KOMBINATORIKA, VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

Vegyes kombinatorikai feladatok

2964. *a)* Akármelyik golyót rakhatjuk az első helyre, ez három lehetőség. Ha például a piros golyó került előre, akkor a második helyre a másik két golyó közül bármelyik kerülhet. Ez két esetet jelent. Ugyanez igaz akkor is, ha másik golyó állt az első helyen. Emiatt az első két helyre $3 \cdot 2$-féleképpen kerülhetnek a golyók. Ha eldőlt, hogy az első két helyre melyik golyó került, akkor a harmadikra már csak egyféle módon helyezhetjük el a kimaradót. Emiatt összesen $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ féle sorrend lehetséges. Táblázatba foglalva a lehetőségeket (a golyókat a színük kezdőbetűjével jelöltük):

1. hely	P		K		S	
2. hely	K	S	P	S	P	K
3. hely	S	K	S	P	K	P

Ugyanez a válasz a *b) c) d) e) f) g) h)* kérdésekre is, tehát a lehetőségek száma: $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

2965. *a)* Akármelyik golyót rakhatjuk az első helyre, ez négy lehetőség. Ha például a piros golyó került előre, akkor a második helyre a maradék három golyó közül bármelyik kerülhet. Ez három esetet jelent. Ugyanez igaz akkor is, ha másik golyó áll elől, tehát az első két helyre $4 \cdot 3$-féleképpen helyezhetünk golyókat. Ha az első két helyre már tettünk golyót, akkor a harmadik helyre a megmaradt két golyó bármelyike kerülhet. Így az első három helyre $4 \cdot 3 \cdot 2$-féleképpen rakhatunk golyókat. Ha eldőlt, hogy melyik három golyó kerül az első három helyre, akkor a negyedik helyre már csak egyféleképpen kerülhet golyó. Emiatt összesen $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ féle sorrend lehetséges.

Megjegyzés: Az előző feladat eredményét felhasználva gyorsabban is eredményre juthatunk: Az első helyre bármelyik golyó kerülhet, ez négy lehetőség. Ha például a piros golyó került első helyre, akkor a többi három helyre a maradék három golyót kell sorbarakni. Az előző feladat szerint ezt 6-féleképpen tehetjük meg. Ugyanez igaz akkor is, ha másik golyó áll elöl. Így összesen $4 \cdot 6 = 24$-féle sorrend lehetséges.

Ugyanez a válasz a *b) c) d) e) f) g) h)* kérdésekre is, tehát a lehetőségek száma: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

2966. *a)* $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ négyjegyű számot kaphatunk.

b) Páros számot csak akkor kapunk, ha az utolsó számjegy a 4. Így az első három helyiértékre az 1; 3; 5 számjegyek kerülnek valamilyen sorrendben. Annyi páros számot kapunk tehát, ahányféleképpen az 1; 3; 5 számjegyek sorbarendezhetők. Ezen sorrendek száma: $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$. Tehát 6 páros szám van közöttük.

c) 4000-nél nagyobb számot akkor kapunk, ha az első számjegy 4 vagy 5. Így az első helyiértékre kétféle számjegy kerülhet. Ha ide valamelyik számjegyet leírtuk, akkor a további három helyiértékre kell a maradék három számjegyet leírni. Ezt $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$-féleképpen tehetjük meg. Tehát a 4000-nél nagyobb számok száma: $2 \cdot 6 = 12$.

2967.

Korongok	Példák az elrendezésekre	Sorrendek száma
P; K	PK; KP	2
P; K; S	PKS; PSK; KPS; KSP; SPK; SKP	6
P; K; S; F	PKSF; PKFS; PSKF; PSFK; …	24

2968. *a)* Az öt vendég $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$-féle sorrendben érkezhetett meg a születésnapra.

b) Az első három érkező a három fiú volt. Ők $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$-féle sorrendben érkezhettek meg. Az ezután érkező két lány kétféle sorrendben érkezhetett. Vagyis a fiúk bármely érkezési sorrendjéhez kétféleképpen kapcsolódhatnak, így az ilyen sorrendek száma: $6 \cdot 2 = 12$.

2969. Az első helyen bármelyik futó végezhetett, ez 6 lehetőség. Ha az első helyezett már befutott, a második helyre a maradék öt futó közül bármelyik kerülhet, így ez 5 lehetőség. Tehát az első két helyre $6 \cdot 5$-féleképpen kerülhetnek versenyzők. Hasonlóan folytatva tovább a hat futó lehetséges befutási sorrendjeinek száma: $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = = 720$.

2970. Mivel a szám 15-tel kezdődik, ezért az első két helyiértéket már kitöltöttük, így a többi négy helyiértéken kell elhelyezni a maradék négy számjegyet. Ezt annyiféleképpen tehetjük meg, ahányféleképpen a négy számjegyet sorba lehet rendezni. Ezek száma: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$. Tehát 24 db ilyen hatjegyű szám képezhető.

2971. Annyi ötjegyű számot képezhetünk, ahányféleképpen az öt számjegyet sorba lehet rendezni. Ezek száma: $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$. Tehát 120 db ötjegyű számot képezhetünk. Ha a szám 7-re végződik, akkor az első négy helyiértékre kell elhelyezni a maradék négy számjegyet minden lehetséges sorrendben. Az ilyen számok száma tehát: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

2972. $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$-féle sorrendben.

2973. *a)* Annyi ötjegyű számot képezhetünk, ahányféle módon sorbarendezhetjük az öt számjegyet. Ezek száma: $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.

b) Azok a számok párosak ezek közül, amelyek 2-re vagy 4-re végződnek. Tehát az utolsó helyre kétféle számjegyet választhatunk. Ekkor valamelyiket leírva a maradék négy helyiértékre kell elhelyezni a kimaradó négy számjegyet. Ezt $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$-féle módon tehetjük meg. Tehát a képezhető páros számok száma: $2 \cdot 24 = 48$.

c) Azok a számok lesznek néggyel oszthatóak, amelyek utolsó két jegyéből álló kétjegyű szám osztható néggyel. Emiatt az utolsó két helyiértékre a következő számok kerülhetnek: 32; 52; 72; 24. Ha ezek valamelyikét leírjuk az utolsó két helyiértékre, akkor a maradék három számjegyet kell az első három helyiértékre elhelyezni. Ezen elrendezések száma: $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$. Tehát összesen: $4 \cdot 6 = 24$ néggyel osztható szám van közöttük.

d) A legnagyobb szám a 75 432, a legkisebb a 23 457.

e) A legnagyobb páratlan szám a 75 423.

f) A legkisebb páros szám a 23 574.

g) Nagyság szerint írva a négy legkisebb szám sorrendben: 23 457; 23 475; 23 547; 23 574. Tehát a 4. helyen a 23 574 állna. Mivel az *a)* rész szerint 120 db szám van összesen, ezért a nagyság szerinti növekvő sorban ugyanaz a szám áll a 115. helyen, mint ami a csökkenő sorrendben a 6. helyen. Írjuk le csökkenő sorrendben az első hat számot!

75 432; 75 423; 75 342; 75 324; 75 243; 75 234; ...

Tehát a növekvő sorrendben a 115. helyen a 75 234 állna.

h) Mivel minden szám ötjegyű és 120 db van belőlük, ezért az egymás mellé íráskor $5 \cdot 120 = 600$ jegyű számot kapnánk.

2974. Ábécé sorrendben írva a „szavakat”, először az A, majd a K, végül a P és U betűvel kezdődő szavak következnek. Nézzük először hány „szó” kezdődik A betűvel! Ezek száma éppen $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$, hiszen a maradék három betűt ennyiféle sorrendben írhatjuk az A betű után. Tehát a „szótárban” az első hat „szó” A betűvel kezdődik és ezután következnek a K betűvel kezdődő „szavak". Hasonlóan, mint az A betű esetén, a K betűvel kezdődő „szavak” is hatan vannak. Az is látható, hogy közülük az első a KAPU és utolsó a KUPA (hiszen a KAPU-ban a K után ábécé sorrendben, míg a KUPÁ-ban éppen fordítva következnek a betűk). Ebből következik, hogy a „szótárban” a KAPU a 7., a KUPA a 12. helyen szerepel.

2975. *a)* Egy szám pontosan akkor osztható 3-mal, ha számjegyeinek összege is osztható 3-mal. Az általunk képezett számokban ugyanazok a számjegyek szerepelnek, tehát ha a jegyek összege osztható 3-mal, akkor minden ilyen hatjegyű szám is osztható lesz

3-mal. A jegyek összege $1 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 36$ osztható 3-mal, tehát annyi 3-mal osztható szám lesz, ahány ilyen hatjegyű számot képezni lehet. Ezek száma: $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$, hiszen ennyiféleképpen rendezhetjük sorba a hat számjegyet.

b) Egy szám akkor osztható 6-tal, ha osztható 3-mal és páros. Mivel az általunk képezhető számok mind oszthatók 3-mal, ezért azt kell megszámolni, hogy közöttük hány páros van. Páros számot akkor kapunk, ha az utolsó helyiértékre 6-ot vagy 8-at írunk. Ezek bármelyikét leírva a többi öt helyiértékre $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$-féle módon rendezhetjük el a maradék öt számjegyet. Tehát a 6-tal osztható számok száma: $2 \cdot 120 = 240$.

c) Egy szám akkor osztható néggyel, ha az utolsó két számjegyéből álló kétjegyű szám is osztható néggyel. Esetünkben lesz közöttük néggyel osztható, hiszen a 16-ra, 56-ra, 76-ra, 96-ra és 68-ra végződő számok mind ilyenek.

Megjegyzés: Könnyen megszámolhatjuk, hogy hány néggyel osztható számot képeztünk! Az előzőek szerint az utolsó két helyiértékre 5-féleképpen írhatunk számjegyeket. Bármelyiket is tekintjük, hozzá az első négy helyiértékre $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$-féleképpen rendezhetjük el a maradék négy számjegyet. Így a néggyel osztható számok száma: $5 \cdot 24 = 120$.

2976. *a)* A nyolc ember $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40\,320$-féle módon ülhet le egymás mellé.

b) Különböztessünk meg két esetet:

1. eset: a páratlan sorszámú helyeken fiúk ülnek, a páros sorszámú helyeken lányok. Ekkor a négy páratlan sorszámú helyre a négy fiút $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$-féleképpen ültethetjük le. A fiúk bármely sorrendjében a lányok a négy páros sorszámú helyre $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$-féleképpen ülhetnek. Így ezen sorrendek száma: $24 \cdot 24 = 576$.

2. eset: a páratlan sorszámú helyeken lányok ülnek, a páros sorszámú helyeken fiúk. Ekkor az előző részhez hasonlóan a lehetőségek száma 576.

Így összesen $576 + 576 = 1152$-féle módon ülhetnek le felváltva fiúk, lányok a padra.

2977. A leírt feltétel szerint nem tekinthető különbözőnek az a két elhelyezés, amelyek egyike úgy keletkezik a másikból, hogy mindenki pl. egy hellyel jobbra ül. Ebből következik, hogy az elhelyezkedésnél az első ember tetszüleges helyre ülhet, a sorrendet a többiek hozzá képest való elhelyezkedése határozza meg.

a) Az előbb elmondottakból következik, hogy 3 ember csak egyféleképpen ülhet le az asztal mellé, hiszen bármilyen helyzetben is foglaltak helyet a két szomszéd ugyanaz marad. (Ha különbséget tennénk a bal- ill. jobboldali szomszéd személye között, akkor persze kétféle elhelyezkedés adódna, aszerint, hogy az első ember balján a második, vagy a harmadik ember ül.)

b) Az *a)* részben leírtak szerint 3 ember csak egyféleképpen ülhet le az asztal köré. Ha a négyből három már leült, a negyediket 3-féleképpen ültethetjük le annak megfeleleően, hogy melyik kettő közé ültetjük. Így a lehetőségek száma 3. (Ha különbséget teszünk a bal és jobboldali szomszéd között, akkor az előző megjegyzésből adódóan 6-féle elhelyezés lehetséges.)

c) A *b)* rész szerint négy ember háromféleképpen ülhet le az asztal köré. Válasszunk ki az öt emberből négyet és ültessük le őket! Ekkor az ötödik ember 4-féleképpen ülhet le közéjük, így az öt ember elhelyezkedésére: $3 \cdot 4 = 12$ lehetőségünk van. (Ha különbséget teszünk a bal- és jobboldali szomszéd között, akkor a lehetőségek száma 24.)

