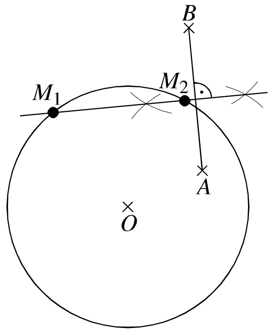
2028. A keresett háromszögek alapokkal szemközti csúcsát az AB és CD szakaszok felezőmerőlegeseinek metszéspontja szolgáltatja. Nincs megoldás, ha az AB és a CD egyenesek párhuzamosak (egybe is eshetnek) és felezőmerőlegeseik nem esnek egybe. Ha a két szakasz felezőmerőlegese egybeesik, akkor a közös felezőmerőleges minden pontja megfelelő, kivéve a szakaszok felezőpontjait. Más esetben egyértelmű megoldása van a feladatnak.



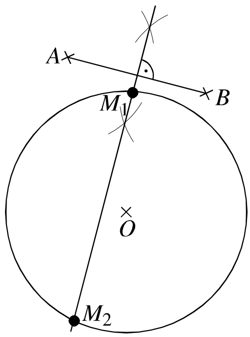
2029. A keresett pontokat az adott átmérőre merőleges átmérő metszi ki a körből.

2030. A keresett pontokat a húr felezőmerőlegese metszi ki a körből.

2031. A keresett pontokat az AB szakasz felezőmerőlegese metszi ki a körből.
Ha az AB egyenes illeszkedik a kör középpontjára, akkor két megoldás van, ha az AB szakasz felezőpontja a kör belsejében van; egy megoldás, ha a felezőpont a kör pontja; nincs megoldás, ha a felezőpont a körön kívül van.
Ha az AB egyenes nem illeszkedik a kör középpontjára, akkor is a fent leírt esetek valósulhatnak meg attól függően, hogy AB felezőmerőlegese metszi a kört, érinti a kört vagy nincs közös pontja a körrel.



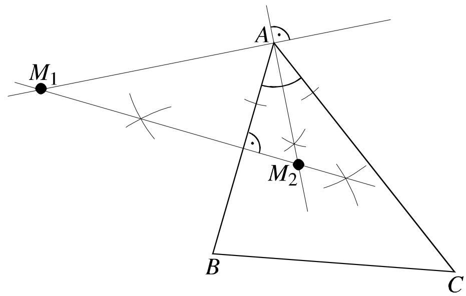
2032. A keresett pontokat a 2031. feladat módszerével kaphatjuk meg. Attól függően, hogy az AB szakasz felezőmerőlegesének hány közös pontja van a körrel, lehet 0, 1, 2 megoldás. Például, ha az AB egyenes illeszkedik a kör középpontjára, akkor nincs megoldás.



2033. Az AB és az AC oldalegyenesektől egyenlő távolságra levő pontok halmaza a 2017. feladat *b)* pontjában leírt egymásra merőleges egyenespár.

a) Az AB oldal felezőmerőlegesének az előbb említett szögfelező egyenesekkel alkotott metszéspontjai adják a megoldást. A feltételeknek 2 pont tesz eleget.

b) Most a keresett pontok a BC oldal felezőmerőlegesének és a szögfelező egyeneseknek a közös pontjai lesznek. A BC felezőmerőlegese akkor és csak akkor illeszkedik az A csúcsra, ha az ABC háromszög egyenlő szárú ($AB = AC$). Ekkor BC felezőmerőlegesének pontjai alkotják a keresett ponthalmazt. Ha $AB \neq AC$, akkor ebben az esetben is 2 pont lesz a



megoldás.

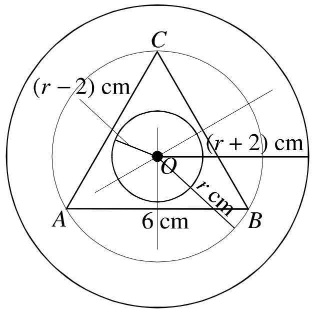
2034. A keresett háromszögek alappal szemközti csúcsait az AC átló felezőmerőlegese metszi ki a téglalap kerületéből. Két egybevágó háromszöget kapunk.

2035. A keresett kör középpontja a pontok által meghatározott szakaszok felezőmerőlegeseinek közös pontja. A kapott kör a három pont által meghatározott háromszög köréírt köre.

2036. Az előző feladatban kapott kör bármely, az adott három ponttól különböző pontja megfelel.

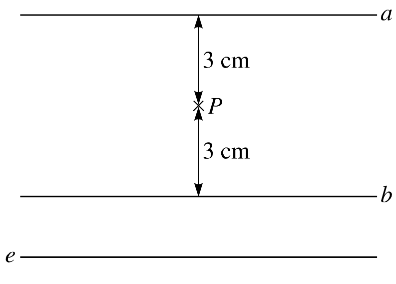
2037. Kiválasztva egy kör hét pontját, azok a kör középpontjától egyenlő távolságra vannak.

2038. A feladat megoldása két kör lesz, melyek középpontja a háromszög köré írható kör középpontja (az oldalfelező merőlegesek metszéspontja), a sugarak pedik $(r + 2)$ cm, illetve $(r - 2)$ cm, ahol r a köré írható kör sugara centiméterben kifejezve.



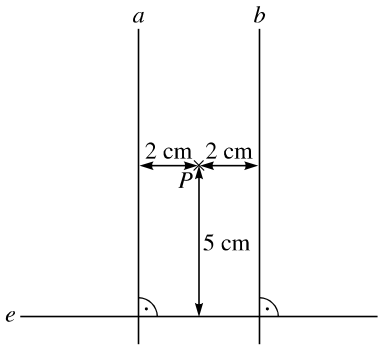
2039. Az előző feladat megoldásához hasonlóan kapható meg a két kör.

2040. *a)*



Két megfelelő egyenest kapunk (a; b).

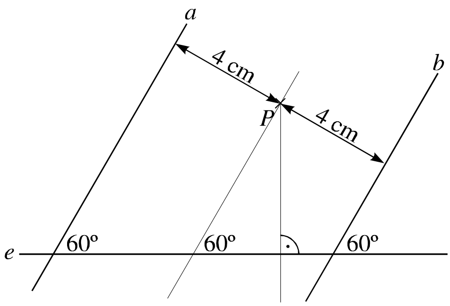
b)



c) Előbb szerkesszünk egy P-re illeszkedő, e-vel 60°-os szöget bezáró egyenest, majd szerkesszünk ezzel az egyenessel párhuzamos egyeneseket P-től 4 cm távolságban! Ebben az esetben is két egyenes a megoldás.

Megjegyzés: P-re illeszkedő, e-vel 60°-os szöget bezáró egyenes például a következő módon szerkeszthető:

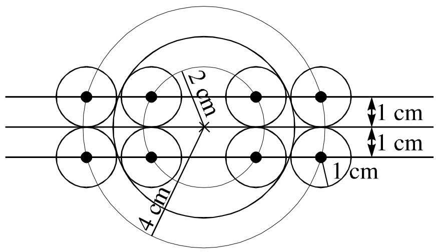
1. P-ből merőlegest állítunk e-re.
2. P-ben a merőlegesre 30°-os szöget szerkesztünk.



2041. A keresett körök középpontjait az adott kör középpontja körüli 2 cm, illetve 6 cm sugarú körök és az adott egyenessel párhuzamos, tőle 2 cm távolságban levő egyenesek metszéspontjai adják. A megoldásoknak az adott kör és az adott egyenes kölcsönös helyzetétől függő vizsgálata lényegében megegyezik a 2008. feladat kapcsán leírtakkal.

2042. A keresett körök középpontjai az átmérő egyenesétől n cm ($n = 1; 2; 3; 4$) távolságra levő párhuzamos egyenesek és az eredeti körrel koncentrikus $(n + 3)$ cm és $(3 - n)$ cm sugarú körök metszéspontjaiként, illetve érintési pontjaiként adódnak. ($n = 3$ és $n = 4$ esetben csak egy, az eredetivel koncentrikus kört tudunk felvenni.)

a) 8 megfelelő kört kapunk.

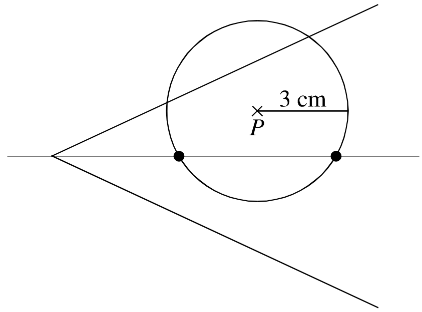


b-d) 4 megfelelő kört kapunk, az eredeti kör belsejében nem jönnek létre metszéspontok.

2043. A megoldás az előző feladathoz hasonlóan történik. Az *a)* esetben 7, a *b)* esetben 5, a *c)* és *d)* esetben 4 megfelelő kör van.

2044. A keresett pontokat az adott szög szögfelező egyenese metszi ki a P középpontú, 3 cm sugarú körből. 2, 1 illetve 0 megfelelő pontot kapunk attól függően, hogy P távolsága a szögfelezőtől kisebb, mint 3 cm; 3 cm; illetve nagyobb, mint 3 cm. (Ha a távolság 3 cm, akkor az érintési pont a megoldás.)

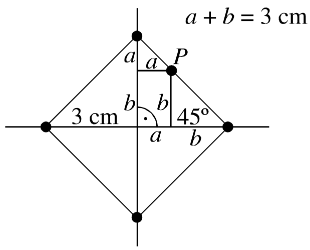
Megjegyzés: Előállhat olyan eset is, hogy az egyik keresett pont a szög csúcsában, vagy a szögtartományon kívül van.



2045. A keresett pontot az AB szakasz felezőmerőlegese metszi ki az adott szög szögfelező egyeneséből. Nem kapunk megoldást, ha az AB egyenes merőleges a szögfelezőre és az AB szakasz felezőpontja nincs rajta a szögfelezőn. Ha AB felezőmerőlegese és a szögfelező egyenese egybeesik, akkor ennek az egyenesnek minden pontja eleget tesz a feladat feltételeinek.

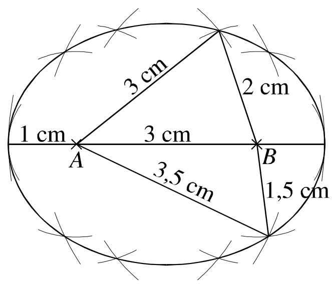
2046. A keresett pontokat az adott körrel koncentrikus $(1 + x)$ cm, illetve az *a)* esetben az $(1 - x)$ cm ($x = 0{,}5$; 1; 2) sugarú körök metszik ki az adott szög szögfelező egyeneséből. Attól függően, hogy hány metszéspont jön létre, az *a)* esetben a megoldások száma lehet 0, 1, 2, 3, 4, a *b)* és a *c)* esetben 0, 1, 2. (Ha páratlan számú pontot kapunk, akkor az egyik pont érintési pont.)

2047. Az adott feltétellel egy olyan négyzet kerületének pontjai rendelkeznek, amelynek 6 cm hosszú átlói illeszkednek az adott egyenesekre. Az ábráról leolvasható, hogy a négyzet oldalának bármely P pontja rendelkezik a feladatban megkövetelt tulajdonsággal.

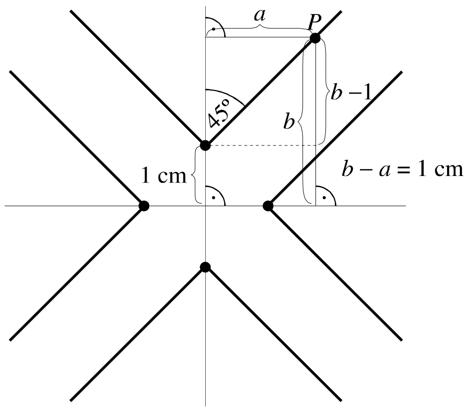


2048. A feladat feltételének megfelelő ponthalmaz egy ellipszis. (*Ellipszis:* A sík azon pontjainak halmaza, amelyeknek két adott ponttól mért távolságösszege állandó, és ez az állandó nagyobb a két adott pont távolságánál. A két adott pont az ellipszis fókuszpontja.)