2978. A megoldás alapgondolata megegyezik az előző feladat megoldásában használtakkal. Három gyöngyöt csak egyféleképpen fűzhetünk fel a láncra. A negyediket bármely kettő közé illeszthetjük, így a négy gyöngy felfűzésére 3 lehetőség van. Az ötödik gyöngyöt a már felfűzött négy gyöngy közé kell illeszteni, így erre 4 lehetőség van. Tehát az öt gyöngyöt összesen $3 \cdot 4 = 12$-féleképpen fűzhetjük fel. Ha már öt gyöngyöt felfűztünk, a hatodikat ezek közé kell illeszteni. Erre 5 lehetőségünk van. Így a hat gyöngyöt összesen: $5 \cdot 12 = 60$-féleképpen fűzhetjük fel a láncra.

2979. *a)* Osszuk fel a padot három részre, és osszuk el a részeket a három házaspár között. Ezt 6-féleképpen tehetjük meg. (Az első részt bármelyik pár kaphatja, ez három eset. Ha az egyik már megkapta azt, a másik részre két lehetőség van. Végül, ha az első két részt elosztottuk, akkor a harmadikat csak egyféleképpen adhatjuk oda. Így az esetek száma: $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$) A megkapott részre mindegyik pár kétféleképpen ülhet le. Így az összes lehetőségek száma: $6 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 48$.

Megjegyzés: Másképpen is okoskodhatunk! A pad bal oldali szélére a hat ember közül bárki leülhet, ez 6 lehetőség. Melléje viszont már csak a házastársa ülhet, így az első két helyre 6-féleképpen ülhetnek le. Ezután a következő helyre a kimaradó 4 ember közül bárki leülhet, melléje viszont ismét csak a házastárs ülhet, így az első négy helyre $6 \cdot 4$-féleképpen ülhetnek le. A kimaradó két helyre a harmadik házaspár kétféleképpen ülhet le, így az összes lehetőségek száma: $6 \cdot 4 \cdot 2 = 48$.

b) Kövessük vagy az *a)* részben vagy a megjegyzésben látott gondolatmenetet! A lehetséges esetek száma: $24 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 384$. (A megjegyzésbeli gondolatmenettel: $8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2 = 384$.)

2980. *a)* A 2977. feladat megoldásából kiderült, hogy három ember a feltételeknek megfelelően csak egyféleképpen helyezkedhet el az asztal körül. Ültessük le először a három férfit az asztal köré, ezt csak egyféleképpen tehetjük meg. Ezután minden feleség választhat, hogy férje jobb vagy bal oldalán szeretne inkább ülni. Így a lehetőségek száma: $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.

b) Az *a)* rész szerinti gondolatmenetet követve: A négy férjet háromféleképpen ültethetjük az asztal mellé. (2977. feladat *b)* része.) Ezután minden feleség két lehetőség közül választhat: férje jobbján vagy balján foglalhat helyet. Így a lehetőségek száma: $3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 48$.

Megjegyzés: Ha leülésnél különbséget teszünk a jobb- és baloldali szomszéd között, akkor az elhelyezkedések száma az előző megoldásból adódónak kétszerese lesz.

2981. *a)* 4 *b)* 18 *c)* 96

Gondolkodjunk úgy, hogy az első helyiértékre a 0-n kívül bármely számjegy kerülhet. Ha ide már leírtunk egy számjegyet, akkor a maradék helyiértékekre a kimaradt számjegyeket tetszőleges sorrendben leírhatjuk.

2982. Az első helyiértékre nulla nem kerülhet, így ide 9-féleképpen írhatunk számjegyet. A maradék kilenc helyiértékre a kimaradó 9 számjegy tetszőleges sorrendben írható, így a lehetőségek száma: $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3\,265\,920$.

2983. Egy szám pontosan akkor osztható öttel, ha 0-ra vagy 5-re végződik. Ezért esetünkben a 0 az utolsó helyiértéken szerepelhet csak. Az első négy helyiértékre a négy számjegyet $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$-féleképpen helyezhetjük el, így 24 ilyen ötjegyű szám képezhető.

2984. Egy szám pontosan akkor osztható 5-tel, ha 0-ra vagy 5-re végződik. Esetünkben a 0-ra végződő négyjegyű számok száma 6, hiszen a többi három számjegyet hatféleképpen helyezhetjük el az első három helyiértéken. Az 5-re végződő számok száma 4, hiszen a 0 nem kerülhet az első helyiértékre. Összesen tehát 10 ilyen négyjegyű szám képezhető.

2985. Az utolsó számjegy vagy a 0, vagy a 2. Ha a 0 az utolsó jegy, akkor az első három helyiértékre 6-féleképpen rendezhetjük el a három számjegyet, így 6 ilyen négyjegyű szám van. Ha az utolsó számjegy a 2, akkor 4 ilyen négyjegyű szám képezhető, hiszen a 0 nem állhat az első helyiértéken.

Összesen tehát 10 ilyen négyjegyű szám képezhető. Néggyel osztható számot akkor kapunk, ha az utolsó két számjegyből álló kétjegyű szám osztható néggyel. Így az utolsó két helyiértékre csak a 12; 32; 20 kerülhet. Így 4 db néggyel osztható számot kaphatunk, ezek a következők: 3012; 1032; 1320; 3120.

2986. *a)* Az első helyiértékre nem kerülhet 0, így 4 lehetőség adódik. Ha valamelyik számjegyet elsőnek leírtuk, akkor a többi négy helyiértékre a maradék négy számjegyet $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$-féleképpen írhatjuk le. Így $4 \cdot 24 = 96$ ötjegyű számot képezhetünk.

b) Az utolsó számjegy csak 1 vagy 3 lehet, ez két lehetőség. Valamelyiket leírva a maradék négy számjegyből kell négyjegyű számot képezni. Mivel a nulla nem kerülhet az első helyiértékre, ezért ilyen négyjegyű szám: $3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 18$ van. Tehát a páratlan ötjegyű számok száma: 36.

c) Egy szám pontosan akkor osztható 5-tel, ha ötre vagy nullára végződik. Ezért esetünkben a nullának az utolsó helyiértéken kell állni. Ilyen szám összesen $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ képezhető, hiszen a maradék négy számjegyet tetszőleges sorrendben írhatjuk az első négy helyiértékre.

d) Egy szám pontosan akkor osztható néggyel, ha az utolsó két jegyéből álló kétjegyű szám is osztható néggyel. Így esetünkben a számoknak a következő kétjegyű szám valamelyikére kell végződni: 20; 40; 12; 32; 24; vagy 04. Ha a szám, végződése 20; 40 vagy 04, akkor az első három helyiértékre tetszőleges sorrendben írhatjuk a kimaradó három számjegyet. Tehát ilyen szám összesen $3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 18$ képezhető. Ha a szám végződése 12; 32 vagy 24, akkor a kimaradó három számjegyből a 0 nem kerülhet az első helyiértékre, így ilyen szám összesen $3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 = 12$ képezhető. Összefoglalva: 30 db néggyel osztható számot képezhetünk.

2987. *a)* Egy szám pontosan akkor osztható 3-mal, ha számjegyeinek összege is osztható 3-mal. Esetünkben a jegyek összege: $0 + 2 + 4 + 6 + 9 = 21$ osztható 3-mal. Így az összes ötjegyű szám osztható lesz 3-mal. Ezek száma $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 96$, hiszen a nulla nem állhat első helyen.

b) Egy szám akkor osztható 6-tal, ha osztható 3-mal és páros. Esetünkben minden szám osztható 3-mal, tehát csak azt kell megszámolni, hogy hány páros van közöttük. Mivel csak a 9-re végződő számok nem párosak, ezért célszerű megszámolni, hogy hány 9-re végződő szám található közöttük. Mivel a 0 nem kerülhet az első helyiértékre, ezért a 9-re végződő számok száma: $3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 18$. Tehát a számok között $96 - 18 = 78$ hattal osztható van.

c) Egy szám pontosan akkor osztható 30-cal, ha osztható 5-tel is, 3-mal is és 2-vel is. Esetünkben minden szám osztható 3-mal, így azokat kell megszámolni, amelyik 5-tel is és 2-vel is oszthatók. Ez a feltétel akkor teljesül, ha a szám 0-ra végződik. Így ezek száma: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

2988. *a)* $123 + 132 + 213 + 231 + 312 + 321 = 1332$. A számok leírása nélkül is kiszámíthatjuk az összeget! Észrevehetjük, hogy az összegben minden számjegy minden helyiértéken éppen kétszer szerepel, hiszen a másik két jegyet kétféleképpen írhatjuk le a megmaradó két helyiértékre. Így az összeg: $2 \cdot (1 + 2 + 3) \cdot 100 + 2 \cdot (1 + 2 + 3) \cdot 10 + 2 \cdot (1 + 2 + 3) = 2 \cdot (1 + 2 + 3) \cdot 111 = 2 \cdot 6 \cdot 111 = 1332$.

b) Az *a)* részben látott gondolatmenetet követhetjük. Minden számjegy minden helyiértéken annyiszor szerepel az összegben, ahányféleképpen a többi három számjegyet a maradék három helyiértékre le lehet írni. Ez éppen $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$. Így az összeg:

$$6 \cdot (1 + 2 + 3 + 4) \cdot 1000 + 6 \cdot (1 + 2 + 3 + 4) \cdot 100 + 6 \cdot (1 + 2 + 3 + 4) \cdot 10 + 6 \cdot (1 + 2 + 3 + 4) = 6 \cdot (1 + 2 + 3 + 4) \cdot 1111 = 6 \cdot 10 \cdot 1111 = 66\,660.$$

c) Hogy a *b)* részben látott gondolatmenetet alkalmazni tudjuk, írjuk hozzá gondolatban a négyjegyű számokhoz azokat is, amelyek 0-val kezdődnek. Ekkor a *b)* rész alapján az összeg: $6 \cdot (0 + 1 + 2 + 3) \cdot 1000 + 6 \cdot (0 + 1 + 2 + 3) \cdot 100 + 6 \cdot (0 + 1 + 2 + 3)10 + 6 \cdot (0 + 1 + 2 + 3) = 6 \cdot (0 + 1 + 2 + 3) \cdot 1111 = 6 \cdot 6 \cdot 1111 = 39\,996$. Ebből az összegből vonjuk ki azokat, amelyek 0-val kezdődtek (0123; 0132; ...) Ezek összege éppen az *a)* részben számított összeg, tehát 1332. Így a 0; 1; 2; 3 számjegyek felhasználásával készített négyjegyű számok összege: $39\,996 - 1332 = 38\,664$.

2989. *a)* $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$, hiszen ennyiféleképpen lehet sorbarendezni az 5 számjegyet.

b) Minden számjegy minden helyiértéken annyiszor szerepel az összegben, ahányféleképpen a többi 4 számjegyet a 4 kimaradó helyiértéken el lehet helyezni. Ez a szám $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$. Így a keresett összeg (az 2988. feladat mintájára): $24 \cdot (1 + 3 + 5 + 7 + 9) \cdot 11\,111 = 24 \cdot 25 \cdot 11\,111 = 6\,666\,600$.

2990. *a)* ABB; BAB; BBA

b) TOLL; TLOL; TLLO; OTLL; OLTL; OLLT; LOTL; LOLT; LLOT; LTOL; LTLO; LLTO

2991. AABB; ABAB; ABBA; BAAB; BABA; BBAA

2992.

Korongok	Példák az elrendezésekre	Sorrendek száma
F; P; K	FPK; FKP; PFK; PKF; …	6
F; F; P	FFP; FPF; PFF	3
F; P; K; S	FPKS; FPSK; FKPS; FKSP; …	24
F; F; P; K	FFPK; FPFK; FPKF; FFKP; …	12
F; F; F; P	FFFP; FFPF; FPFF; PFFF	4
F; F; P; P	FFPP; FPFP; FPPF; PFFP; …	6

2993. *I. megoldás:* Válasszunk ki a négy helyiérték közül kettőt, és ide írjuk le a két 2-es számjegyet! Ezt 6-féleképpen tehetjük meg, hiszen az első helyiértéket 4 közül választjuk, a másodikat a maradék három közül. Ez 12 lehetőséget jelentene, azonban minden helyiérték-párt kétszer számoltunk meg annak megfelelően, hogy melyiket választottuk ki elsőnek. Ezután a maradék két helyiértékre írjuk le a 3 és az 5 számjegyeket. Ezt kétféleképpen tehetjük meg. Így a képezhető négyjegyű számok száma $6 \cdot 2 = 12$.