Körzővel és vonalzóval az ellipszisnek csak véges sok pontja szerkeszthető meg.

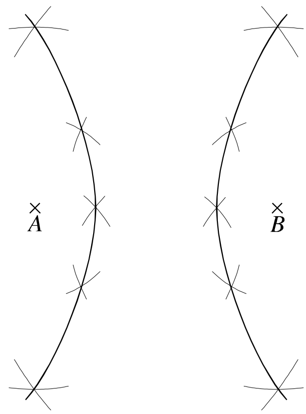


2049. A feladat feltételének az ábrán látható ponthalmaz felel meg, amely 8 félegyenesből áll, amelyek kezdőpontjai az adott egyeneseken vannak, metszéspontjuktól 1 cm távolságra. Az ábráról leolvasható az is, hogy a tekintett félegyenesek minden pontja rendelkezik a kívánt tulajdonsággal. (Lásd még a 2107. feladat *j)* pontját!)

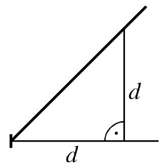


2050. A feladat feltételének megfelelő ponthalmaz egy hiperbola. (*Hiperbola:* A sík azon pontjainak halmaza, amelyek két adott ponttól mért távolságkülönbségének abszolútértéke állandó, és ez az állandó olyan pozitív szám, amely kisebb a két adott pont távolságánál. A két adott pont a hiperbola fókuszpontja.)

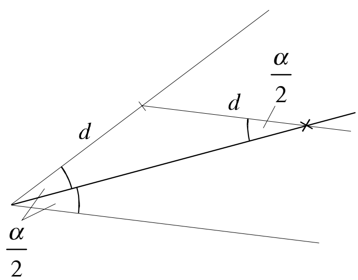
Körzővel és vonalzóval a hiperbolának csak véges sok pontja szerkeszthető meg.



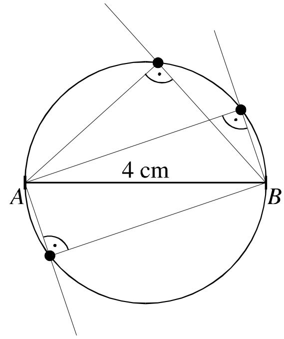
2051. A feltételt kielégítő ponthalmaz az adott félegyenessel közös kezdőpontú, vele 45°-os szöget bezáró félegyenes.



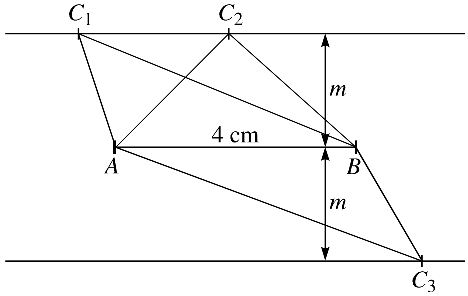
2052. A feltételt kielégítő ponthalmaz az adott szög szögfelezője.



2053. Thalész tételének megfordításából adódóan a merőlegesek talppontjai által meghatározott ponthalmaz az AB átmérőjű körvonal.

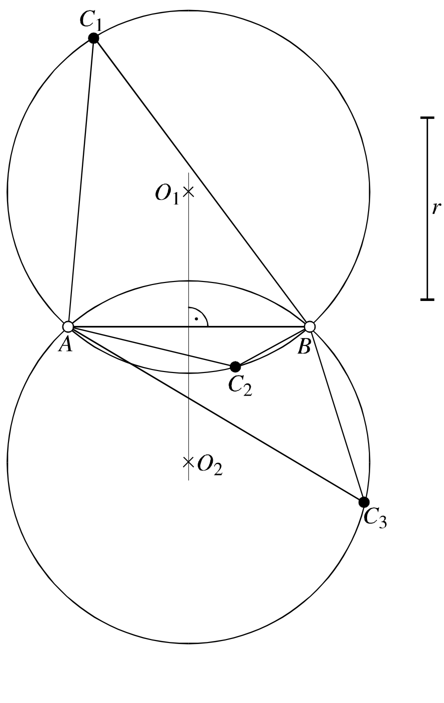


2054. Az ABC háromszögek C csúcsai az AB egyenessel párhuzamos, tőle az adott magasság hosszával megegyező távolságban található egyeneseken helyezkednek el. Ezen egyenesek bármely pontja megfelel a feltételnek.



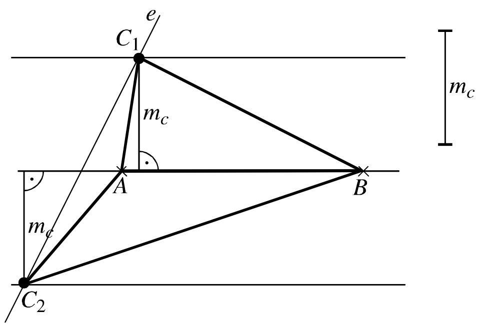
2055. Az ABC háromszögek C csúcsai két, az AB egyenesére szimmetrikus, adott sugarú körön helyezkednek el, amely körök közös húrja AB. Az A és a B pontok kivételével a két kör minden egyes pontja kielégíti a feladat feltételét.

A körök középpontjai az A (vagy B) középpontú, az adott sugárral megegyező sugarú kör metszi ki az AB szakasz felezőmerőlegeséből. A tekintett körök szerkeszthetőségének feltétele, hogy az adott r sugárra teljesüljön az $r > \frac{AB}{2}$ egyenlőtlenség.



2056. Jelölje az adott két csúcsot A és B, az adott magasságot m_c, az adott egyenest e.

A C csúcsok az AB egyenessel párhuzamos, tőle m_c távolságban levő egyenesek e-vel vett metszéspontjaiban lesznek. Ha e nem párhuzamos az AB egyenessel, akkor két megfelelő háromszöget kapunk. Ha e párhuzamos az AB egyenessel és attól vett távolsága m_c-től különbözik, akkor nincs megoldás, ha a távolság éppen m_c, akkor e minden pontja megfelel C csúcsnak.



2057. Jelölje c az adott oldalegyenest, m_c az adott magasságot, a és b pedig az adott oldalakat.

A C csúcs szerkesztése az előző feladat módszerével történik, szerkeszthetőségének feltételei is azonosak. Az A és a B csúcsot a c egyenesből a C középpontú, b, illetve a sugarú körívek metszik ki. A szerkeszthetőséghez szükséges még, hogy $a \geqq m_c$ és $b \geqq m_c$ teljesüljön, és legalább az egyik egyenlőtlenség éles legyen.

2058. A szerkesztés menete:

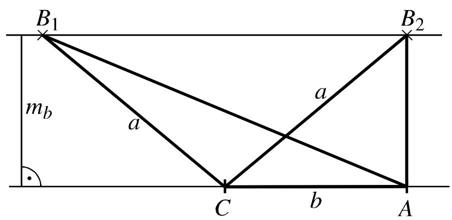
1. Az a oldal felvétele.
2. a egyik végpontjába 45°-os szög szerkesztése.
3. a-tól m_a távolságban a-val párhuzamos szerkesztése a 45°-os szöget tartalmazó félsíkban.
4. A párhuzamos egyenes és a szögszár metszéspontjaként adódik a háromszög harmadik csúcsa.

A megoldás egybevágóság erejéig egyértelmű.

2059. A szerkesztés menete:

1. A b oldal felvétele.
2. b egyenesével, tőle m_b távolságban párhuzamos szerkesztése.
3. b egyik végpontjából egy a sugarú körívvel a harmadik csúcs kimetszése a párhuzamos egyenesből.

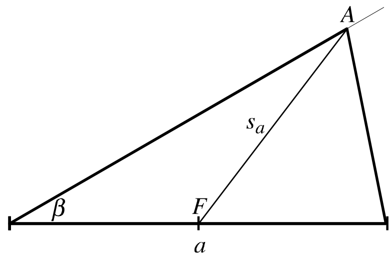
A feladatnak az egybevágó esetektől eltekintve két megoldása van.



2060. A szerkesztés menete:

1. Az a oldal felvétele.
2. a egyik végpontjába 30°-os szög szerkesztése.
3. Az a oldal felezőpontjából s_a sugarú körívvel a harmadik csúcs kimetszése a szerkesztett szögszárból.

A megoldás egybevágóság erejéig egyértelmű.



2061. A szerkesztés menete:

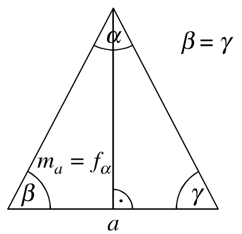
1. Az a oldal felvétele.
2. Az a oldal egyenesével, tőle m_a távolságban párhuzamos szerkesztése.
3. Az a oldal felezőpontjából s_a sugarú körívvel a harmadik csúcs kimetszése a párhuzamos egyenesből.

A megoldás egybevágóság erejéig egyértelmű.

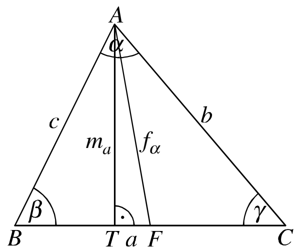
2062. Jelölje az adott magasságot m_a, az adott szögfelezőt f_α. A szerkeszthetőséghez szükséges, hogy $f_\alpha \geqq m_a$ legyen.

Ha $m_a = f_\alpha$, akkor a háromszög egyenlő szárú, és ekkor akár α (0° < α < 180°), akár β (0° < β < 90°) adott, a megoldás egyértelmű. (2062/1. ábra)

Tegyük fel a továbbiakban, hogy $f_\alpha > m_a$, és bontsuk három részre a feladatot aszerint, hogy melyik szög adott (2062/2. ábra).



2062/1. ábra



2062/2. ábra

I. α adott (0° < α < 180°)

Ekkor az ATF derékszögű háromszög Thalész tételének felhasználásával szerkeszthető, amelynek TF oldala kijelöli az a oldal egyenesét.

A szerkesztés menete:

1. f_α mint átmérő fölé Thalész-kör szerkesztése.
2. A-ból m_a sugárral a T pont kimetszése a Thalész-körből.
3. f_α mindkét oldalára A-ból $\dfrac{\alpha}{2}$ nagyságú szög szerkesztése.
4. A TF egyenesből a szerkesztett szögszárak kimetszik a B és a C csúcsot.

A megoldás egybevágóság erejéig egyértelmű.

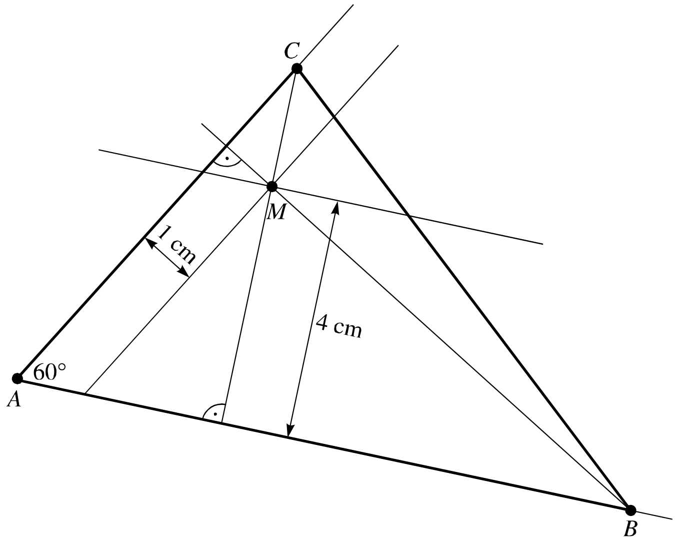
II. β adott ($0° < \beta < 90°$)
Itt is az ATF derékszögű háromszögből kiindulva, β ismeretében az ABF háromszög szerkeszthető.
A szerkesztés menete:
1. Az ATF derékszögű háromszög szerkesztése (hasonlóan az I. esethez).
2. m_a f_α-val átellenes oldalára A-ból $90° - \beta$ nagyságú szög szerkesztése.
3. A szerkesztett szögszár a TF egyenesből kimetszi a B' csúcsot.
4. B tükrözése f_α egyenesére, a kapott pont B!
5. Az AB' egyenes és a TF egyenes metszéspontja C.