II. megoldás: Írjunk az egyik kettes számjegy helyébe egy 1-est! Így a négy számjegyből $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ négyjegyű számot képezhetünk. Rendezzük ezeket párba: két szám kerüljön párba, ha az 1 és 2 cseréjével egyikből a másikat kapjuk. (pl: 5132és

5231) Látható, hogy ha most az 1 helyett visszaírjuk az eredetileg szereplő 2-t, akkor a párok ugyanazt a négyjegyű számot jelentik. Ezért a képezhető négyjegyű számok száma: 12.

2994. *I. megoldás:* Válasszunk ki az öt helyiérték közül kettőt, és ide írjuk le a két 1-es számjegyet. A két helyiérték kiválasztását 10-féleképpen tehetjük meg. A maradék három helyiértékre írjuk le a 2; 3; 5 számjegyeket. Ezt $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$-féleképpen tehetjük meg. Így a képezhető ötjegyű számok száma: $10 \cdot 6 = 60$.

II. megoldás: Írjunk az egyik 1-es számjegy helyett 9-est! Az így kapott öt számjegyből $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ ötjegyű számot képezhetünk. Rendezzük ezeket párba: két szám kerüljön párba, ha az 1 és a 9 cseréjével egyikből a másikat kapjuk. (Pl: 29 351 és 21 359) Látható, hogy ha most a 9-es helyett visszaírjuk az eredeti 1-est, akkor a párok ugyanazt a számot jelentik. Így a képezhető ötjegyű számok száma: 60.

2995. Válasszunk ki a négy helyiérték közül kettőt és írjuk ide a két 3-ast, a másik két helyiértékre a két 5-öst. Így annyi négyjegyű számot lehet képezni, ahányféleképpen a négy helyiérték közül kettőt ki lehet választani. Ezt 6-féleképpen tehetjük meg. (Az első helyiérték kiválasztására 4, a másodikra 3 lehetőségünk van. Ez összesen 12 esetet jelentene, de minden helyiérték-párt kétszer számoltunk annak megfelelően, hogy melyiket választottuk ki először.) Tehát 6 db négyjegyű számot képezhetünk.

2996. *a)* Válasszuk ki az öt helyiérték közül kettőt, és a maradék háromra írjuk le az egyes számjegyeket. Ezt 10-féleképpen tehetjük meg. A kiválasztott két helyiértékre a 2 és 3 kétféleképpen írható, így a képezhető ötjegyű számok száma: $2 \cdot 10 = 20$.

b) 3 db *c)* 6 db

2997. Járjunk el a 2995. feladat szerint.

a) 6 db *b)* 3 db

2998. *a)* Az öt helyiérték közül válasszunk ki kettőt, ide írjuk le a két 2-est, a többi három helyiértékre pedig a három 1-est. Így annyi ötjegyű számot képezhetünk, ahányféleképpen az öt helyiérték közül kettőt ki lehet választani. (Az első helyiérték kiválasztására 5, a másodikra 4 lehetőségünk van. Így azonban minden helyiérték-párt kétszer számoltunk meg. Tehát a kiválasztások száma: 10) Vagyis 10 ilyen ötjegyű szám képezhető.

b) 3 db *c)* 4 db *d)* 6 db

2999. 3 db ilyen ötjegyű szám képezhető.

3000. Az első négy helyiértékre kell elhelyezni minden lehetséges módon az 1; 1; 2; 2 számjegyeket. Az ilyen hatjegyű számok száma: 6. (Lásd a 2997. *a)* feladat megoldását.)

3001. *a)* 12 szó képezhető. (Lásd a 2993. feladat megoldását. Írjunk az A betűk helyett 2-t, a K helyett 3-at, a T helyett pedig 5-öt!)

b) Az AKTA szó a 4. helyen áll ebben a szótárban.

3002. Ahhoz, hogy a MATEK szót kiolvassuk kettőt jobbra és kettőt lefelé kell „lépnünk". Jelöljük a jobbra lépést az 1 számjeggyel, a lefelé lépést a 2 számjeggyel. Így minden egyes kiolvasáshoz tartozik egy négyjegyű szám, amely két 1-es és két 2-es számjegyet tartalmaz, és fordítva: minden ilyen négyjegyű számhoz tartozik egy elolvasása a MATEK szónak. Például: a 2112 számhoz a nyilak szerinti elolvasás tartozik:

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{M} & & \mathrm{A} & & \mathrm{T} \\ \downarrow & & & & \\ \mathrm{A} & \rightarrow & \mathrm{T} & \rightarrow & \mathrm{E} \\ & & & & \downarrow \\ \mathrm{T} & & \mathrm{E} & & \mathrm{K} \end{array}$$

Ebből következik, hogy annyiféleképpen olvasható ki a MATEK szó a táblázatból, ahány négyjegyű szám képezhető az 1; 1; 2; 2 számjegyekből. Ezek száma 6. (Lásd 2997 *a)* feladat megoldását.) Tehát 6-féleképpen olvasható ki a MATEK szó a táblázatból.

3003. Kövessük az előző feladat megoldásának gondolatmenetét! Ahhoz, hogy az ISKOLA szót kiolvassuk a táblázatból 3 „lépést" jobbra és 2 „lépést" lefelé kell megtenni. Jelölje a jobbra lépést 1-es számjegy, a lefelé lépést 2-es számjegy. Így a táblázatból annyiféleképpen olvasható ki az ISKOLA szó, ahány ötjegyű szám képezhető az 1; 1; 1; 2; 2 számjegyek felhasználásával. Ezek száma 10. (Lásd a 2998. feladat *a)* részének megoldását.) Tehát 10-féleképpen olvasható ki a táblázatból az ISKOLA szó.

3004. Az olvasáskor hét lépést kell tennünk jobbra és kettőt lefelé. Jelöljünk minden jobbra lépést egy 1-es számjeggyel és minden lefelé lépést egy 2-es számjeggyel. Így minden elolvasáshoz egyértelműen hozzárendelhető egy kilencjegyű, 7 db 1-es és 2 db 2-es számjegyet tartalmazó szám, és fordítva: minden ilyen számhoz egyértelműen tartozik a MATEMATIKA szónak egy elolvasása. Pl. az 111211211 számhoz a nyilakkal jelölt kiolvasás:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} \mathrm{M} & \rightarrow & \mathrm{A} & \rightarrow & \mathrm{T} & \rightarrow & \mathrm{E} & & \mathrm{M} & & \mathrm{A} & & \mathrm{T} & & \mathrm{I} \\ & & & & & & \downarrow & & & & & & & & \\ \mathrm{A} & & \mathrm{T} & & \mathrm{E} & & \mathrm{M} & \rightarrow & \mathrm{A} & \rightarrow & \mathrm{T} & & \mathrm{I} & & \mathrm{K} \\ & & & & & & & & & & \downarrow & & & & \\ \mathrm{T} & & \mathrm{E} & & \mathrm{M} & & \mathrm{A} & & \mathrm{T} & & \mathrm{I} & \rightarrow & \mathrm{K} & \rightarrow & \mathrm{A} \end{array}$$

Így annyiféleképpen olvasható ki a táblázatból a MATEMATIKA szó, ahány kilencjegyű szám képezhető az 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 2; 2 számjegyekből. Ezeket könnyen összeszámolhatjuk: Válasszunk ki a kilenc helyiérték közül kettőt, ide írjuk a két 2-es számjegyet, a többi helyiértékre pedig az 1-eseket. Tehát annyi ilyen szám képezhető, ahányféleképpen a kilenc helyiérték közül kettőt ki lehet választani. Ezek száma: $\frac{9 \cdot 8}{2} = 36$. Ugyanis az elsőt kilencféleképpen, a másodikat ezután nyolcféleképpen választhatjuk. Ez $9 \cdot 8$ lehetőséget jelent, de itt minden helyiérték-párt kétszer számoltunk, hiszen egyszer az egyiket, másodszor a másikat választottuk ki elsőként. Összefoglalva: a MATEMATIKA szó 36-féleképpen olvasható ki a táblázatból.

3005. (A feladat szövege „1-es **és** 2-es” számjegyeket ír. Ez azt jelenti, hogy mind a két számjegynek szerepelni kell a négyjegyű számban.)

1112; 1121; 1211; 2111; 1122; 1212; 1221; 2112; 2121; 2211; 1222; 2122; 2212; 2221

Ezek száma tehát 14.

3006. *a)* Az első helyiértékre bármelyik számjegy írható, ez 3 lehetőség. Ha valamelyiket leírtuk, akkor a második helyiértékre is 3 lehetőségünk van, így az első két helyiérték kitöltésére $3 \cdot 3$ lehetőség adódik. Ha az első két helyiértékre leírtunk egy-egy számjegyet, akkor a harmadikra háromféle számjegy kerülhet. Így a képezhető háromjegyű számok száma:$3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$.

b) $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ ilyen szám van, hiszen ennyiféleképpen rendezhetjük sorba a három számjegyet.

c) Összesen 27 ilyen számot képezhetünk. Ebből 6 olyan van, amely mind a három jegyet tartalmazza, és 3 olyan, amelynek minden számjegye ugyanaz. Így az olyan számokból, amelyeknek pontosan két számjegye egyenlő: $27 - 6 - 3 = 18$ db van.

d) 3 ilyen szám van.

3007. *a)* $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ *b)* $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$

3008. *a)* $4 \cdot 3 = 12$ *b)* $4 \cdot 4 = 16$

3009. *a)* A páros számok száma: $2 \cdot 4 = 8$, a páratlanoké: $3 \cdot 4 = 12$

b) A páros számok száma: $2 \cdot 5 = 10$, a páratlanoké: $3 \cdot 5 = 15$.

3010. *a)* 5 páratlan számjegy van, közülük bármelyik kerülhet az első helyiértékre, ez 5 lehetőség. Ha valamelyiket leírtuk, akkor a második helyiértékre szintén 5-féle számjegyet írhatunk. Így összesen $5 \cdot 5 = 25$ ilyen kétjegyű számot képezhetünk.

b) $5 \cdot 4 = 20$ ilyen kétjegyű szám van, hiszen ha az első helyiértéket már kitöltöttük, akkor az ide írt számjegy nem szerepelhet a második helyiértéken.

3011. *a)* 5 páros számjegy van. Az első helyiértéken nem szerepelhet a 0, így 4 lehetőségünk van a választásra. Ha valamelyik jegyet ide leírtuk, akkor a második helyiértékre már bármelyik számjegy kerülhet. Így az ilyen kétjegyű számok száma: $4 \cdot 5 = 20$.

b) $4 \cdot 4 = 16$ ilyen kétjegyű szám található, hiszen az első helyiértéken nem szerepelhet a 0, ill. a második helyiértékre nem kerülhet a már elsőre leírt számjegy.

3012. 8888; 8889; 8898; 8988; 9888; 8989; 9889; 9898

3013. *a)* Bármely dobásnak hat különböző kimenetele lehet, így minden esetben 6-féle számjegyet írhatunk le. Így a kísérletnek $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$ kimenetele lehet.

b) Számoljuk meg azokat a kimeneteleket, amelyekben nincs hatos dobás. Ekkor minden dobáskor ötféle eredmény születhet, így ezen kimenetelek száma: $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$. Mivel összesen 216-féle eredmény születhet, ezért azon kísérletek száma, amelyekben legalább egy hatos van: $216 - 125 = 91$.

c) Ekkor minden dobásra három lehetőség adódik (4; 5; 6), így a kísérlet kimeneteleinek száma: $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$.

d) A dobott számok között három prímszám adódhat: 2; 3; 5. Így azon kimenetelek száma, amelyekben minden dobás prímszám: $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$.

3014. *a)* A felső csíkot bármelyik színnel színezhetjük, ez négy lehetőség. Ezután a másik csík szinezésére csak három lehetőség marad, hiszen az nem lehet az első csíkkal egyező szín. A lehetőségek száma tehát: $4 \cdot 3 = 12$.

b) Az *a)* rész alapján a felső két csík szinezését 12-féleképpen végezhetjük el. Ezután az alsó csík színét háromféleképpen választhatjuk meg, hiszen ennek színe nem egyezhet meg a középső színével. A készíthető zászlók száma tehát: $12 \cdot 3 = 36$.

c) A *b)* rész szerint a felső három csík színét 36-féleképpen választhatjuk ki. Ezután a negyedik csík színének kiválasztására 3 lehetőségünk van, hiszen az nem egyezhet meg a fölötte lévő színével. Így a készíthető zászlók száma: $36 \cdot 3 = 108$.

3015. *a)* $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ *b)* $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ *c)* $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ *d)* $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$

3016. *a)* Az első tárgyat bárkinek odaadhatjuk, ez 10 lehetőség. ha valaki megkapta az első tárgyat, akkor a másodikat már csak kilenc tanulónak adhatjuk, ez 9 lehetőség. Tehát az első két tárgy szétosztására $9 \cdot 10$ lehetőség van. Ha az első két tárgy gazdára talált, akkor a harmadikat már csak 8 tanuló valamelyikének adhatjuk. Így a kiosztások száma: $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$.

b) Az előző esethez képest annyi a különbség, hogy minden tárgy kiosztásánál 10 lehetőségünk van. Így az esetek száma: $10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$.