A megoldás itt is egyértelmű.
Megjegyzés: β lehet tompaszög is, viszont ebben az esetben csak akkor kapunk megoldást, ha az m_a f_α-val azonos oldalára A-ból szerkesztett $\beta - 90°$ nagyságú szög szára m_a és f_α közé esik.

III. γ adott ($0° < \beta < 90°$)
Az ATF háromszög megszerkesztése után a TF egyenes valamely pontjába szerkesztett γ szög másik szárát úgy kell eltolni, hogy a TF egyenessel párhuzamos, A-ra illeszkedő egyenest A-ban messe.
A szerkesztés menete:
1. Az ATF háromszög szerkesztése.
2. A γ szög szerkesztése a TF egyenesre, annak valamely pontjában az A pontot tartalmazó félsíkban.
3. A-n keresztül párhuzamos szerkesztése a TF egyenessel.
4. A γ szög szárának és a szerkesztett párhuzamosnak a metszéspontja A'.
5. A γ szög eltolása az $\overrightarrow{A'A}$-ral, így kapjuk a C csúcsot.
6. C tükrözése f_α egyenesére, így kapjuk a C' csúcsot.
7. Az AC' és a TF egyenes metszéspontja a B csúcs.

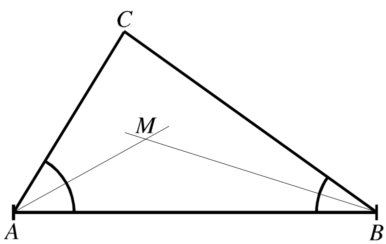
A megoldás egyértelmű.
Megjegyzés: Ha az adatok a 2062/2. ábrának megfelelőek, akkor $\gamma < \beta$, és így γ biztosan hegyesszög.

2063. A szögtartományban a magasságpont a szögszáraktól adott távolságban levő, a szögszárakkal párhuzamos egyenesek metszéspontjaként áll elő. A magasságpontból a szögszárakra szerkesztett merőleges egyenesek a másik szögszárból kimetszik a háromszög hiányzó két csúcsát.
A feladat megoldása egybevágóság erejéig egyértelmű.

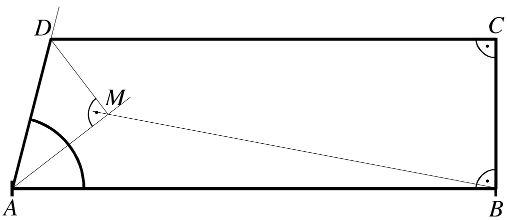


2064. A feladat szövege alapján a P pont a szögtartományon kívül van. Ekkor viszont a $PA = PB$ feltételnek csak a szög csúcsa felel meg ($A = B$).
Megjegyzés: Ha a feladat szövegéből kivesszük a „közelebbi” szót, akkor P a szögtartományba is eshet, és ekkor van olyan megfelelő A és B pont, hogy P felezi az AB szakaszt. (Lásd a 2634. feladatot!)

2065. Ha M jelöli a háromszög belső szögfelezőinek metszéspontját, akkor az ABM háromszög szerkeszthető. Ezután az MAB és MBA szögek megkétszerezésével kapjuk az AC és BC oldalakat.



2066. Ha M jelöli az A és a D csúcsból induló belső szögfelezők metszéspontját, akkor az ABM háromszög szerkeszthető. Az AMD szög derékszög, mivel a trapéz szárakon fekvő szögeinek öszszege 180°, ezért a D csúcs az AM-re M-ben állított merőleges és az MAB szög megkétszerezésével kapott félegyenes metszéspontjaként adódik. C megszerkesztéséhez használjuk ki, hogy a trapéz derékszögű.



2067. A magasság egyik végpontjába merőlegest, a másik végpontjába 30°-os szöget kell szerkesztenünk.

2068. Az adott csúcsból állítsunk merőlegest az adott egyenesre. Ezzel megkaptuk a háromszög magasságát, ahonnan az előző feladat alapján szerkeszthető a háromszög.

2069. Mivel az adott pont a háromszög súlypontja is egyben, ezért az adott pontból az adott egyenesre szerkesztett merőlegesen a pont és az egyenes távolságát a ponton túl kétszer felmérve megkapjuk a háromszög magasságát. Innen a háromszög a 2067. feladat módszerével szerkeszthető.

2070. I. Ha mindkét adott pont az egyenesen van, akkor a háromszög szára adott, így a feladatnak végtelen sok megoldása van.

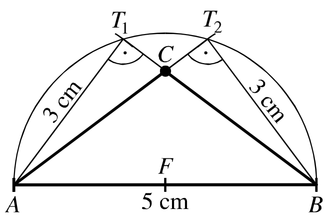
II. Ha az egyik pont az egyenesen van, a másik rajta kívül, akkor két eset lehetséges.

1. Az egyenesen levő pont a szárak metszéspontja. Ekkor a két adott pont távolságát az egyenesen levő pontból mindkét irányba felmérve az egyenesre, két megfelelő háromszöget kapunk. Ezek pontosan akkor egybevágók, ha a két adott pontra illeszkedő egyenes merőleges az adott száregyenesre.
2. Ha az egyenesen levő pont az alap egyik végpontja, akkor a két adott pont által meghatározott szakasz felezőmerőlegese metszi ki az adott egyenesből a harmadik csúcsot. Ha ez a felezőmerőleges párhuzamos az adott egyenessel, akkor nincs megoldás.

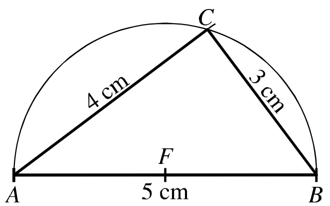
2071. Az alap mindkét végpontjába 75°-os szöget szerkesztve a kapott szögszárak metszéspontja adja a harmadik csúcsot.

2072. Az alap felezőmerőlegesén a felezőpontból 2 cm-t felmérve adódik a harmadik csúcs.

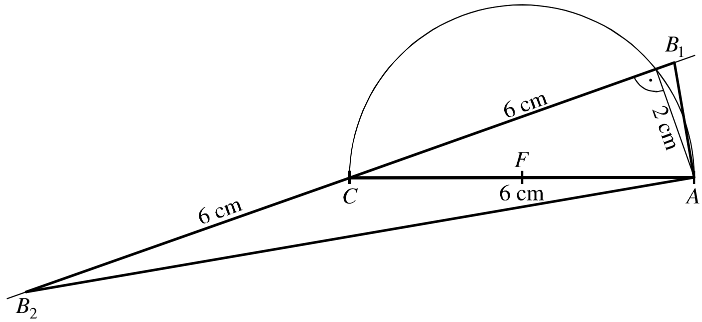
2073. Az adott magasság talppontja az alap mint átmérő fölé szerkesztett Thalész-körön van. A kapott tompaszögű háromszög az ábrán látható. Egybevágóság erejéig egyértelmű megoldást kapunk.



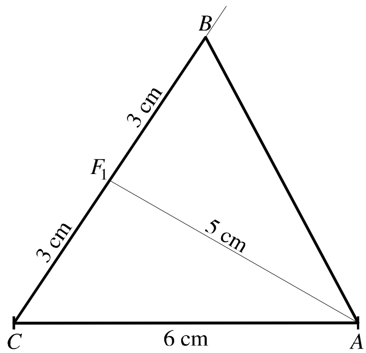
2074. A derékszögű csúcs az átfogó fölé szerkesztett Thalész-körön van, az átfogó egyik végpontjától 4 cm-re. A megoldás egybevágóság erejéig egyértelmű. Pitagorasz tétele alapján a másik befogó 3 cm hosszú.



2075. Mivel a szárakhoz tartozó magasságok egyenlő hosszúak, ezért az egyik szár mint átmérő fölé írt Thalész-körön az átmérő egyik végpontjától 2 cm távolságra megkapjuk a másik szár egyenesének egy pontját. Ezt az átmérő másik végpontjával összekötve a másik szár egyenese adódik. Erre felmérve 6 cm-t az átmérő másik végpontjából, kapjuk a háromszög harmadik csúcsát. A feltételnek két, nem egybevágó háromszög tesz eleget, az egyik tompaszögű, a másik hegyesszögű.



2076. A másik szárhoz tartozó súlyvonal is 5 cm, így az AF_1C háromszög mindhárom oldala ismert, tehát szerkeszthető. (Lásd az ábrát!) A CF_1 egyenesre F_1-ből felmérve 3 cm-t adódik a *B* csúcs.
A megoldás egyértelmű.



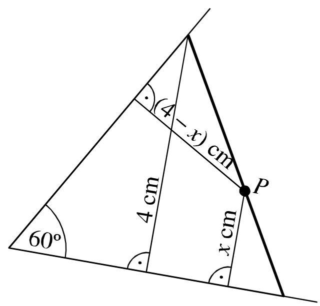
2077. Az átfogó mint átmérő fölé szerkesztett Thalész-körből az átfogó felezőmerőlegese metszi ki a derékszögű csúcsot.

2078. *a)* Jelölje *C* a derékszögű csúcsot, és legyen *T* a *C*-ből az átfogó egyenesére szerkesztett merőleges talppontja. A *CT* távolságot *T*-ből mindkét irányban felmérve az átfogó egyenesére, adódnak az átfogó végpontjai.

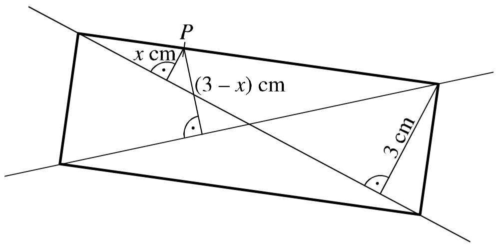
b) Jelölje *A* az átfogó egyik végpontját. A derékszögű csúcs az *A*-ból a befogó egyenesére bocsátott merőleges talppontja, jelölje *C*. Az *AC* távolságot *C*-ből felmérve a befogó egyenesére, adódik a harmadik csúcs.

2079. Az alaphoz tartozó magasság felezi az alappal szemközti szöget, így annak végpontjában mindkét oldalra 60°-os szög, a másik végpontba pedig merőleges szerkesztésével adódik a kívánt háromszög.

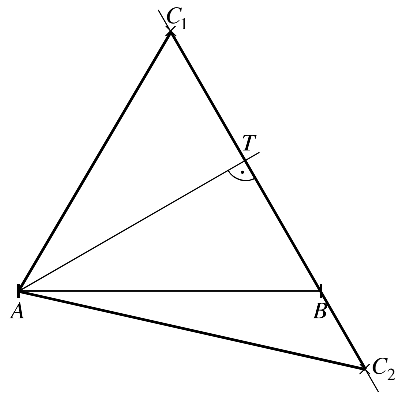
2080. A 2548. feladat állítása szerint az egyenlő szárú háromszög alapján felvett bármely pontnak a száraktól vett együttes távolsága egy állandó érték (a bizonyítást lásd ott), amely éppen a szárhoz tartozó magasság hossza. Ezt a tényt felhasználva a keresett ponthalmaz egy szakasz lesz, egy olyan szabályos háromszög egyik oldala, amelynek magassága 4 cm. A szakasz végpontjait az egyes szögszárakkal párhuzamos, tőlük 4 cm távolságra levő egyenesek metszik ki a másik szögszárakból.



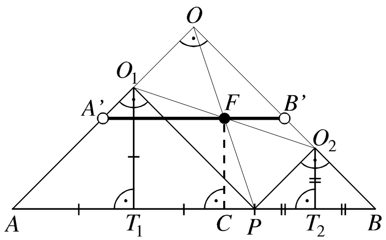
2081. Az előző feladat eredményét alkalmazva a négy szögtartományra, kapjuk, hogy a keresett ponthalmaz egy téglalap lesz, amelynek átlói az adott egyenesekre illeszkednek.



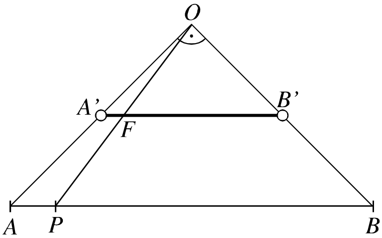
2082. A kérdésnek természetesen csak akkor van értelme, ha a T-vel jelölt talppontra teljesül, hogy AT merőleges a BT-re.
A C csúcs rajta van a BT egyenesen, és annak minden B-től különböző pontja megfelel.



2083. Mivel O_1AP és O_2BP egyenlő szárú derékszögű háromszögek, ezért $AT_1 = T_1O_1 = T_1P$ és $PT_2 = T_2O_2 = T_2B$. Az $O_1T_1T_2O_2$ derékszögű trapéz O_1O_2 szárának felezőpontja F, így FC a trapéz középvonala, amiből adódóan $FC = \dfrac{T_1O_1 + T_2O_2}{2} = 1{,}5\text{ cm}$. Kaptuk tehát, hogy F távolsága az AB egyenestől 1,5 cm, függetlenül a P helyzetétől. Másrészt viszont a 2083/1. ábrán látható, hogy F mindig az ABO egyenlő szárú derékszögű háromszög átfogóval párhuzamos $A'B'$ középvonalának belső pontja. Ezek után azt kell még belátnunk, hogy az $A'B'$ szakasz minden belső pontja benne van a feladatban definiált ponthalmazban, azaz létezik hozzá az AB szakasznak egy megfelelő P belső pontja. Ez viszont teljesül, ugyanis F az OO_1PO_2 téglalap átlóinak metszéspontja, így felezi az OP szakaszt. Így ha adott az ABO egyenlő szárú derékszögű háromszög $A'B'$ középvonalának egy F pontja, akkor az OF félegyenes kimetszi az AB szakaszból a megfelelő P pontot (2083/2. ábra).



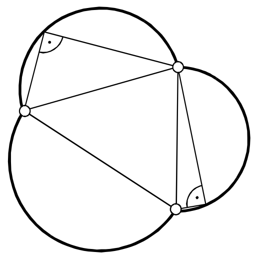
2083/1. ábra



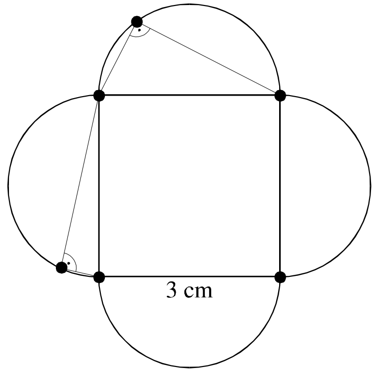
2083/2. ábra

2084. Lásd az előző feladatot!

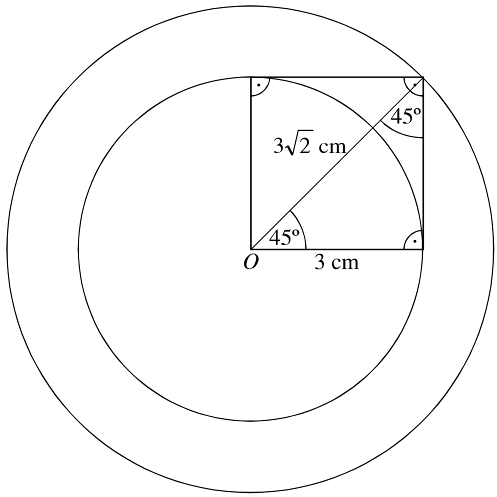
2085. Azon pontok halmaza, amelyekből a háromszög derékszögben látszik, az oldalakra mint átmérőkre kifelé szerkesztett félkörívek, kivéve a háromszög csúcsait.



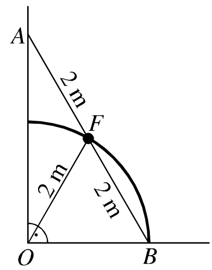
2086. Az előző feladathoz hasonlóan itt is az oldalak fölé szerkesztett félkörívek pontjai felelnek meg a feltételnek, csak itt a négyzet csúcsai is elemei a ponthalmaznak.



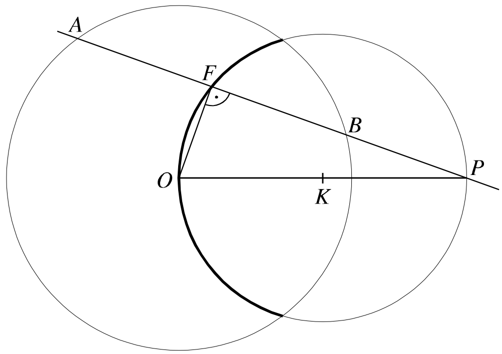
2087. A kör azon pontokból látszik derékszögben, amelyekből a körhöz húzott érintők derékszöget zárnak be. Ezek a pontok egy, az adott körrel koncentrikus, $3\sqrt{2}$ sugarú kör pontjai, amint az az ábrán látható.



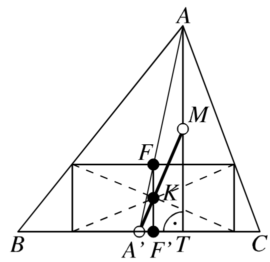
2088. A létra felezőpontja, lévén az AOB háromszög derékszögű (lásd az ábrát) minden helyzetben 2 m távolságra van az O ponttól. Így a felezőpont pályája egy O középpontú 2 m sugarú negyedkörív.



2089. Mivel a kör középpontját a húr felezőpontjával összekötő szakasz merőleges a húrra, ezért Thalész tételének megfordítása értelmében a P pontot az adott kör középpontjával összekötő szakasz mint átmérő fölé írt körnek az eredeti körbe eső íve lesz a keresett ponthalmaz. (Az ív végpontjai a P-ből húzott érintők érintési pontjai lesznek.)



2090. A téglalap köré írható kör középpontja az átlók metszéspontja. Jelölje A' a BC oldal, M pedig az AT magasság felezőpontját. Ha F és F' a téglalap két, BC-vel párhuzamos oldalának felezőpontja, akkor a téglalap K középpontja felezi az FF' szakaszt. Ebből adódóan K illeszkedik az $A'TA$ háromszög $A'M$ súlyvonalára. Másrészt, ha K az $A'TA$ háromszög $A'M$ súlyvonalának tetszőleges belső pontja, akkor a K-ra illeszkedő AT-vel párhuzamos egyenes és az ABC háromszög AA' súlyvonalának F metszéspontja kijelöli a téglalap BC-vel párhuzamos oldalát. Kaptuk tehát, hogy a keresett ponthalmaz az $A'M$ nyílt szakasz.



2091. A feladat szövege túl általános, ezért a következő egyszerűsítésekkel élünk:

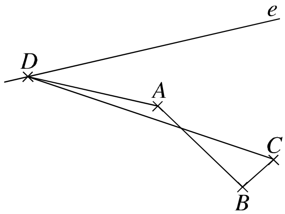
1. A, B és C az e egyenes ugyanazon oldalán legyenek.
2. A négyszög csúcsai pozitív irányításban A, B, C, D sorrendben legyenek.
3. Tekintsük négyszögnek azt is, amikor három csúcs (D és az adottakból valamelyik kettő) egy egyenesbe esik, vagy a négyszög hurkolt helyzetű (lásd 2091/1. ábrát).

Ezek a feltevések a megoldás lényegén nem változtatnak, viszont áttekinthetőbbé teszik azt.

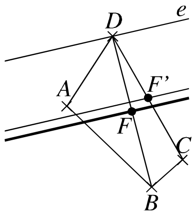
a) (A korábbi kiadásokban a feladat szövegében „oldal” szerepel, természetesen „átló” kellene.) A *BD* átlók felezőpontjainak halmaza egy az *e*-vel párhuzamos egyenes, amelyik felezi a *B*-ből az *e*-re állított merőleges szakaszt.

b) A válasz hasonló az *a)* pont válaszához.

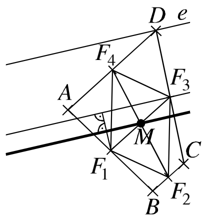
c) Bármely síknégyszög oldalfelező pontjai paralelogrammát határoznak meg (vagy esetünkben egy egyenesre is eshetnek). (Lásd a 2374. feladatot!). A paralelogramma átlói felezik egymást, így egy az *e*-vel párhuzamos, az *AB* felezőpontjából a *b)* pontban kapott egyenesre állított merőleges szakaszt felező egyenest kapunk.



2091/1. ábra



2091/2. ábra



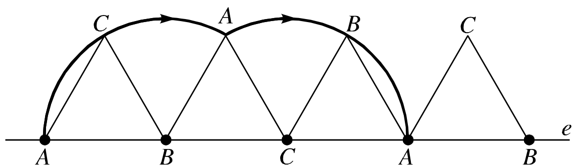
2091/3. ábra

2092. Az *A* pont az első forgatásnál egy *B* középpontú, *AB* sugarú 120°-os középponti szöghöz tartozó körívet ír le, a második forgatásnál egy *C* középpontú, szintén *AB* sugarú és 120°-os középponti szöghöz tartozó körívet, a harmadik forgatásnál pedig fixen marad. Ha *a* jelöli a háromszög oldalának hosszát, akkor az *A* pont az *a* sugarú kör kerületének $\frac{2}{3}$ részét tette meg. Így

$$8\pi = \frac{2}{3} \cdot 2a\pi,$$

amiből

$$a = 6.$$



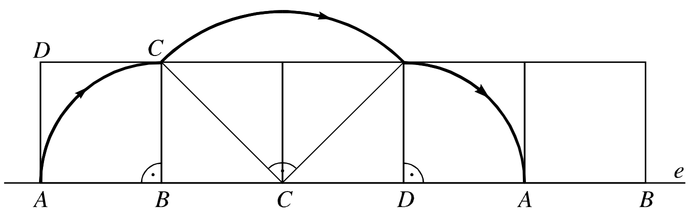
2093. Ha *a* jelöli a négyzet oldalának hosszát, akkor az *A* pont útja:

1. forgatás: *B* körüli *a* sugarú negyedkörív;

2. forgatás: *C* körüli $a\sqrt{2}$ (a négyzet átlója) sugarú negyedkörív;

3. forgatás: *D* körüli *a* sugarú negyedkörív;

4. forgatás: *A* fixen marad.



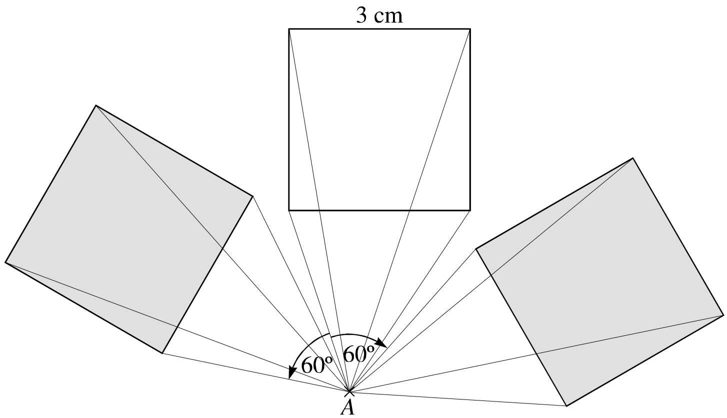
A pálya hossza összesen:

$$4\pi = a\pi + \frac{a\sqrt{2}\pi}{2},$$

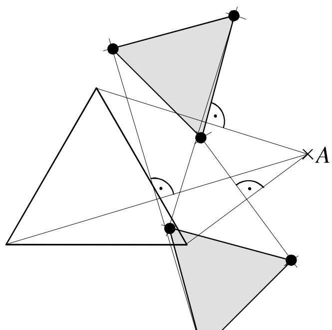
ahonnan

$$a = \frac{8}{2+\sqrt{2}} = 4\left(2-\sqrt{2}\right) \approx 2{,}34\ .$$

2094. A C csúcsot megkapjuk, ha a B csúcsot A körül 60°-kal elforgatjuk. Így a C csúcsok halmaza az adott négyzet A körüli 60°-os elforgatottja. Mivel a feladat a csúcsok betűzésének irányítását nem rögzítette, ezért a négyzet A körüli mindkét irányú elforgatottja megfelel.