3017. Bármely tárgy sorsolásánál annyi lehetőségünk van, mint ahány ember van a társaságban. Így a sorsolás kimeneteleinek száma:

a) $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$ *b)* $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 256$

c) $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$ *d)* $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10\,000$

3018. *a)* $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$

b) Ha minden tanuló kap legalább egy tárgyat, akkor egy tanuló 2 tárgyat, a többiek egy-egy tárgyat kapnak. Adjunk az egyik tanulónak két tárgyat. Ezt $3 \cdot 6 = 18$-féleképpen tehetjük meg, hiszen ez bármelyik tanuló lehet, ez 3 eset, illetve a 4 tárgy közül a neki adott 2 tárgyat 6-féleképpen választhatjuk ki. Ezután a maradék két tárgyat a két tanuló között kétféleképpen oszthatjuk el. Így a lehetőségek száma: $18 \cdot 2 = 36$.

3019. $28 \cdot 27 \cdot 26 = 19\,656$

3020. *a)* 9 db ilyen szám van. (111; 222; ...; 999)

c) Az első helyiértékre nem kerülhet 0, így ide 9-féleképpen írhatunk számjegyet. Ezután a második helyiértékre nem kerülhet az elsőre írt jegy, így erre 9 lehetőség adódik. Ha az első két helyiértékre már írtunk számjegyet, akkor a harmadikra csak 8 lehetőségünk van. Így a képezhető számok száma: $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$.

b) Összesen $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$ db háromjegyű szám van. Így a két különböző számjegyet tartalmazók száma: $900 - 9 - 648 = 243$.

3021. $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$

3022. $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 54$

3023. *a)* $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$

b) Számoljuk meg azokat a számokat, amelyekben nincs benne az 1-es számjegy! Ekkor minden helyiértékre négyféle számjegy közül választhatunk, így az ilyen számok száma: $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 256$. Tehát az 1-es számjegy $625 - 256 = 369$ számban fordul elő.

3024. Az első helyiértéken nem állhat nulla, az utolsó helyiértéken pedig nem állhat 1. Így a képezhető számok száma: $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 = 108$.

3025. *a)* $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$

b) Azok a számok lesznek néggyel oszthatók közülük, amelyek 12-re végződnek. Ezek száma: $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$. (Hiszen az első három helyiértékre bármelyik számjegy kerülhet.)

c) Egy szám akkor osztható 3-mal, ha a szám jegyeinek összege osztható 3-mal. Így csak az 1; 1; 1; 1; 2 és az 1; 2; 2; 2; 2 jegyekből képezett számok lesznek 3-mal oszthatóak. Ezek száma: 10.

3026. *a)* Az első helyiértéken nem állhat 0, az utolsó helyiértéken nem állhat 1. Így az ilyen számok száma: $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 = 324$.

b) Az első helyiértéken nem állhat 0, az utolsó helyiértéken csak az 1 állhat. Így az ilyen számok száma: $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1 = 162$.

c) A képezett számok csak akkor lesznek néggyel oszthatók, ha végződésük: 00; 20 vagy 12. Ezek száma: $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 162$.

3027. Egy szám akkor osztható 6-tal, ha páros és a számjegyeinek összege osztható 3-mal. Így az *a)* feladatban csak a 4; 4; 5; 5 jegyekből képezett páros számok felelnek meg. A képezhető számok száma 3.

b) Ebben az esetben a 4; 5; 5; 5; 5 vagy a 4; 4; 4; 4; 5 számjegyekből képezett páros számok felelnek meg. Ezek száma: $1 + 4 = 5$.

3028. $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$ ilyen négyjegyű szám képezhető. Ezek közül: $4 \cdot 3 = 12$ kezdődik 65-tel.

3029. A gondolt szám minden számjegye 2 vagy 3. Így a következő számokra gondolhattunk: 222; 223; 232; 322; 233; 323; 332; 333

3030. A gondolt szám minden jegye 8 vagy 9. Így három kérdés feltételével biztosan kitalálható a gondolt szám. (Ezek a kérdések például:

1. Az első jegy 9-es?
2. A második jegy 9-es?
3. A harmadik jegy 9-es?)

3031. Ilyen számok: 20; 31; 42; 53; 64; 75; 86; 97; 13; 24; 35; 46; 57; 68; 79. Ezek száma 15. Így négy kérdéssel biztosan kitalálható a gondolt szám.

3032. Minden olyan háromjegyű szám előállhat, amit az 1; 2; 3; 4; 5; 6 számjegyekből (egy-egy jegyet csak egyszer használva) képezhetünk. Ezek száma: $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$.

3033. *a)* Az utolsó dobás eredménye csak a 2; 4; 6 valamelyike lehet, az első három dobás eredménye tetszőleges. Így a kimetelek száma: $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 3 = 648$.

b) 4-gyel osztható szám akkor keletkezik, ha az utolsó két dobás eredményének egymás után történő leírásával kapott kétjegyű szám osztható 4-gyel. Az ilyen kimenetelek: 12; 16; 24; 32; 36; 44; 52; 56; 64. Ezek száma 9. Az első két dobás eredménye tetszőleges lehet. Így a 4-gyel osztható négyjegyű számok száma: $6 \cdot 6 \cdot 9 = 324$.

3034. *a)* A 4 csak úgy adódhat összegként, ha kétszer 1-et, egyszer pedig 2-t dobunk. Mivel a kettes eredmény bármelyik dobás lehet, ezért a lehetőségek száma 3.

b) Az 5 három eredmény összegeként $1 + 1 + 3$ vagy $1 + 2 + 2$ formájában állhat elő. Itt mind a két lehetőség 3-3-féleképpen keletkezhet attól függően, hogy a 3-at illetve a 1-et melyik dobásnál kaptuk. Így a lehetőségek száma 6.

c) Ha a dobások sorrendjét nem vesszük figyelembe, akkor a 9-et hatféleképpen kaphatjuk meg összegként: $1 + 2 + 6$; $1 + 3 + 5$; $1 + 4 + 4$; $2 + 2 + 5$; $2 + 3 + 4$;

3 + 3 + 3. Ha a dobások sorrendjére is tekintettel vagyunk, akkor a három különböző számból álló összegek 6-féleképpen, a két különböző számból álló összegek 3-féleképpen adódhattak, így a lehetőségek száma: 6 + 6 + 3 + 3 + + 6 + 1 = 25.

d) A 16 összegként 6 + 6 + 4 vagy 6 + 5 + 5 formában kapható meg. Itt mindkét lehetőség 3-féleképpen keletkezhet, így összesen 6 esetben lehet a számok összege 16.

3035. Minden dobás eredménye vagy 1, vagy 3, vagy 5. Mivel egy szám pontosan akkor osztható 3-mal, ha a számjegyek összege is osztható 3-mal, ezért a három eredmény összegének 3-mal oszthatónak kell lenni. Ez úgy adódhat, ha mindhárom dobás eredménye ugyanaz a szám, vagy ha mindhárom dobás különböző. Így az egyes dobások eredménye a következő lehetett:

(1; 1; 1); (3; 3; 3); (5; 5; 5); (1; 3; 5); (1; 5; 3); (3; 1; 5); (3; 5; 1); (5; 1; 3); (5; 3; 1)

3036. Egy egész szám pontosan akkor osztható 9-cel, ha a számjegyeinek összege is osztható 9-cel.

a) Az előzőek alapján 9-cel osztható számot csak úgy kaphatunk, ha 4 db 4-es és 4 db 5-ös számjegyet használunk a nyolcjegyű szám képzésénél. Tehát annyi ilyen nyolcjegyű számot képezhetünk, ahányféleképpen a 8 helyiérték közül kiválasztható az a 4, ahová a 4-est írjuk. Ezek száma $\binom{8}{4} = 70$ db .

b) Kilencjegyű 9-cel osztható számot csak akkor kapunk, ha minden számjegy 4-es vagy minden számjegy 5-ös. Így ezek száma 2 db.

3037. Egy jelből álló morzejel 2 db van: –; · Két jelből álló morzejel 4 db van, hiszen mindkét jelet kétféleképpen választhatjuk meg. Hasonlóan: három jelből álló morzejel $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ db van, négy jelből álló morzejel $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ db van, öt jelből álló morzejel $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$ db van. Így a morzejelek száma: $2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 62$.

3038. A feladat megoldásánál eltekintünk attól, hogy bizonyos telefonszámok (pl. a csupa 0 számjegyet tartalmazó) a valóságban nem léteznek.

a) Bármely jegy 10-féleképpen alakulhat, így a vonalak száma: $10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$.

b) A vonalak száma: $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10\,000$, hiszen bármely jegyet 10-féleképpen választhatunk ki.

c) Ebben az esetben a lehetséges vonalak száma: $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 100\,000$, hiszen minden jegyet 10-féleképpen lehet kijelölni.

Megjegyzés: Az előzőek alapján következik, hogy n jegyű telefonszámok esetén a telefonvonalak száma legfeljebb 10^n.

3039. *a)* Ha egy négyjegyű tükörszám első két jegyét megadtam, akkor a számot egyértelműen meghatároztam, hiszen az utolsó két számjegy az első két jegy fordított sorrendben történő leírásával adódik. Így annyi négyjegyű tükörszámot képezhetünk az 1;

2; 3 számjegyek felhasználásával, mint ahány kétjegyű számot. Ezek száma: $3 \cdot 3 = 9$, hiszen mindkét helyiértékre bármelyik számjegy kerülhet.

b) Az *a)* rész alapján annyi négyjegyű tükörszám van, ahány kétjegyű szám. Így ezek száma 90 db.

c) Egy ötjegyű tükörszámot egyértelműen megadunk, ha megadjuk az első három számjegyét. Így annyi ötjegyű tükörszám képezhető az 1; 2; 3 számjegyekből, ahány háromjegyű szám. Így ezek száma $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$, hiszen bármelyik helyiértékre bármely számjegyet írhatjuk.

d) Annyi ötjegyű tükörszám képezhető, ahány háromjegyű szám. Így ezek száma: 900 db.

3040. Pistának igaza van, hiszen annyi hatjegyű tükörszám van, ahány háromjegyű szám, ill. annyi hétjegyű tükörszám van, hány négyjegyű szám. Ezek száma: 900 ill. 9000.

3041. *a)* $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$

b) Az összeg képzésekor minden számjegy minden helyiértéken annyiszor szerepel, ahányféleképpen a maradék három helyiértékre leírhatjuk a számjegyeket. Ez éppen $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$-féle eset. Így az összeg:

$$8 \cdot (1 + 2) \cdot 1000 + 8 \cdot (1 + 2) \cdot 100 + 8 \cdot (1 + 2) \cdot 10 + 8 \cdot (1 + 2) =$$
$$= 8 \cdot (1 + 2) \cdot 1111 = 26\,664.$$

3042. $3 \cdot 6 = 18$-féle

3043. $3 \cdot 6 \cdot 6 = 108$-féle

3044. *a)* $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 2520$

b) Számoljuk meg azokat az ötjegyű számokat, amelyekben nincs benne az 1-es számjegy! Ezek száma: $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 1440$. Így az *a)* rész alapján azok száma, amelyekben benne van az 1-es: $2520 - 1440 = 1080$ db.

3045. *a)* Elsőre nem húzhatunk 0-t, így a lehetőségek száma: $4 \cdot 4 \cdot 3 = 48$.

b) Elsőre nem húzhatunk 0-t, és utolsóra páratlan számjegyet. Ha az utolsó jegy 0, akkor a számok száma: $4 \cdot 3 = 12$. Ha az utolsó jegy 2 vagy 4, akkor a számok száma $3 \cdot 3 = 9$. Így összesen $12 + 9 + 9 = 30$-féleképpen kaphatunk háromjegyű páros számot.

3046. *a)* $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$-féleképpen.

b) $2 \cdot 5 \cdot 4 = 40$-féleképpen.

c) Azoknak a sorrendeknek a száma, amikor Anna nincs a helyezettek között $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$. Így azon esetek száma, amikor Anna a helyezettek között van (az *a)* rész alapján): $120 - 60 = 60$.