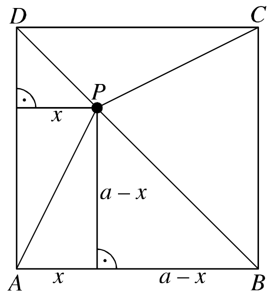


2095. Mivel a feladat nem rögzítette a csúcsok betűzésének irányát, ezért két, az eredetihez hasonló, egymással egybevágó szabályos háromszög (a belsejével együtt) alkotja a lehetséges C csúcsok halmazát. Ezen háromszögek csúcsait megkapjuk, ha az A-t az eredeti háromszög csúcsaival összekötő szakaszok felezőmerőlegeseire a felezőpontokból felmérjük a felezőpont és A távolságát.



Megjegyzés: Az eredeti és a kapott háromszögek hasonlóságának aránya $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}707$, lévén a derékszögű háromszög befogója $\sqrt{2}$-ed része az átfogónak.

2096. Legyen a kiválasztott két szemközti csúcs A és C. A feladat feltétele alapján P illeszkedik a BD átlóra. A feladat szövege alapján P egyidejűleg nem lehet összekötve a B és a D csúccsal, ugyanis ellenkező esetben nem teljesülhetne a három egyenlő területű részre osztás. Ha P az A, B és C pontokkal van összekötve, és a kapott három rész területe egyenlő, akkor P D-hez van közelebb. Legyen a P pont és az AD oldal távolsága x. Ekkor P az AB oldaltól $a - x$ távolságra van, ahol a a négyzet oldalát jelöli. (Lásd az ábrát!)



A feladat feltétele alapján

$$T_{APD} + T_{CDP} = T_{ABP} = T_{BCP}.$$

Felírva a megfelelő területeket és kihasználva az ábra szimmetriáját

$$ax = \frac{a(a-x)}{2},$$

ahonnan $x = \dfrac{a}{3}$.

Ez azt jelenti, hogy P a BD átló D-hez közelebbi harmadolópontja.

2097. 1. A BD átló P felezőpontja megfelel, ugyanis

$$T_{ABCP} = T_{ABP} + T_{PBC},$$

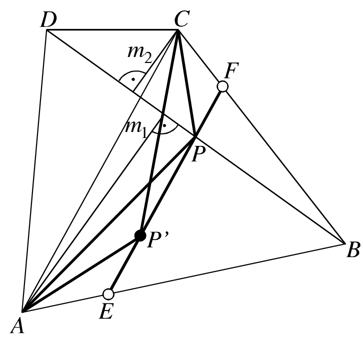
valamint

$$T_{ADCP} = T_{APD} + T_{PCD},$$

teljesül továbbá, hogy

$$T_{ABP} = T_{APD} \text{ és } T_{PBC} = T_{PCD}.$$

Ez utóbbi azért teljesül, mert a tekintett háromszögek egyik oldala és a hozzá tartozó magasság megegyezik.

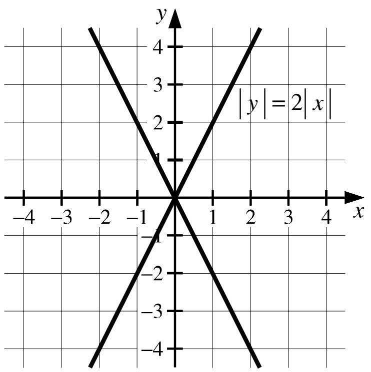


2. Húzzunk P-n keresztül párhuzamost az AC átlóval! Az így kapott EF szakasz valamennyi P' belső pontja megfelel, ugyanis $T_{ACP} = T_{ACP'}$ és $T_{AP'CD} = T_{ACD} + T_{ACP'}$. Az EF szakasz belső pontjaitól különböző Q pontokra $T_{AQC} \neq T_{APC}$.

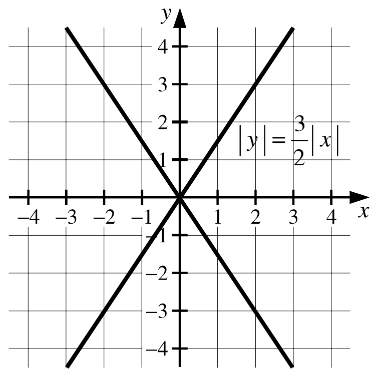
2098. Ha lenne a négyszög belsejében olyan pont, amely mindegyik körön kívül van, akkor Thalész tételének következtében ebből a pontból mind a négy oldal 90°-nál kisebb szög alatt látszana. Ez pedig azt jelentené, hogy ebből a pontból nézve az oldalak látószögeinek összege 360°-nál kisebb, ami nyilvánvaló ellentmondás.

2099. A 2017/*b)* feladat alapján a keresett ponthalmaz két egymásra merőleges egyenes, amelyek egyenletei: $y = x$, illetve $y = -x$. A két egyenes pontjainak koordinátái közötti kapcsolat összefoglalva így írható: $|y| = |x|$.

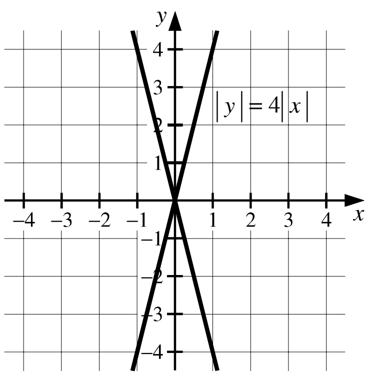
2100. *a)*



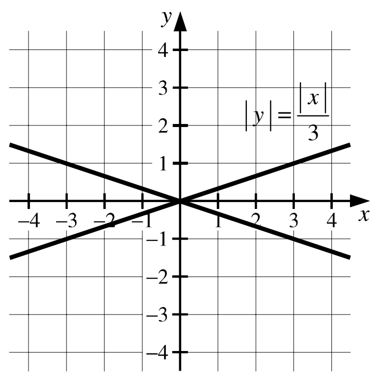
b)



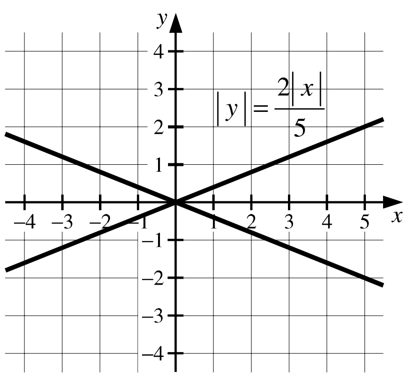
c)



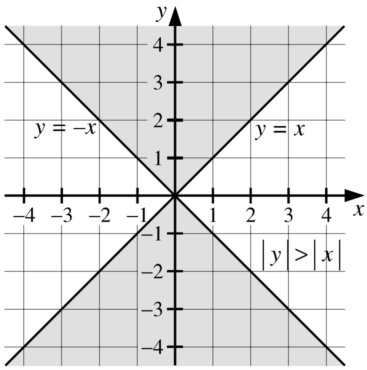
d)



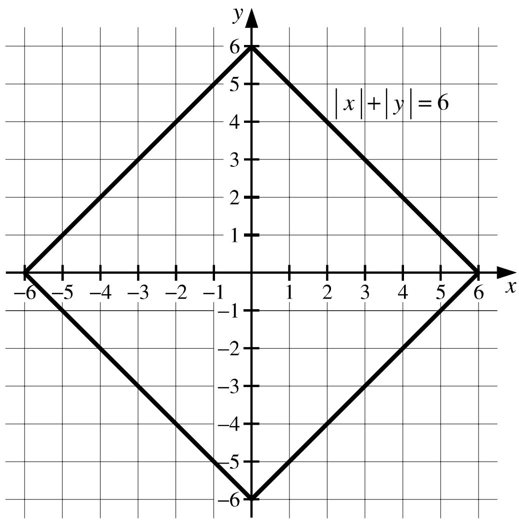
e)



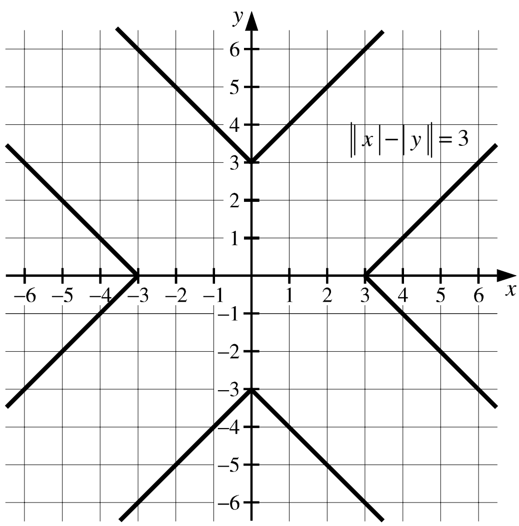
2101.



2102. *a)* Lásd a 2047. feladatot!

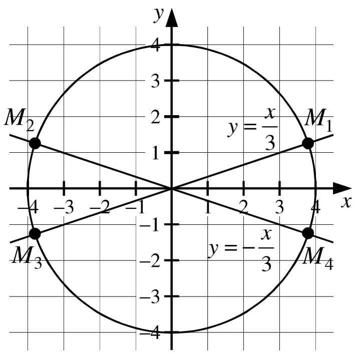


b) Lásd a 2049. feladatot!

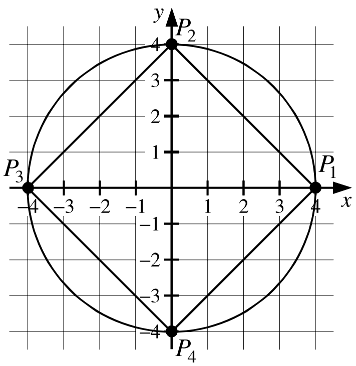


2103. A keresett pontok az origó körüli 4 egység sugarú kör és az $y = \frac{x}{3}$, valamint az $y = -\frac{x}{3}$ egyenesek metszéspontjaiként adódnak.

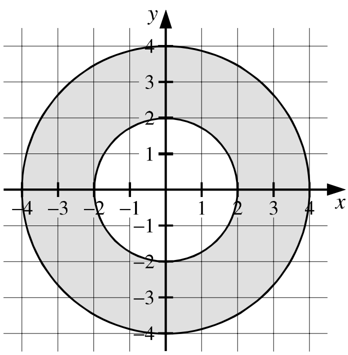
Megjegyzés: Az origó körüli 4 egység sugarú kör pontjainak koordinátáira (és csak azokra!) Pitagorasz tételéből adódóan $x^2 + y^2 = 16$.



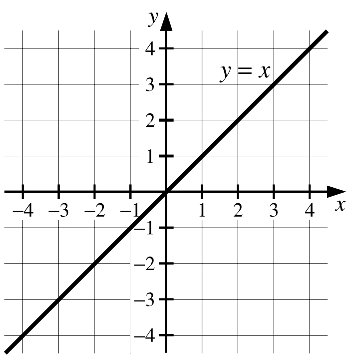
2104. A 2102. feladat alapján a feladat feltételének csak a $P_1(4; 0)$; $P_2(0; 4)$; $P_3(-4; 0)$; $P_4(0; -4)$ pontok tesznek eleget.



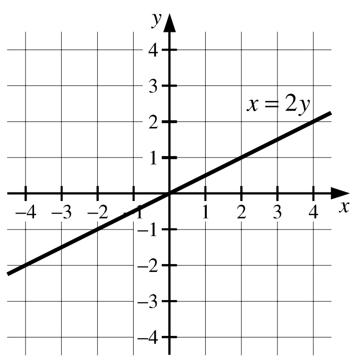
2105.



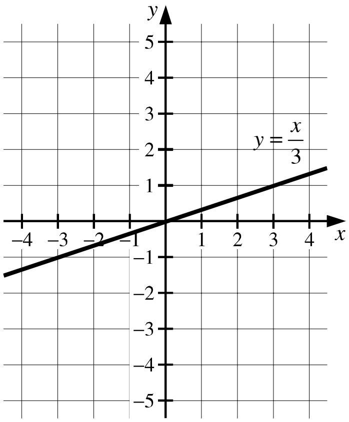
2106. *a)*



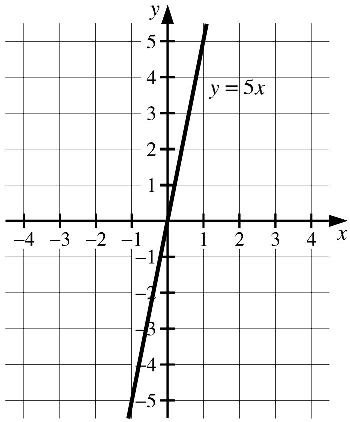
b)



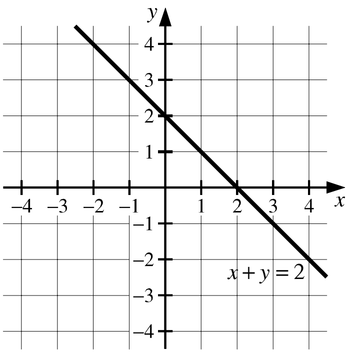
c)



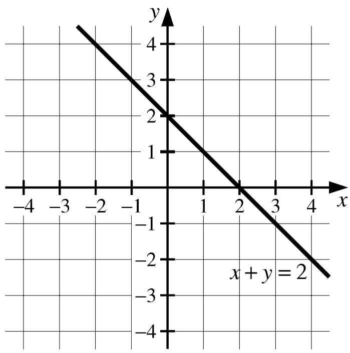
d)



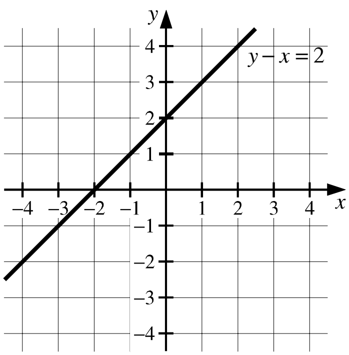
e)



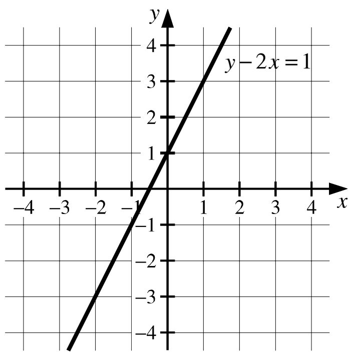
f)



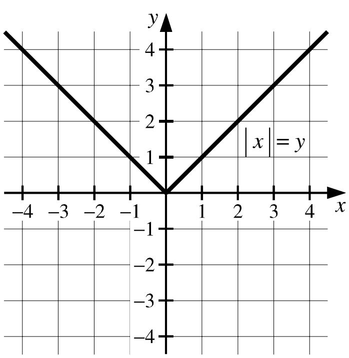
g)



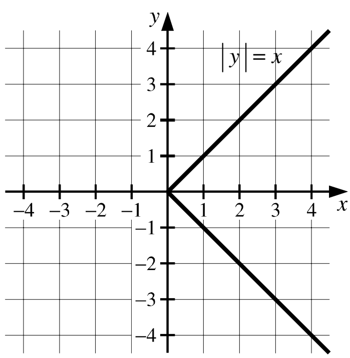
h)



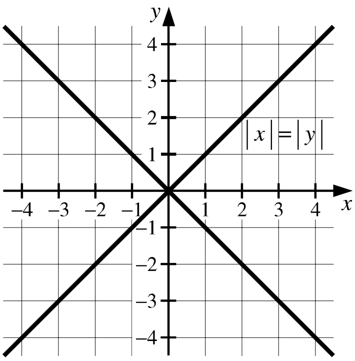
2107. *a)*



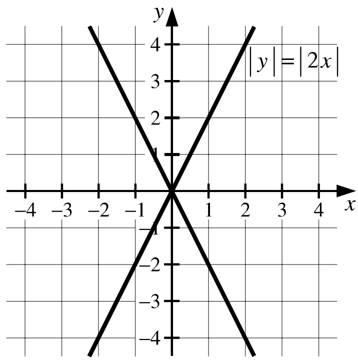
b)



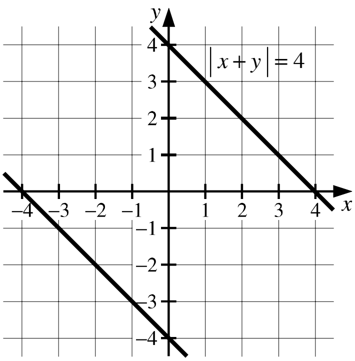
c)



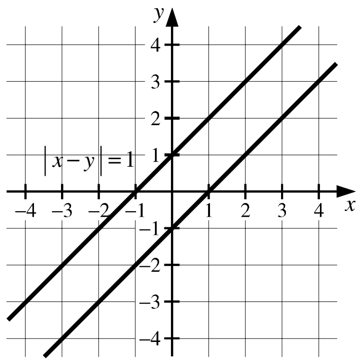
d)



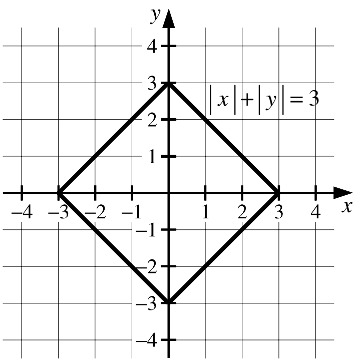
e)



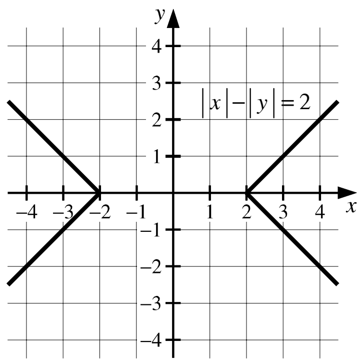
f)



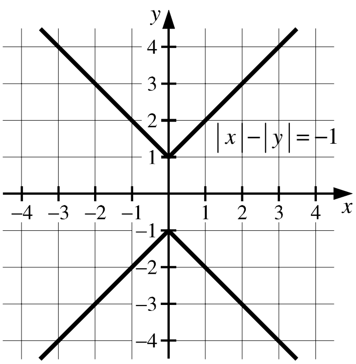
g)



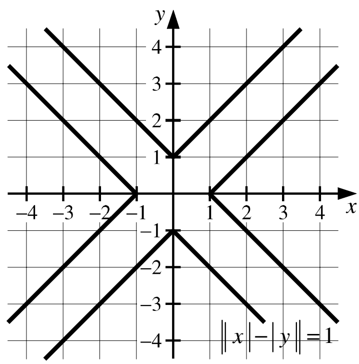
h)



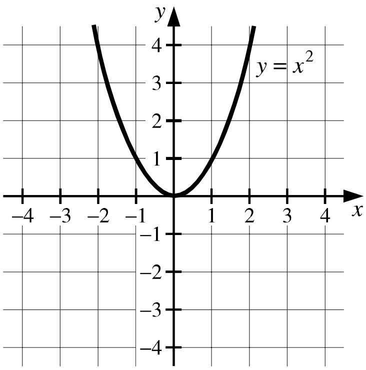
i)



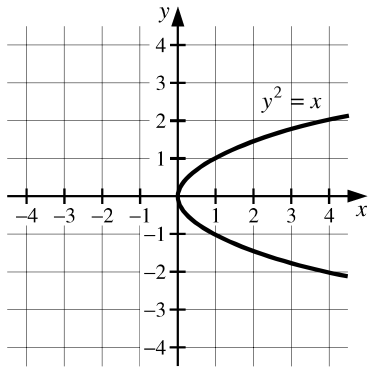
j)



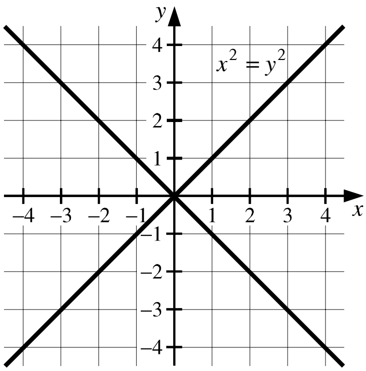
2108. *a)*



b)

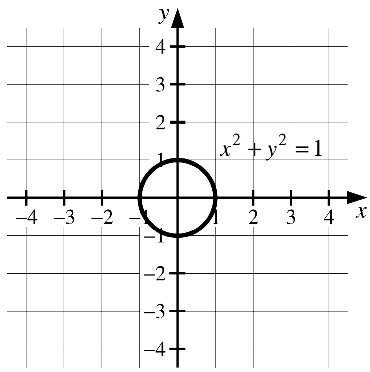


c)



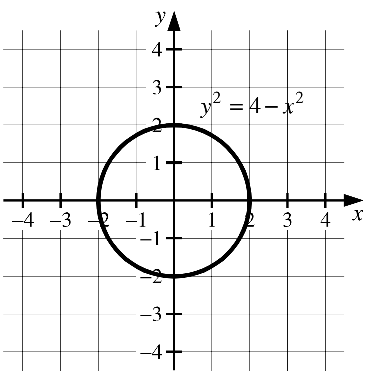
$x^2 = y^2$ akkor és csak akkor, ha $|x| = |y|$.

d)

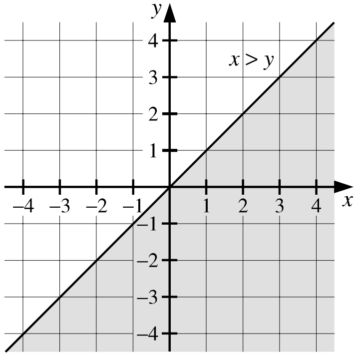


Lásd a 2103. feladat megjegyzését!

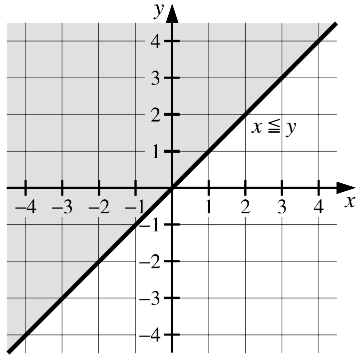
e)



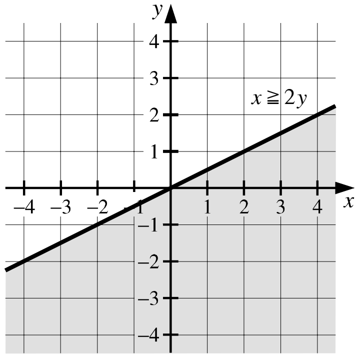
2109. *a)*



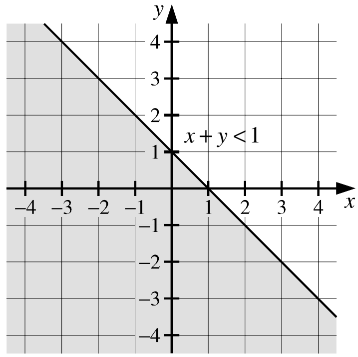
b)



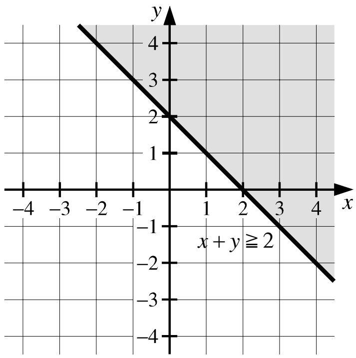
c)