3047. *a)* Ha a kihúzott legkisebb szám nagyobb 5-nél, akkor minden húzásnál a 6; 7; 8; 9; 10 számok valamelyikét húzzuk. Így a lehetőségek száma: $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 3125$.

b) Számoljuk meg, hogy hány esetben lesz a kihúzott legkisebb szám 6-nál nagyobb! Ekkor minden húzásnál a 7; 8; 9; 10 számok valamelyikét húzzuk, így az esetek száma: $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 1024$. Ezután (az *a)* rész eredményét felhasználva) azon esetek száma, amikor a legkisebb kihúzott szám a 6: $3125 - 1024 = 2101$.

3048. *a)* $20 \cdot 19 \cdot 18 = 6840$-féleképpen.

b) $20 \cdot 20 \cdot 20 = 8000$-féleképpen.

c) Azon esetek száma, amikor egy tanuló 3 tárgyat kap 20. Így, ha egy tanuló legfeljebb 2 tárgyat kaphat a lehetséges elosztások száma a *b)* rész alapján: $8000 - 20 = 7980$.

3049. Írjuk le minden betű helyére, hogy hányféleképpen juthatunk el az elolvasás során az illető betűhöz! Észrevehetjük, hogy minden betűhöz annyiféleképpen juthatunk el, mint a fölötte és balra mellette található számok összege. (Ha valamelyik hiányzik, akkor csak a másik.) Az így kapott számtáblázat:

1	1	1	1	1
1	2	3	4	
1	3	6		
1	4			
1				

Így a TANUL szót összesen $1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16$-féleképpen olvashatjuk ki a táblázatból.

II. megoldás: Az olvasásnál 4 lépést kell tennünk. Helyettesítsünk minden lépést a J ill. L betűkkel aszerint, hogy abban a lépésben jobbra vagy lefelé haladtunk. Így a J és L betűkből álló négybetűs „szavakhoz” jutottunk. Könnyen átgondolható, hogy minden egyes elolvasásnak megfelel egy ilyen „szó”, illetve minden ilyen „szó” egyértelműen megad egy elolvasást. Például a JLJJ szó a következő kiolvasást határozza meg:

$$\begin{array}{ccccccccc} T & \to & A & & N & & U & & L \\ & & \downarrow & & & & & & \\ A & & N & \to & U & \to & L & & \\ N & & U & & L & & & & \\ U & & L & & & & & & \\ L & & & & & & & & \end{array}$$

Így annyi elolvasási lehetőség van, ahány ilyen négybetűs szó képezhető. Ezek száma, mivel minden betűt kétféleképpen választhatunk meg: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$.

3050. Kövessük a 3049. feladat megoldásának gondolatmenetét! A kiolvasások száma: 32.

3051. Kövessük a 3049. feladat megoldásának gondolatmenetét! A kiolvasások száma: 64.

3052. *a)* 900 000 *b)* $9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 531\,441$

c) A nulla nem kerülhet az első helyiértékre, így 5-féle lehetőségünk van a leírására. A többi helyiértékre a többi 9 számjegy bármelyike kerülhet. Így az esetek száma: $5 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 295\,245$.

3053. $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9000$

3054. *a)* Bármely két pont különböző egyenest határoz meg. Így az esetek száma: $\binom{6}{2} = 15$.

b) Bármely három pont különböző háromszöget határoz meg, így a háromszögek száma: $\binom{6}{3} = 20$.

3055. Annyi kézfogás történt, ahányféle módon az öt ember közül kettő kiválasztható. Ez $\binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$.

3056. *a)* Egyelemű 4 db, kételemű 6 db, háromelemű 4 db.

b) 5; 10; 10; 5 *c)* 6; 15; 20; 15; 6

3057. {}; {1}; {2}; {3}; {1; 2}; {1; 3}; {2; 3}; {1; 2; 3}

3058. A 3057. feladat megoldásában leírt halmazok, és még azok, amelyek az előző halmazokból úgy keletkeznek, hogy mindegyikhez hozzávesszük a 4-et.

3059. $\binom{8}{2} = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28$ mérkőzésre került sor.

3060. *a)* $\binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ *b)* $\binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ *c)* $\binom{6}{2} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$

d) $\binom{17}{2} = \frac{17 \cdot 16}{2} = 136$

3061. $\binom{12}{2} = \frac{12 \cdot 11}{2} = 66$

3062. $\binom{8}{2} = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28$

3063. Bármely két egyenesnek legfeljebb 1 metszéspontja lehet, így a válaszok:

a) $\binom{3}{2} = 3$ *b)* $\binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ *c)* $\binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$

d) $\binom{10}{2} = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45$

3064. Az 1; 2; ...; 21 számok közül két különbözőt $\binom{21}{2} = \frac{21 \cdot 20}{2} = 210$ -féleképpen lehet kiválasztani. Így 210 db szelvény megfelelő kitöltésével elérhető, hogy biztosan legyen „telitalálatos” szelvényünk.

3065. Az 1; 2; ...; 45 számok közül két különbözőt $\binom{45}{2} = \frac{45 \cdot 44}{2} = 990$ -féleképpen lehet kiválasztani. Ha tehát 990 db szelvényt különböző módon kitöltenek, akkor nem lehet olyan számpárt találni, amely ne szerepelne valamelyik szelvényen. Így PICURKA országnak legfeljebb 989 lakosa van.

3066. $\binom{9}{2} = \frac{9 \cdot 8}{2} = 36$

3067. Annyi tízjegyű szám képezhető, ahányféleképpen a tíz helyiérték közül kiválasztható kettő, ahová a 2 db 2-es számjegy kerül. Ez $\binom{10}{2} = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45$ számot jelent.

3068. Egy n oldalú konvex sokszögnek ($n \geqq 4$) $\frac{n(n-3)}{2}$ átlója van. Ugyanis minden csúcsból ($n - 3$) db átló indul ki, hiszen nem indul átló a két szomszédhoz. Így $n(n - 3)$ végpontja van a sokszög átlóinak. Mivel minden átló két csúcsot köt össze (két végpontja van), ezért az átlók száma $\frac{n(n-3)}{2}$ db. Ez alapján a válaszok:

a) 2 *b)* 5 *c)* 9 *d)* 170

3069. Legyen a társaság tagjainak száma x. Ekkor mindenki ($x - 1$) emberrel fog kezet, így összesen $\frac{x(x-1)}{2}$ kézfogásra kerül sor. (Ugyanis egy kézfogáshoz két ember tartozik.) Így feladatunk szerint: $\frac{x(x-1)}{2} = 21$. Innen: $x(x - 1) = 42$, tehát $x = 7$. A társaságnak tehát 7 tagja van.

3070. Legyen a csapatok száma x. Minden csapat $(x - 1)$ csapattal játszott, így az összes mérkőzések száma: $\frac{x(x-1)}{2}$. (Hiszen minden mérkőzéshez két csapat tartozik.) A feladat szerint: $\frac{x(x-1)}{2} = 28$. Innen: $x(x - 1) = 56$, azaz: $x = 8$. Tehát a bajnokságban 8 csapat szerepelt.

3071. Legyen az egyenesek száma x. Ekkor minden egyenesen $(x - 1)$ metszéspont alakul ki, így az összes metszéspontok száma: $\frac{x(x-1)}{2}$. (Hiszen egy metszéspont két egyenesen is rajta van.) A feladat szerint: $\frac{x(x-1)}{2} = 15$, innen $x(x - 1) = 30$, azaz $x = 6$. Tehát 6 egyenest rajzoltunk a papírlapra.

3072. Egy n oldalú konvex sokszögnek $\frac{n(n-3)}{2}$ átlója van. (Lásd a 3068. feladat megoldását!) A feladat feltételei szerint: $\frac{n(n-3)}{2} = 77$. Innen: $n(n - 3) = 154$, azaz: $n = 14$. Tehát a sokszög 14 oldalú.

3073. $\binom{6}{2} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$-féleképpen.

3074. Egy n elemű halmaznak $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ kételemű részhalmaza van. A feladat feltételei szerint $\frac{n(n-1)}{2} = 36$, így: $n(n - 1) = 72$. Innen kapjuk, hogy $n = 9$. Tehát a halmaznak 9 eleme van.

3075. *a)* $\binom{6}{3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{2 \cdot 3} = 20$ *b)* $\binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$

3076. $\binom{6}{3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{2 \cdot 3} = 20$ -féleképpen.

3077. *a)* $\binom{4}{3} = 4$ *b)* $\binom{5}{3} = 10$ *c)* $\binom{6}{3} = 20$ *d)* $\binom{7}{3} = 35$

3078. $\binom{7}{3} = 35$

3079. (Lásd a 3002., 3003., 3004. feladatok megoldását.)

a) $\binom{6}{1} = 6$ *b)* $\binom{6}{2} = 15$ *c)* $\binom{6}{3} = 20$

3080. $\binom{10}{3} = 120$

3081. $\binom{8}{3} = \binom{8}{5} = 56$

3082. Annyi különböző sorrendben húzhatjuk ki a hét golyót, ahányféleképpen a hét húzás közül kiválaszthatjuk azt a hármat, amelyben piros golyót húzunk. Az ilyen húzások száma: $\binom{7}{3} = 35$.

3083. Az első számjegy csak 1-es lehet. A további hét helyiérték közül ki kell jelölni azt a hármat, ahová a többi 1-es számjegyet írjuk. Ezt összesen $\binom{7}{3} = 35$ -féleképpen tehetjük meg, tehát 35 ilyen nyolcjegyű számot képezhetünk.

3084. Rakjuk le az öt piros golyót egymás után! Ekkor a fehér golyók vagy az öt golyó elé, vagy a piros golyók közé, vagy a piros golyók után kerülhetnek. Ez 6 helyet jelent a fehér golyók elhelyezésére, úgy hogy egy helyre legfeljebb egy fehér golyó kerülhet. Így a keresett sorrendek száma: $\binom{6}{2} = 15$.

3085. A 3084. feladat megoldásának gondolatmenete alapján a sorrendek száma: $\binom{6}{3} = 20$.

3086. *a)* $\binom{90}{5} = \frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 43\,949\,268$

b) $\binom{45}{6} = \frac{45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot 42 \cdot 41 \cdot 40}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 8\,145\,060$

3087. Egy n elemű halmaznak összesen 2^n db részhalmaza van. Ezt igazolhatjuk a következő módon: Írjuk le valamilyen sorrendben a halmaz elemeit. Ezek után egy tetszőleges részhalmazhoz hozzárendelhetünk egy n betűs „szót” a következőképpen:legyen a „szó” első betűje I, ha a sorban elsőként leírt elem szerepel a részhalmazban, és legyen az első betű N, ha nem szerepel a részhalmazban. Hasonlóan keletkezik a „szó” második betűje a másodikként leírt elemmel kapcsolatban, a harmadik betű a harmadikként leírt elemmel kapcsolatban, stb. Így minden részhalmazhoz különböző „szót” rendeltünk és fordítva, minden az I és N betűkből álló „szó” kijelöl egy részhalmazt. Így annyi részhalmaz van, ahány ilyen n betűből álló „szó” képezhető. Ezek száma pedig éppen 2^n db. Az előzőek alapján a feladat kérdéseire a következők a válaszok:

a) 4   *b)* 8   *c)* 16   *d)* 32

3088. A 9 szám közül kell 2; 3; ill. 4 mezőt kilyukasztani, így a beállítások száma:

a) $\binom{9}{2}=36$ *b)* $\binom{9}{3}=84$ *c)* $\binom{9}{4}=126$

3089. Az öt forduló után 4 pontot kétféle módon érhetett el a versenyző:

a) az egyik fordulóban kikapott a többiben győzött,

b) két fordulóban döntetlent ért el, a többiben győzött.

Mivel az elért eredmények sorrendjére is tekintettel vagyunk, ezért a versenyző az eredményét: $5+\binom{5}{2}=5+10=15$ -féle sorrendben érhette el.

3090. Ha az eredmények elérésének sorrendjét nem vesszük figyelembe, akkor a versenyző a 4 pontot háromféle módon szerezhette meg:

a) 4 fordulóban győzött, kettőben kikapott,

b) 2 fordulóban győzött, 4 fordulóban döntetlent ért el,

c) 3 fordulóban győzött, 2 fordulóban döntetlent ért el, egy fordulóban kikapott.

Ha az eredmények elérésének sorrendjére is tekintettel vagyunk, akkor az *a)* esetben $\binom{6}{2}=15$, a *b)* esetben $\binom{6}{2}=15$, a *c)* esetben $6\cdot\binom{5}{2}=60$ -féle sorrendben érhette el az eredményeket, így összesen 15 + 15 + 60 = 90-féleképpen szerezhette meg a 4 pontot.