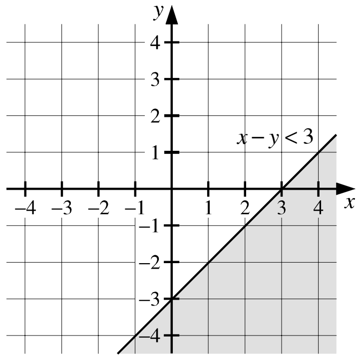
d)



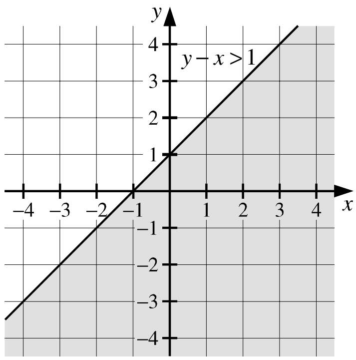
e)



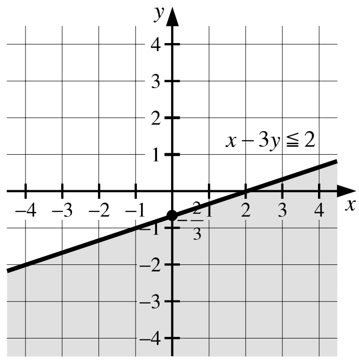
f)



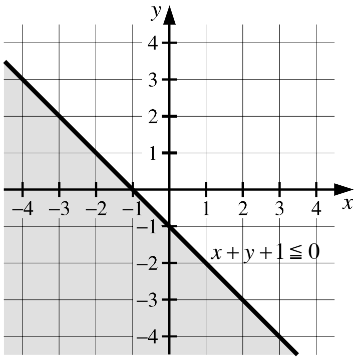
g)



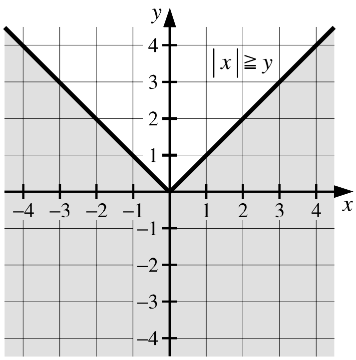
h)



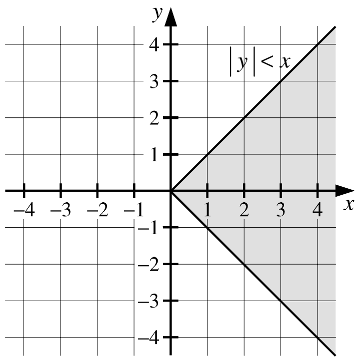
i)



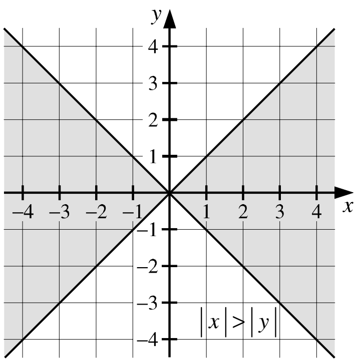
2110. *a)*



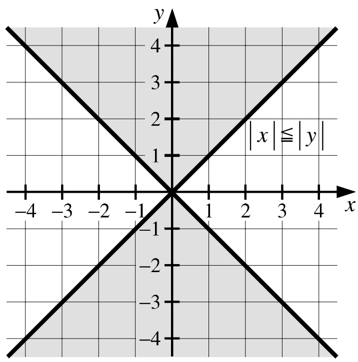
b)



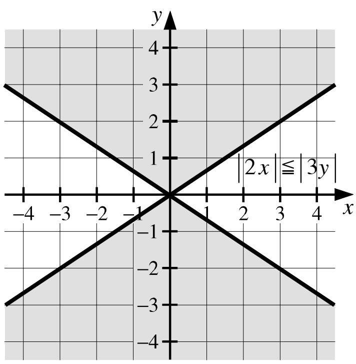
c)



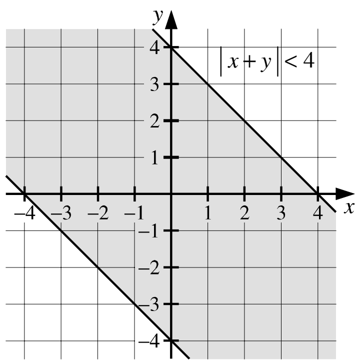
d)



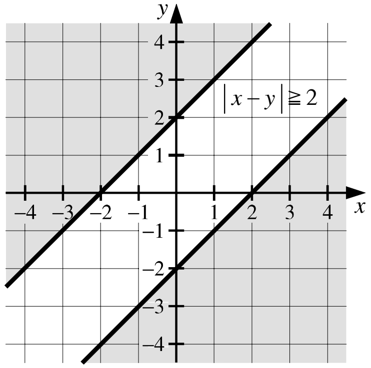
e)



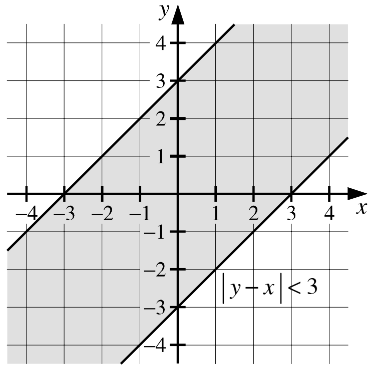
f)



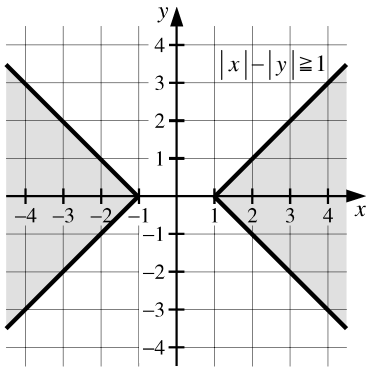
g)



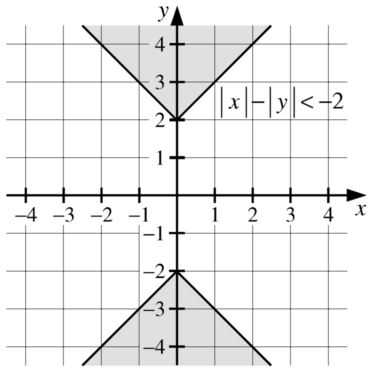
h)



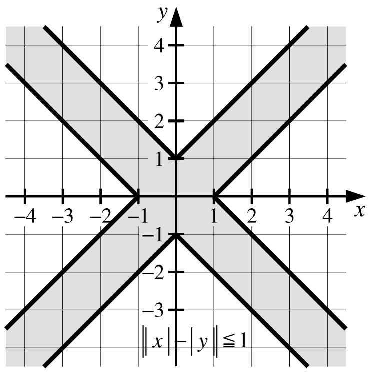
i)



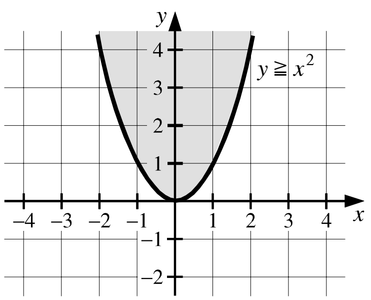
j)



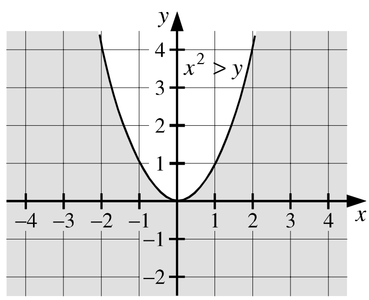
k)



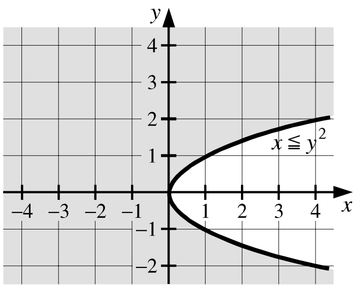
2111. *a)*



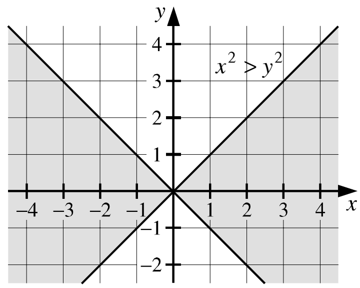
b)



c)

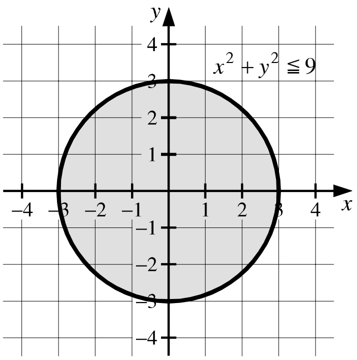


d)

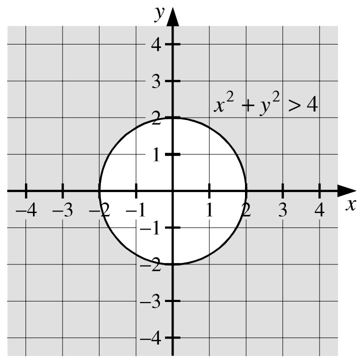


$x^2 > y^2$ akkor és csak akkor, ha $|x| > |y|$.

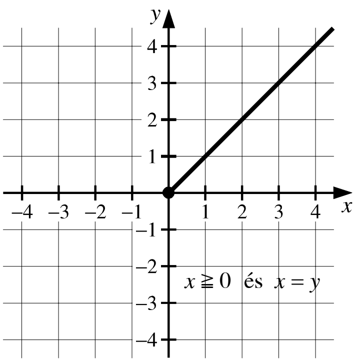
e)



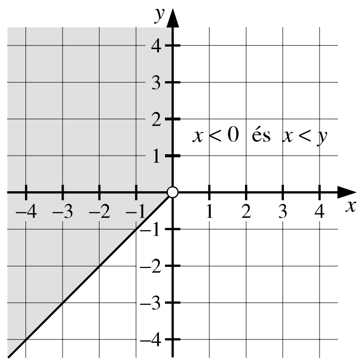
f)



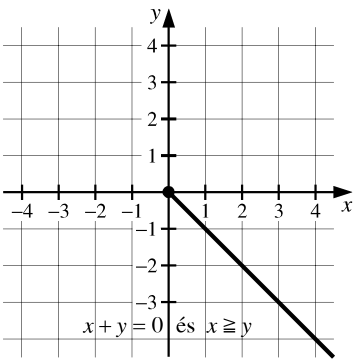
2112. *a)*



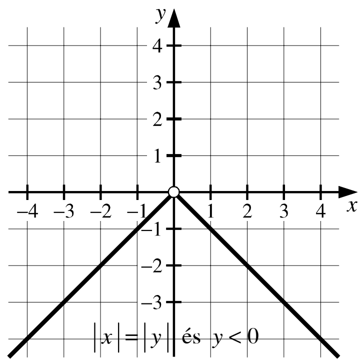
b)



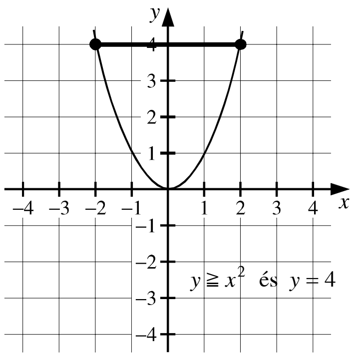
c)



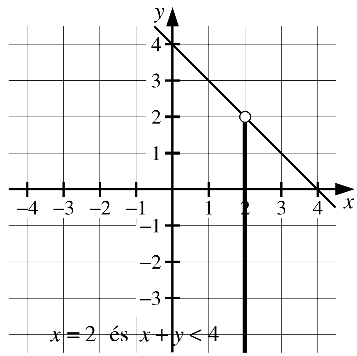
d)



e)

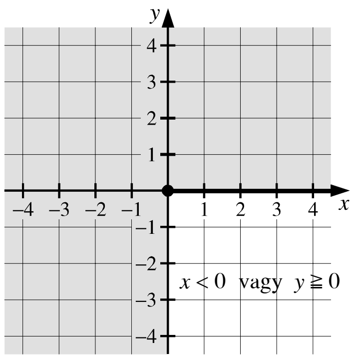


f)

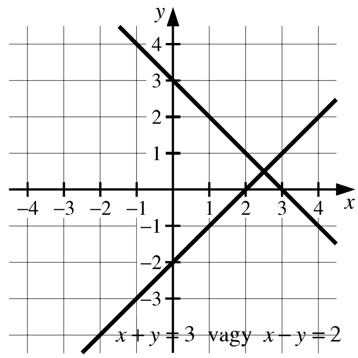


Megjegyzés: Az *e)* és az *f)* pont a feladatgyűjteményben hibásan jelent meg.