3091. Vizsgáljuk meg András szempontjából, hogy milyen módon érhette el a 2,5 pontos teljesítményt! Erre három lehetőség adódik:

a) Kétszer győzött, kétszer vesztett és egy parti döntetlen lett.

b) Egyszer győzött, egyszer vesztett és három parti döntetlen lett.

c) Mind az öt parti döntetlen lett.

Vegyük ezután figyelembe az eredmények elérésének sorrendjét is!

a) Az eredmény $5\cdot\binom{4}{2}=30$ -féleképpen következhetett be, hiszen bármelyik játszma végződhetett döntetlenre, a maradék 4 játszma közül pedig $\binom{4}{2}$ -féleképpen választható ki az a kettő, amelyekben győzött.

b) Az eredmény 5 · 4 = 20-féleképpen következhetett be, hiszen bármelyik játszmát megnyerhette, ill. a maradék 4 játszma közül bármelyiket elveszíthette.

c) Az eredmény csak egyféle módon adódhat.

Összefoglalva: az eredmény 30 + 20 + 1 = 51-féle módon alakulhatott ki.

3092. Legyen a háromféle helyezés első, második, harmadik. Vizsgáljuk először azt, hogy hányféleképpen lehet két első helyezettje a versenynek! A négy versenyző közül bármelyik kettő lehetett első, ez $\binom{4}{2} = 6$ eset. Ezután a másik két versenyző kétféleképpen következhet, így a sorrendek száma: $6 \cdot 2 = 12$. Könnyen végiggondolható, hogy ugyanennyi sorrend adódik akkor is, ha két második, vagy ha két harmadik helyezettje van a versenynek. Így a magasugró versenynek 36-féle eredménye lehet.

3093. Az első sorban tetszőleges sorrendben helyezhetők el a színek, ez $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ esetet jelent. Ezután a második sort már csak kétféleképpen színezhetjük, végül a harmadik sor szinezése egyértelmű. Így összesen 12-féleképpen szinezhető ki a táblázat.

3094. Csak a pozitív osztók számát határozzuk meg!

a) Az osztók: 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30; tehát 8 osztója van a számnak.

b) Az osztók: 1, 2, 3, 4, 6, 12; tehát 6 osztója van a számnak.

c) Az osztók: 1, 2, 4, 8; tehát 4 osztója van a számnak.

d) Az osztók: 1, 2, 3, 5, 7, 6, 10, 14, 15, 21, 35, 30, 42, 70, 105, 210; tehát 16 osztója van a számnak.

e) Az osztók: 1, 2, 3, 5, 4, 6, 10, 12, 20, 15, 30, 60; tehát 12 osztója van a számnak.

f) Az osztók: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24; tehát 8 osztója van a számnak.

g) Az osztók: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36; tehát 9 osztója van a számnak.

3095. *a)* Az osztók száma rendre: 2; 3; 4; 5; 6; 7.

b) Az osztók száma rendre: 4; 6; 8; 10; 12; 14.

c) Az osztók száma rendre: 6; 9; 12; 15; 18; 21.

d) Az osztók száma rendre: 8; 12; 16; 20; 24; 28.

Megjegyzés: Általában igaz, hogy ha egy pozitív egész szám prímtényezős felbontása $p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{k_n}$ (ahol p_1; p_2; ...; p_n prímszámok; k_1; k_2; ...; k_n pozitív egészek), akkor a pozitív osztók száma: $(k_1 + 1) \cdot (k_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (k_n + 1)$.

3096. *a)* $540 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^1$, így a pozitív osztók száma: $(2 + 1)(3 + 1)(1 + 1) = 24$.

b) $2730 = 2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot 13^1$, így az osztók száma: $(1 + 1)^5 = 32$.

3097. Egy páros számnak legalább annyi páros osztója van, mint ahány páratlan. Ugyanis bármely páratlan osztóját 2-vel szorozva a szám egy páros osztójához jutunk, hiszen a kettő biztosan osztója a páros számnak. Ha a páros szám prímtényezős felbontásában a 2 többször is előfordul, akkor a páros osztók száma a nagyobb, hiszen ekkor van olyan páros osztója, amely nem egy páratlan osztó kétszeresével keletkezik (4). Ezek alapján elegendő a számok prímtényezős felbontásában a kettesek számát meghatározni.

a) $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$, ugyanannyi páros, mint amennyi páratlan osztója van.

b) $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$, a páros osztók száma több.

c) $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$, ugyanannyi páros, mint amennyi páratlan osztója van.

d) $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$, a páros osztók száma több.

e) $324 = 2^2 \cdot 3^4$, a páros osztók száma több.

3098. *a)* $48 = 3 \cdot 2^4$. A 48 azon osztói nem oszthatók 4-gyel, amelyek osztói a $3 \cdot 2 = 6$-nak. Ezek száma 4.

b) $120 = 5 \cdot 3 \cdot 2^3$. A 120 azon osztói nem oszthatók 4-gyel, amelyek osztói az $5 \cdot 3 \cdot 2$-nek. Ezek száma 8.

c) Azok az osztók nem oszthatók 15-tel, amelyek osztói a $2^2 \cdot 3^2$-nek vagy $2^2 \cdot 5$-nek. ezek száma 9, ill. 6, de itt kétszer számoltuk a 2^2 osztóit. Így a 15-tel nem osztható osztók száma: $9 + 6 - 3 = 12$.

II. megoldás: Az összes osztók száma $3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$. Ezek közük azok oszthatók 15-tel, amelyek a $2^2 \cdot 3$ valamelyik osztójának 15-szörösei. Ezek száma $3 \cdot 2 = 6$. Tehát a 15-tel nem osztható osztók száma $18 - 6 = 12$.

3099. *a)* $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$. Tehát 2^7-nel osztható a szorzat.

Ha a pozitív egész számok szorzatát vizsgáljuk, akkor minden második számban van kettes prímtényező, minden negyedik számban két kettes prímtényező, minden nyolcadik számban 3 kettes prímtényező, ... stb. Ezek alapján a kettes prímtényezők száma az egyes feladatokban:

b) $7 + 3 + 1 = 11$. Így a szorzat 2^{11}-nel osztható.

c) $15 + 7 + 3 + 1 = 26$. Így a szorzat 2^{26}-nal osztható.

d) $50 + 25 + 12 + 6 + 3 + 1 = 97$. Így a szorzat 2^{97}-nel osztható.

3100. Ha az x; y; z számok sorrendjétől eltekintünk, akkor három megoldás található:

$$1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

Ha a számok sorrendjére is tekintettel vagyunk, akkor a megoldások száma: $1 + 6 + 3 = 10$.

3101. Az első lépcsőfokra csak egyféleképpen juthatunk fel, a másodikra már kétféleképpen. Ezután minden egyes lépcsőfokra a megelőzőről vagy az azt megelőzőről léphetünk. Így a feljutások száma megegyezik a megelőző két lépcsőfokra való feljutások számának összegével. Ezek alapján a válaszok:

a) $1 + 2 = 3$ *b)* $2 + 3 = 5$ *c)* $3 + 5 = 8$ *d)* $5 + 8 = 13$

e) Folytatva az előző sort: $n = 7$ esetén $8 + 13 = 21$; $n = 8$ esetén $13 + 21 = 34$; $n = 9$ esetén $21 + 34 = 55$; így $n = 10$ esetén $34 + 55 = 89$.

3102. *a)* Az elhelyezkedések száma $\binom{6}{3} = 20$, hiszen ki kell választani három tanulót, akik az első szobába kerülnek.

b) Ha a szobán belüli elhelyezkedéseket is figyelembe vesszük, azaz megkülönböztetjük a hat ágyat, akkor az elhelyezkedések száma: $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$, hiszen ennyiféle sorrendben helyezkedhetnek el a hat ágyon.

3103. A feltételeknek megfelelő háromjegyű számok száma: $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$. A számok összegében minden számjegy minden helyiértéken annyiszor szerepel, ahányféle módon a másik két helyiértékre a többieket elhelyezhetjük. Ezek száma $3 \cdot 2 = 6$. Tehát minden számjegy minden helyiértéken 6-szor szerepel. Így a számok összege: $6 \cdot (4 + 5 + 6 + 7) \cdot (100 + 10 + 1) = 6 \cdot 22 \cdot 111 = 14\,652$.

3104. A képezett ötjegyű számok akkor oszthatók 4-gyel, ha 12-re vagy ha 24-re végződnek. Ezek a számok: 12412; 14212; 21412; 24112; 41212; 42112; 11224; 12124; 21124. Összesen tehát 9 ilyen szám képezhető. Ezek összege: 199 944.

Halmazokkal kapcsolatos megszámlálási feladatok

3105. Ha összeadjuk az angolul és németül tanulók számát, akkor a mindkét nyelvet tanulókat kétszer számoltuk meg. Így az összeg annyival lesz több az osztály létszámánál, mint ahányan mindkét nyelvet tanulják. Tehát az angolul is és németül is tanulók száma: $18 + 16 - 26 = 8$.

Megjegyzés: Általában igaz, hogy ha A és B két véges halmaz, akkor $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$. (Itt $|X|$ az X halmaz elemeinek számát jelenti.)

II. megoldás: A 26 fős osztályban 18-an tanulnak angolul, így $26 - 18 = 8$ tanuló van, aki csak németül tanul. Mivel a németet 16-an tanulják, ezért $16 - 8 = 8$ tanuló angolul is tanul. Tehát mindkét nyelvet 8 tanuló tanulja.

3106. A feltételek szerint 20 tanuló jár valamelyik szakkörbe. Mivel 12-en matematika szakkörbe járnak, ezért: $20 - 12 = 8$ tanuló van, aki csak rajzszakkörbe jár. Így mindkét szakkörbe $14 - 8 = 6$ tanuló jár.

3107. 12 tanulónak volt ötöse matematikából, közülük 6 tanuló magyarból is ötöst kapott, így csak matematikából $12 - 6 = 6$ tanuló kapott ötöst. Hasonlóan gondolkodva adódik, hogy csak magyarból 10 tanulónak volt ötöse. tehát azok a tanulók, akik vagy matematikából, vagy magyarból ötöst kaptak összesen $6 + 10 + 6 = 22$-en voltak. Mivel 8 tanulónak egyik tantárgyból sem sikerült ötöst szereznie, ezért az osztály létszáma: $22 + 8 = 30$.

3108. Az osztály tanulóinak $\frac{2}{3}$ része tanul angolul, ezért $\frac{1}{3}$ része csak németül tanul. Így mindkét nyelvet az osztály tanulóinak $\frac{3}{4}-\frac{1}{3}=\frac{5}{12}$ része tanulja. Így:

$\frac{5}{12}$ rész = 10 tanuló

$\frac{1}{12}$ rész = 2 tanuló

Tehát az osztály létszáma 24 tanuló.

3109. Az osztály tanulóinak $\frac{2}{5}$ része tanul németül, így $\frac{3}{5}$ része csak franciául tanul. Ebből következik, hogy mindkét nyelvet az osztály tanulóinak $\frac{2}{3}-\frac{3}{5}=\frac{1}{15}$ része tanulja. Ezért az osztály tanulóinak $\frac{1}{15}$ része = 2 tanuló, tehát az osztály létszáma 30 tanuló.

3110. Az első feladatot a résztvevők 70 %-a oldotta meg, így a résztvevők 30 %-a csak a második feladatot oldotta meg helyesen. Ebből következik, hogy mindkét feladatot a résztvevők 80 % – 30 % = 50 % oldotta meg helyesen. Mivel ez a feltétel szerint 13 tanulót jelent, ezért a versenyen 26-an vettek részt.

3111. A 30 tanuló $\frac{1}{5}$ része 6 tanuló, 30 %-a pedig 9 tanuló. Tehát 6 tanuló volt ötös matematikából, 9 tanuló pedig történelemből. Mivel 4 tanuló mindkét tantárgyból ötöst kapott, ezért csak matematikából 2, csak történelemből 5 tanuló volt ötös. Összesen tehát: $2 + 5 + 4 = 11$ tanuló volt, aki vagy matematikából, vagy történelemből ötöst kapott. Vagyis $30 - 11 = 19$ tanuló volt, aki egyik tárgyból sem szerzett ötöst.

3112. Mivel 17 tanulónak volt ötöse a két tárgy valamelyikéből, és 11 tanulónak matematikából, ezért 6 olyan tanuló volt az osztályban, akiknek csak magyarból sikerült ötöst szerezni. Emellett 4 tanulónak mindkét tárgyból ötöse volt, így magyarból összesen $4 + 6 = 10$ tanuló kapott ötöst.

3113. A feltételek szerint $25 - 14 = 11$ tanulónak a két tantárgy valamelyikéből sikerült ötöst szerezni. Mivel matematikából 7 tanuló kapott ötöst, ezért csak fizikából $11 - 7 = 4$ tanulónak volt ötöse. Így összesen 9 tanuló volt, akik fizikából ötöst kaptak.

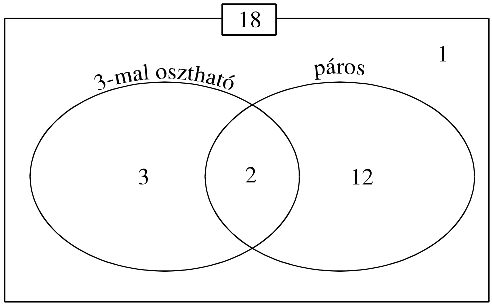
3114. Szemléltessük a táblára írt számokat Venn-diagrammal!

a) 3 olyan szám van, amely páratlan **és** osztható 3-mal.

b) 1 olyan szám van, amely páratlan **és** nem osztható 3-mal.

c) 6 olyan szám van, amely páratlan **vagy** osztható 3-mal.

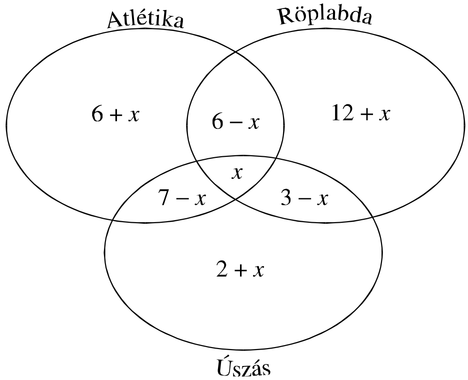
d) 16 olyan szám van, amely páratlan **vagy** nem osztható 3-mal.



3115. Az osztály tanulóinak $\frac{5}{6}$ része 25 tanuló, 40 %-a 12 tanuló. Tehát 25 tanuló közepesnél nem rosszabb, így 5 tanuló van, aki közepesnél rosszabb. Tehát a közepes tanulók száma: $12 - 5 = 7$.

3116. Ha összeadjuk a hegedülni és zongorázni tanuló diákok számát, akkor az osztály létszámnál 5-tel kapunk többet, hiszen öten mindkét hangszeren tanulnak. Ez az összeg tehát 27. Másrészt kétszer annyian tanulnak hegedülni, mint zongorázni, így a 27 harmadrésze lesz azon tanulók száma, akik zongorázni tanulnak. Összefoglalva: 9 tanuló zongorázik és 18 tanuló hegedül ebben az osztályban.

3117. Legyen azon tanulók száma, akik mindhárom sportággal foglalkoznak x. Készítsünk Venn-diagrammot, és írjuk be az egyes helyekre a feltételeknek megfelelő számokat!



Mivel mindenki foglalkozik valamelyik sportággal, ezért a diagrammon szereplő számok összege egyenlő az osztály létszámával. Így:

$$6 + x + 6 - x + 12 + x + 7 - x + \\ + x + 3 - x + 2 + x = 38$$

Innen:

$$x = 2$$

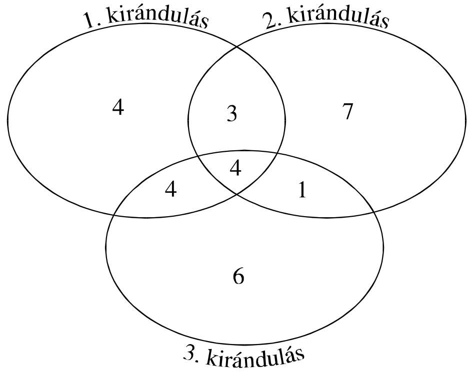
Tehát két tanuló űzi mindhárom sportágat.

3118. Szemléltessük az egyes kiránduláson résztvevők számát Venn-diagrammon, és írjuk be az egyes helyekre a feltételeknek megfelelő számértékeket!

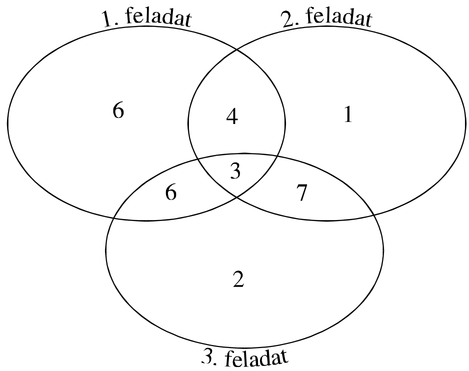
Összeadva az egyes helyeken szereplő számokat:

$$4 + 3 + 7 + 4 + 4 + 1 + 6 = 29$$

Tehát az osztály tanulói közül 29-en vettek részt legalább egy kiránduláson.

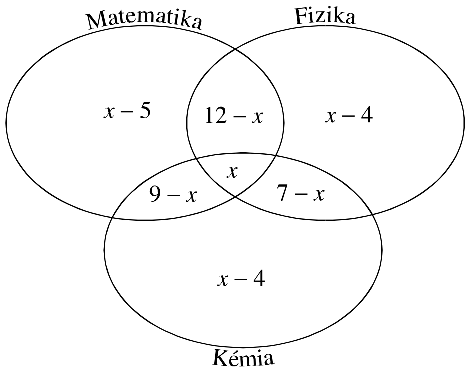


3119. Szemléltessük az egyes feladatok megoldóinak számát Venn-diagrammon, és írjuk be a feltételben szereplő adatokat! Összeadva az egyes helyeken szereplő számokat: $6 + 4 + 1 + 3 + 6 + 7 + 2 = 29$. Tehát 29-en oldottak meg legalább egy feladatot, így 1 tanuló volt, akinek egyik feladatot sem sikerült megoldania.



3120. A feltételből következik, hogy pontosan két kiránduláson $130 - 60 = 70$ tanuló vett részt. Ha összeadjuk azon tanulók számát, akik egy-egy kiránduláson rész vettek, akkor kétszer számoltuk azokat, akik pontosan két kiránduláson voltak és háromszor azokat, akik mindhárom kiránduláson részt vettek. Így legalább egy kiránduláson: $320 + 280 + 350 - 70 - 2 \cdot 60 = 760$ tanuló vett részt.

3121. Jelöljük x-el azon tanulók számát, akik mindhárom versenyen részt vettek! Készítsünk Venn-diagrammot az egyes versenyen résztvevő tanulókról, és írjuk be a feltételekből adódó számokat a megfelelő helyekre! Mivel minden tanuló részt vett valamelyik versenyen, ezért a szereplő számok összege 20.



$$x - 5 + 12 - x + x - 4 + x + \\ + 9 - x + 7 - x + x - 4 = 20$$

Innen:

$$x = 5$$

Így adódik, hogy nem volt olyan tanuló, aki csak matematikából indult, illetve 5 olyan tanuló volt, aki mindhárom versenyen részt vett.

3122. Ha összeadjuk az egy-egy nyelvet tanulók számát, akkor a pontosan két nyelvet tanulókat kétszer, a mindhárom nyelvet tanulókat háromszor számoltuk meg. Jelölje x azon tanulók számát, akik mindhárom nyelvet tanulják! Így:

$$16 + 18 + 14 = 30 + 16 + 2x$$

Innen:

$$x = 1$$

Tehát 1 tanuló van az osztályban, aki mind a három nyelvet tanulja.

Valószínűségszámítás

3123. Határozzuk meg, hogy a kísérlet lehetséges kimenetelei közül melyekben következik be az A; B illetve C esemény! Az A esemény következik be, ha:

1. dobás	1	1	2	2	3	1
2. dobás	1	2	1	2	1	3

Ez 6 lehetőség.

A B esemény következik be, ha:

1. dobás	2	6	5	3	4	3	6	5	4	6	4	5	6	5	6
2. dobás	6	2	3	5	4	6	3	4	5	4	6	5	5	6	6

Ez 15 lehetőség.

A C esemény következik be, ha:

1. dobás	1	4	2	3	1	5	2	4	3	1	6	2	5	3	4
2. dobás	4	1	3	2	5	1	4	2	3	6	1	5	2	4	3

Ez 15 lehetőség.

Vagyis a *B* és a *C* eseményt a kísérletnek 15-15 kimenetele valósítja meg, míg az *A* eseményt csak 6. Úgy is fogalmazhatunk, hogy a *B* és a *C* esemény egyforma valószínűséggel következik be, és ez a valószínűség nagyobb az A esemény bekövetkezésének valószínűségénél. Így fogadni a *B* vagy a *C* esemény bekövetkezésére érdemes.

3124. Jelöljük az *a) b) c) d) e)* pontban leírt eseményeket rendre *A*; *B*; *C*; *D*; *E* betűkkel. Használjuk a továbbiakban egy *X* esemény valószínűségének jelölésére a *P*(*X*) írásmódot! A feladatban leírt kísérletnek összesen 36 kimenetele van, hiszen 36-féle kétjegyű számot kaphatunk ha a kísérletet elvégezzük. Számoljuk össze, hogy hány kétjegyű szám tesz eleget ezek közül az egyes pontokban leírt feltételeknek!

a) 6 ilyen kétjegyű szám van, hiszen másodikra hatféle eredményt kaphatunk és ezek mindegyike kerülhet a második helyiértékre. Így az esemény valószínűsége: $P(A)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$.

b) 6 ilyen kétjegyű számot kaphatunk, hiszen ha elsőre 6-ot dobunk, akkor a második dobás után mindig ilyen kétjegyű szám keletkezik. Így az esemény valószínűsége: $P(B)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$.

c) Páros számot akkor kapunk, ha a második dobás 2; 4 vagy 6, az első pedig tetszőleges. Így ilyen kétjegyű szám $6 \cdot 3 = 18$ alakulhat ki. Tehát az esemény valószínűsége: $P(C)=\frac{18}{36}=\frac{1}{2}$.

d) A hárommal való oszthatóság feltétele, hogy a számjegyek összege legyen osztható 3-mal. Könnyen ellenőrízhető, hogy bármely első dobás után kétféle második dobással kaphatunk 3-mal osztható kétjegyű számot. (Pl.: ha az első dobás 1, akkor másodikra 2 vagy 5, ha az első dobás 2, akkor másodikra 1 vagy 4, ... esetén adódik hárommal osztható kétjegyű szám). Így $6 \cdot 2 = 12$ ilyen kétjegyű szám alakulhat ki, tehát az esemény valószínűsége: $P(D)=\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$.

e) Az előálló kétjegyű számok között 6 olyan van, amelyek számjegyei egyformák, tehát 30 kétjegyű számban lesznek különbözőek a számjegyek. Így az esemény valószínűsége: $P(E)=\frac{30}{36}=\frac{5}{6}$.

3125. A kísérletnek $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ kimenetele van, hiszen minden húzásnál 3-féle színű golyó adódhat. Azok a kimenetelek felelnek meg, amelyben a három húzásnál különböző színű golyók adódnak. Ezek száma annyi, ahányféleképpen a három színt sorban ki lehet húzni. Ezek száma: $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$, hiszen az elsőre húzott színt nem húzhatjuk másodikra, ill. harmadikra már csak a kimaradó színt húzhatjuk. Ezzel az esemény valószínűsége: $\frac{6}{27} = \frac{2}{9}$.

3126. Ha a dobozban 5 fehér és x piros golyó van, akkor a fehér golyó kihúzásának valószínűsége: $\frac{5}{x+5}$. Ezzel az egyes kérdésekre adott válaszok:

a) 5 piros golyót, hiszen $\frac{1}{2} = \frac{5}{10}$

b) 10 piros golyót, hiszen $\frac{1}{3} = \frac{5}{15}$

c) 15 piros golyót, hiszen $\frac{1}{4} = \frac{5}{20}$

d) 95 piros golyót, hiszen $\frac{1}{20} = \frac{5}{100}$

3127. A kísérletnek $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$ különböző kimenetele lehet.

a) 5-tel osztható számot akkor kapunk, ha az utolsó dobás eredménye 5-ös, az első kettő tetszőleges. Ilyen háromjegyű szám $6 \cdot 6 = 36$ adódhat. Így az esemény valószínűsége: $\frac{36}{216} = \frac{1}{6}$.

b) Páratlan számot akkor kapunk, ha a harmadik dobás eredménye 1; 3 vagy 5, az első kettő tetszőleges. Ilyen háromjegyű szám $6 \cdot 6 \cdot 3 = 108$ alakulhat ki, így az esemény valószínűsége: $\frac{108}{216} = \frac{1}{2}$.

3128. A kísérletnek $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$ különböző kimenetele lehet.

a) A dobott számok összege kétféleképpen lehet páros:

(1) minden dobás eredménye páros

(2) egyik dobás eredménye páros, a másik kettő páratlan.