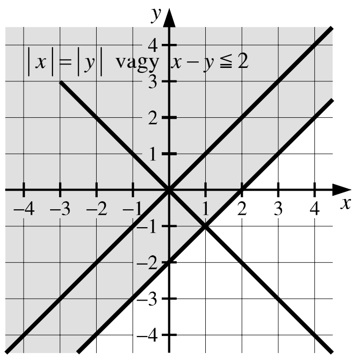
2113. *a)*



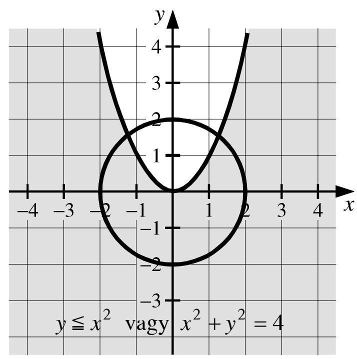
b)



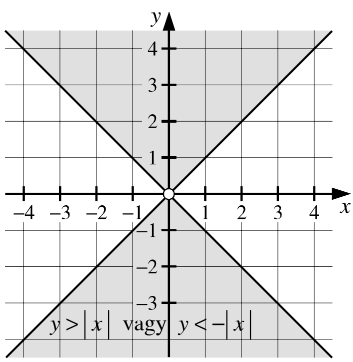
c)



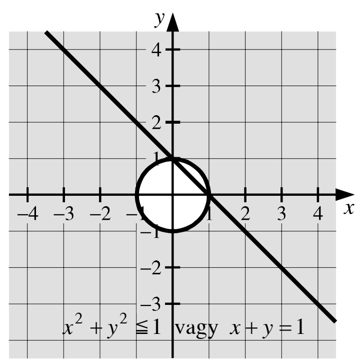
d)



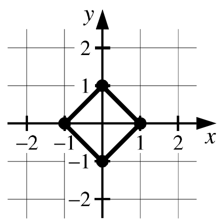
e)



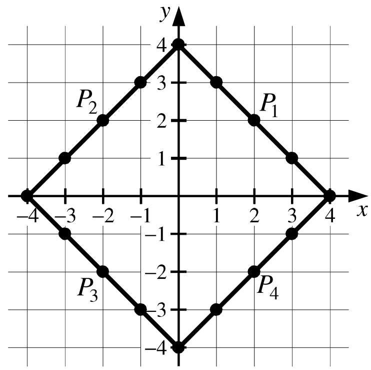
f)



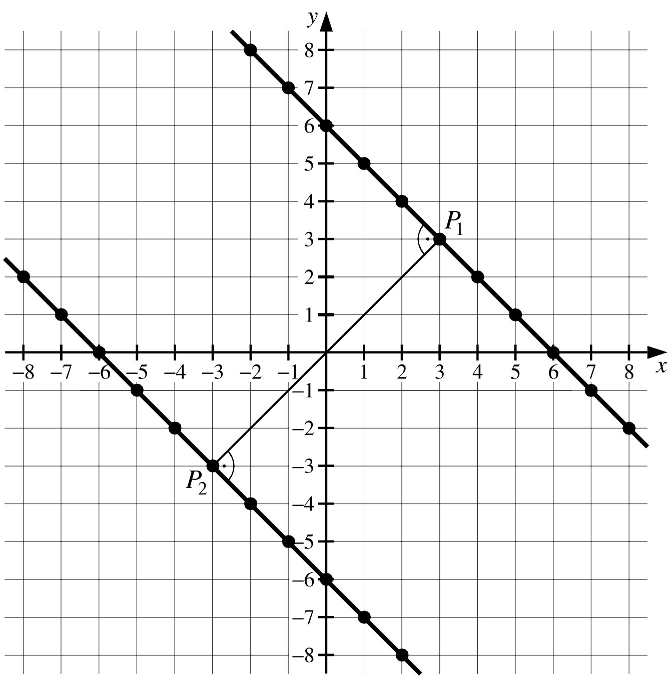
2114. *a)* Egész koordinátájú pontok: $P_1(1; 0)$, $P_2(0; 1)$, $P_3(-1; 0)$, $P_4(0; -1)$. Ezek egyenlő távol vannak az origótól.



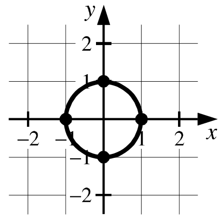
b) Az egész koordinátájú pontok az ábrán láthatók. Az origóhoz legközelebbi négy pont: $P_1(2; 2)$, $P_2(-2; 2)$, $P_3(-2; -2)$, $P_4(2; -2)$.



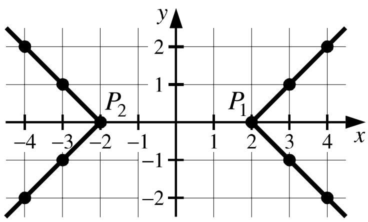
c) Végtelen sok egész koordinátájú pont van, közülük kettő van az origóhoz legközelebb: $P_1(3; 3)$, $P_2(-3; -3)$.



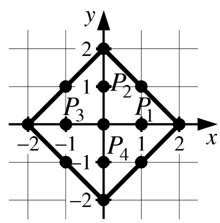
d) A megoldás ugyanaz, mint az *a)* pontban.



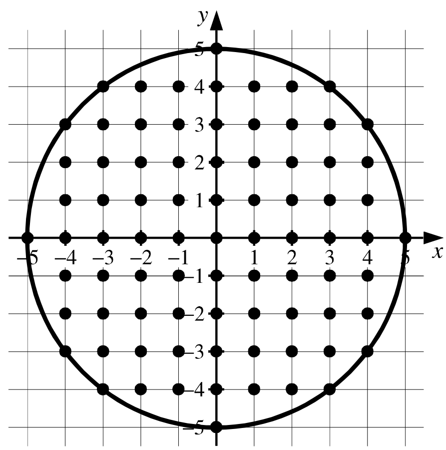
e) Végtelen sok megfelelő pont van, az origóhoz legközelebbiek: $P_1(2; 0)$, $P_2(-2; 0)$.



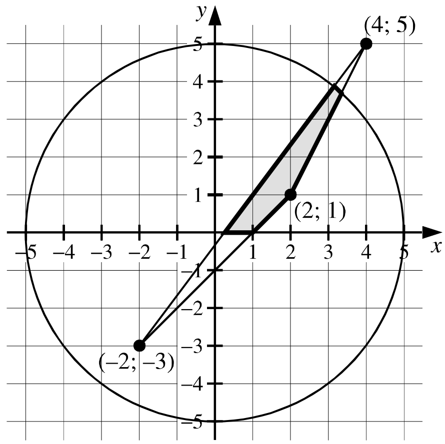
f) A megfelelő pontok az ábrán láthatók, az origóhoz legközelebbiek: $P_1(1; 0)$, $P_2(0; 1)$, $P_3(-1; 0)$, $P_4(0; -1)$.



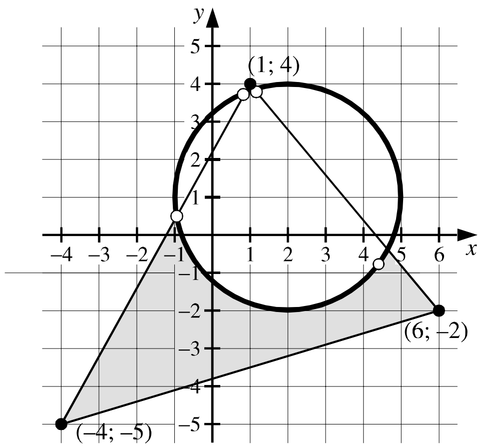
g) A megfelelő pontok az ábrán láthatók. Az origóhoz legközelebbiek ugyanazok, min az előző pontban.



2115. A közös rész egy zárt síkidom, az ábrán vonalkázással jelöltük.



2116. A közös részt az ábrán vonalkázással jelöltük. (Két közös pont nélküli síkidom, az egyik nagyon „pici”.)



2117. *a)* hamis *b)* igaz *c)* hamis *d)* igaz

2118. *a)* hamis *b)* igaz *c)* igaz *d)* hamis *e)* igaz *f)* igaz

2119. *a)* hamis *b)* hamis *c)* hamis *d)* igaz *e)* igaz

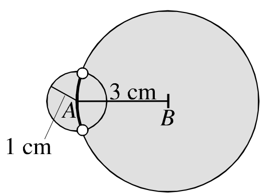
2120. *a)* hamis *b)* hamis *c)* igaz *d)* igaz

2121. *a)* hamis *b)* hamis *c)* hamis *d)* igaz *e)* igaz *f)* igaz

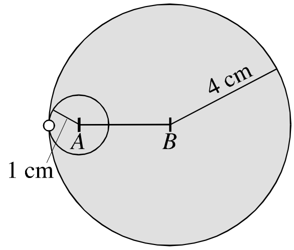
2122. *a)* hamis *b)* igaz *c)* igaz *d)* hamis

2123. *a)* $AB \leqq 4$ cm *b)* $AB \geqq 10$ cm

2124. *a)*



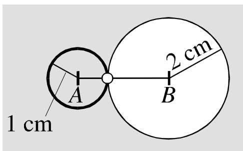
b)



Ha $PB < 4$ cm, akkor $PA < 1$ cm.

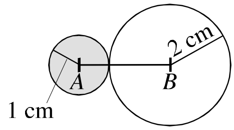
c) Nincs ilyen pont.

d)



Ha $PA < 1$ cm, akkor $PB > 2$ cm.

e)



f) Az AB szakasz A-hoz közelebbi harmadolópontja kivételével a sík minden pontja megfelel.

2125. *a)* Adott középpontú, adott sugarú gömbfelületen.

b) Egy olyan végtelen hengerpaláston, amelynek tengelye az adott egyenes, keresztmetszetének sugara pedig az adott távolság.

c) Az eredeti félsík által meghatározott mindkét féltérben egy-egy, az eredetivel párhuzamos sík, tőle adott távolságban.

2126. *a)* A két adott pont által meghatározott szakasz felezőmerőleges síkjában. Ezen sík minden pontja rendelkezik az adott tulajdonsággal, a tér más pontjai viszont nem.

b) A két adott egyenes által meghatározott sáv felezőegyenesére illeszkedő, a két egyenes által meghatározott síkra merőleges síkban.

c) A két metsző egyenes szögfelező egyeneseire illeszkedő, az egyenesek által meghatározott síkra merőleges síkokban. Ez a két sík egymásra is merőleges.

d) A két egyenest egymástól elválasztó, mindkettővel párhuzamos és a távolságukat felező síkban.

2127. *a)* A két síkot egymástól elválasztó, velük párhuzamos és a távolságukat felező síkban.

b) A két metsző sík által meghatározott szögek szögfelező síkjaiban. Ezen két sík illeszkedik az eredeti síkok metszésvonalára és merőleges egymásra.

2128. Az eredetivel koncentrikus 1 cm, illetve 5 cm sugarú gömbfelületek.

2129. *a)* hamis *b)* igaz *c)* hamis *d)* igaz *e)* hamis *f)* hamis
g) igaz *h)* hamis *i)* hamis *j)* igaz

2130. *a)* hamis *b)* hamis *c)* igaz *d)* hamis *e)* igaz *f)* igaz

2131. *a)* hamis *b)* hamis *c)* hamis *d)* igaz *e)* hamis *f)* igaz