Az (1) eset $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$-féleképpen valósulhat meg, hiszen minden dobásnál 3-féle páros számot dobhatunk.

A (2) eset $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$-féleképpen valósulhat meg, hiszen bármelyik dobás lehet páros, illetve mind a páros, mind a páratlan dobás háromféleképpen következhet be.

Így összesen $27 + 81 = 108$ esetben lesz a dobott számok összege páros. Tehát az esemény valószínűsége $\frac{108}{216} = \frac{1}{2}$.

Megjegyzés: Azt a tényt, hogy ugyanannyi páros, mint páratlan összegű kimenetele van a kísérletnek egyszerűbben is beláthatjuk. Ugyanis bármi is volt az első két dobás eredménye, ezek összegét a harmadik dobás 3-féle eredményével párosra, 3-féle eredményével páratlanra alakíthatjuk. (Pl.: ha az első két dobott szám összege páratlan, akkor 1-est, 3-ast vagy 5-öst dobva páros összeget, 2-est, 4-est vagy 6-ost dobva páratlan összeget kapunk). Ebből pedig következik, hogy a kimenetelek fele páros összeget ad, így a valószínűség $\frac{1}{2}$.

b) Az *a)* rész megjegyzésében leírt gondolatmenet alapján könnyen beláthatjuk, hogy az esemény valószínűsége $\frac{1}{3}$. Legyen ugyanis az első két dobás eredménye tetszőleges! Ha ezek összege osztható 3-mal, akkor 3-ast vagy 6-ost dobva 3-mal osztható összeget kapunk. Ha ezek összege 3-mal osztva 1 maradékot ad, akkor 2-est vagy 5-öst dobva 3-mal osztható összeget kapunk. Végül ha ezek összege 2 maradékot ad 3-mal osztva, akkor 1-est vagy 4-est dobva kapunk 3-mal osztható összeget. Vagyis az összes kimenetelnek a harmadrészében 3-mal osztható összeg adódik, így az esemény valószínűsége $\frac{1}{3}$.

c) A dobott számok összege legalább 3, legfeljebb 18, így a következő prímszámok állhatnak elő összegként: 3; 5; 7; 11; 13; 17. Vizsgáljuk meg először a dobások sorrendjétől eltekintve, hogy milyen módon állhatnak elő ezek az összegek a három dobás eredményéből:

$3 = 1 + 1 + 1$

$5 = 1 + 1 + 3 = 1 + 2 + 2$

$7 = 1 + 1 + 5 = 1 + 2 + 4 = 1 + 3 + 3 = 2 + 2 + 3$

$11 = 1 + 4 + 6 = 1 + 5 + 5 = 2 + 3 + 6 = 2 + 4 + 5 = 3 + 3 + 5 = 3 + 4 + 4$

$13 = 1 + 6 + 6 = 2 + 5 + 6 = 3 + 4 + 6 = 3 + 5 + 5 = 4 + 4 + 5$

$17 = 5 + 6 + 6$

Vegyük ezután figyelembe a dobások sorrendjét is!

Ekkor a 3-as: egyféleképpen;
az 5-ös: $3 + 3 = 6$-féleképpen;
a 7-es: $3 + 6 + 3 + 3 = 15$-féleképpen;
a 11-es: $6 + 3 + 6 + 6 + 3 + 3 = 27$-féleképpen;
a 13-as: $3 + 6 + 6 + 3 + 3 = 21$-féleképpen;
a 17-es: 3-féleképpen jöhet létre.

Összefoglalva: a kimenetelek közül $1 + 6 + 15 + 27 + 21 + 3 = 73$ ad prímszám-összeget. Tehát az esemény valószínűsége: $\frac{73}{216} \approx 0{,}338$.

3129. A *c)* pontban írt esemény valószínűsége a legnagyobb, az *a)* pontban írt esemény valószínűsége a legkisebb.

3130. A dobozban található 4 golyó közül 2 golyót hatféleképpen választhatunk ki. Ezen kiválasztások közül két esetben kapunk azonos színű golyót, így a *b)* pontban írt esemény a valószínűbb. (Az azonos színű golyók húzásának valószínűsége $\frac{1}{3}$, a különböző színű golyók választásának valószínűsége $\frac{2}{3}$.)

3131. A 6 golyó közül 2 golyót 15-féleképpen választhatunk ki. Azonos színű golyókat akkor húzunk, ha vagy a 3 fehér, vagy a 3 piros golyó közül veszünk ki kettőt. Mindkét esetben 3-3-féleképpen választhatunk, így az azonos színű golyók húzásának valószínűsége $\frac{6}{15} = \frac{2}{5}$. Tehát a különböző színű golyók húzásának valószínűsége a nagyobb.

3132. A kísérletnek $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ különböző kimenetele lehet, tehát ennyiféle háromjegyű számot kaphatunk.

a) 5-tel osztható számot akkor kapunk, ha az utolsóként húzott szám az ötös. Az ilyen húzássorozatok száma: $4 \cdot 3 = 12$, így az esemény valószínűsége $\frac{12}{60} = \frac{1}{5}$.

b) Hárommal osztható szám akkor adódik, ha a kihúzott három számjegy összege osztható 3-mal. Ez csak akkor következik be, ha a kihúzott számok (sorrendtől eltekintve) az 1; 2; 3 vagy a 3; 4; 5 vagy az 1; 3; 5 vagy a 2; 3; 4. Ha a húzás sorrendjét is figyelembe vesszük, akkor ez $4 \cdot 6 = 24$-féle háromjegyű számot jelent, így az esemény valószínűsége: $\frac{24}{60} = \frac{2}{5}$.

c) Ahhoz, hogy 4-gyel osztható számot kapjunk az utolsó két húzásnak az eredménye: vagy az 1; 2, vagy a 3; 2, vagy az 5; 2, vagy a 2; 4. Előre a kimaradó 3 szám bármelyike adódhat, így a néggyel osztható háromjegyű kimenetelek száma: $3 \cdot 4 = 12$. Ekkor az esemény valószínűsége: $\frac{12}{60} = \frac{1}{5}$.

d) 25-tel osztható háromjegyű szám csak akkor adódhat, ha az utolsó két húzás eredménye 2; 5. Így ilyen háromjegyű szám 3 van, tehát az esemény valószínűsége: $\frac{3}{60} = \frac{1}{20}$.

3133. A kísérletnek $10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$ különböző kimenetele lehet. Hogy a kihúzott legkisebb szám legalább 7 legyen, ahhoz minden húzásra legalább 7-et kell húzni. Az ilyen húzássorozatok száma: $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$. Tehát az esemény valószínűsége: $\frac{64}{1000} = \frac{8}{125}$.

3134. A kísérletnek $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ kimenetele van. Ahhoz, hogy a kihúzott golyók piros-fehér-zöld színben kövessék egymást, elsőre a két piros közül, másodikra a két fehér közül, harmadikra a két zöld közül kell húzni. Az ilyen húzássorozatok száma: $2 \cdot 2 \cdot 2 =$ $= 8$. Tehát az esemény valószínűsége: $\frac{8}{120} = \frac{1}{15}$.

3135. Minden dobásnál 36-féle kimenetel lehetséges, így a kísérlet különböző kimeneteleinek száma: $36^3 = 46\,656$. Számoljuk meg először azokat a kimeneteleket, amelyekben nem dobunk egyszer sem két hatost! Ekkor minden dobásnál 35-féle esemény adódhat, így az ilyen kimenetelek száma: $35^3 = 42\,875$. vagyis azon kimenetelek száma, amelyekben legalább egyszer két hatost dobtunk $46\,656 - 42\,875 = 3781$. Így az esemény valószínűsége: $\frac{3781}{46\,656} \approx 0{,}081$.

3136. Az összes lehetséges kimenetelek száma: $2^5 = 32$, így az esemény valószínűsége: $\frac{2}{32} = \frac{1}{16}$.

3137. A kísérletben 6 golyó közül választunk ki 2 golyót, ezért a különböző lehetséges kimenetelek száma 15. Azonos színű golyókat akkor kapunk, ha vagy a 4 fehér közül választunk ki kettőt, vagy kihúzzuk a két piros golyót. Az ilyen húzások száma $6 + 1 = 7$, tehát annak valószínűsége, hogy két azonos színű golyót húzunk $\frac{7}{15}$.

3138. A kísérletben 8 golyó közül választunk ki 2 golyót, ezért a különböző lehetséges kimenetelek száma 28. Azonos színű golyókat akkor kapunk, ha vagy az 5 fehér közül választunk ki kettőt, vagy kihúzzuk a két piros golyót. Az ilyen húzások száma $10 + 1 = 11$. Tehát annak a valószínűsége, hogy két azonos színű golyót húzunk $\frac{11}{28}$.

3139. A 9 golyó közül kihúzunk egymás után három golyót, így a különböző lehetséges kimenetelek száma $9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$.

a) Azoknak a húzássorozatoknak a száma, amelyekben az első kihúzott golyó piros, a második fehér, a harmadik zöld színű golyó: $3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$. Így az esemény valószínűsége: $\frac{24}{504} = \frac{1}{21} \approx 0{,}0476$.

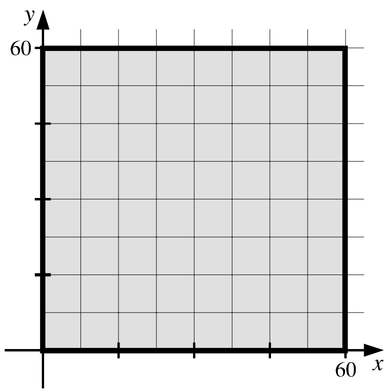
b) Három azonos színű golyó úgy adódhat, ha vagy a 4 fehér színű golyóból húzunk ki egymás után hármat, vagy a 3 piros golyót húzzuk ki egymás után. Az ilyen húzássorozatok száma: $4 \cdot 3 \cdot 2 + 3 \cdot 2 \cdot 1 = 30$. Tehát az esemény valószínűsége $\frac{30}{504} = \frac{5}{84} \approx 0{,}0595$.

3140. Mivel az egyik dobozban 8, a másikban 10 golyó található, ezért a kísérlet lehetséges kimeneteleinek száma $8 \cdot 10 = 80$.

a) Két piros golyót úgy kapunk, ha mindkét dobozból a piros golyók közül húzunk ki egyet-egyet. Az ilyen húzások száma $5 \cdot 3 = 15$, ezért az esemény valószínűsége $\frac{15}{80} = \frac{3}{16}$.

b) Hasonlóan gondolkodva adódik, hogy az esemény valószínűsége $\frac{21}{80}$.

3141. Tegyük fel, hogy András 17 óra x perckor, Béla 17 óra y perckor érkezik a fagyizó elé! Ábrázoljuk ezt az eseményt a sík $(x; y)$ pontjával! Mivel $0 \leqq x \leqq 60$ és $0 \leqq y \leqq 60$, ezért az összes események halmaza a koordináta-rendszerben egy négyzet pontjai.



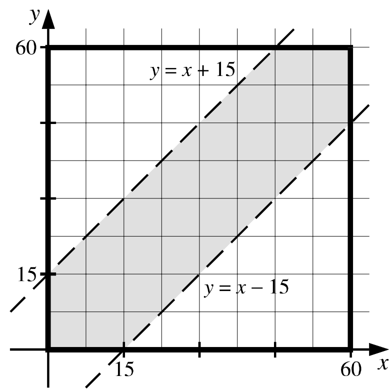
Találkozás akkor jön létre, ha:

$$|y - x| \leqq 15$$

azaz:

$$-15 \leqq y - x \leqq 15$$

$$x - 15 \leqq y \leqq x + 15$$



Ez azt jelenti, hogy a találkozáshoz tartozó pontok az előbbi négyzet azon pontjai, amelyek az $y = x - 15$ és az $y = x + 15$ egyenletű egyenesek között helyezkednek el.

Ezzel a találkozás valószínűségét értelmezhetjük úgy, mint az előző ábrán besatírozott területnek és a négyzet területének hányadosa. A négyzet területe: $60 \cdot 60 = 3600$ egység. A vonalkázott rész területét megkaphatjuk, ha a négyzet területéből kivonjuk a kimaradó két háromszög területét. Így a vonalkázott rész területe:

$$3600 - 2 \cdot \frac{45 \cdot 45}{2} = 3600 - 2025 = 1575 \text{ egység.}$$

Tehát modellünk alapján annak valószínűsége, hogy a korábban érkezőnek nem kell 15 percnél tovább várakozni:

$$P = \frac{1575}{3600} = 0{,}4375$$

TARTALOM