



11.5. KOORDINÁTA-GEOMETRIA

Vektorok a koordináta-rendszerben. Műveletek koordinátaikkal adott vektorokkal (emlékeztető) – megoldások

3555 $\vec{a} = 1 \cdot \mathbf{i} + 4 \cdot \mathbf{j}$, $\vec{a}(1; 4)$; $\vec{b} = -5 \cdot \mathbf{i} + 2 \cdot \mathbf{j}$, $\vec{b}(-5; 2)$; $\vec{c} = -3 \cdot \mathbf{i} - 2 \cdot \mathbf{j}$, $\vec{c}(-3; -2)$;
 $\vec{d} = -2 \cdot \mathbf{i} + 5 \cdot \mathbf{j}$, $\vec{d}(-2; 5)$; $\vec{e} = 4 \cdot \mathbf{i} + 0 \cdot \mathbf{j}$, $\vec{e}(4; 0)$; $\vec{f} = 3 \cdot \mathbf{i} - 2 \cdot \mathbf{j}$, $\vec{f}(3; -2)$.

3556 a) $(-1; 2)$; b) $(3; -8)$; c) $(2; -6)$; d) $(6; -15)$;
e) $(8; -21)$; f) $\left(-\frac{7}{2}; 9\right)$; g) $(15; -40)$; h) $\left(\frac{23}{2}; -31\right)$.

3557 a) $6 \cdot \mathbf{i} + 0 \cdot \mathbf{j}$; b) $2 \cdot \mathbf{i} + 4 \cdot \mathbf{j}$; c) $-4 \cdot \mathbf{i} + 4 \cdot \mathbf{j}$; d) $0 \cdot \mathbf{i} + 0 \cdot \mathbf{j}$.

3558 a) $\sqrt{2}$; b) $\sqrt{13}$; c) 5; d) $\frac{\sqrt{26}}{2}$;
e) 1; f) $\sqrt{a^2 + b^2}$; g) $\sqrt{5}$; h) $\sqrt{6}$;
i) $\sqrt{2 \cdot (a + b)}$.

3559 a) $|\vec{a}| = 85$; b) $|\vec{b}| = 97$; c) $|\vec{c}| = 89$; d) $|\vec{d}| = 29$; e) $|\vec{e}| = 34$.

Mindegyik vektor koordinátáinak abszolút értéke egy-egy pitagoraszai számhármass két tagja, a harmadik tag éppen a vektor abszolút értéke.

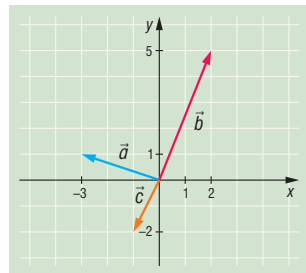
3560 a) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; b) $\left(\frac{2 \cdot \sqrt{13}}{13}; \frac{3 \cdot \sqrt{13}}{13}\right)$;
c) $\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}; -\frac{2 \cdot \sqrt{5}}{5}\right)$; d) $\left(\sqrt{\frac{2}{5}}; \sqrt{\frac{3}{5}}\right)$.

3561 A helyvektorok az ábrán láthatók.

A vektorok koordinátái a $+90^\circ$ -os, illetve a -90° -os forgatások után:

a) $(-1; -3)$, $(1; 3)$;
b) $(-5; 2)$, $(5; -2)$;
c) $(2; -1)$, $(-2; 1)$.

3562 a) -5; b) 5; c) -5;
d) -10; e) -45; f) 85.



3563 a) Mivel $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, ezért a vektorok derékszöget zárnak be egymással.

b) A két vektor hegyesszöget zár be, mivel $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 > 0$.

c) A vektorok tompaszöget zárnak be egymással, mivel skaláris szorzatuk $-\frac{5}{2}$.

d) A két vektor derékszöget zár be, mivel skaláris szorzatuk 0.



- 3564** a) Mivel $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$, ezért az AB és az AC szakaszok merőlegesek egymásra, így az ABC háromszög derékszögű. A derékszög az A csúcsnál található.
 b) A derékszög a C csúcsnál van.
 c) A derékszög a C csúcsnál van.

- 3565** a) A C pont helyvektorára:

$$\vec{c} = 3\vec{b} - 2\vec{a} = 3(-\mathbf{i} + 4\mathbf{j}) - 2(\mathbf{i} - 2\mathbf{j}) = -5\mathbf{i} + 16\mathbf{j}.$$

Ezek alapján a pontok koordinátái:

$$A(1; -2), \quad B(-1; 4), \quad C(-5; 16).$$

- b) Mivel $\overrightarrow{AB} = -2\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$, valamint $\overrightarrow{AC} = -6\mathbf{i} + 18\mathbf{j}$, ezért $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB}$, ami igazolja, hogy a három pont egy egyenesre illeszkedik.

- 3566** a) Ha a mozgó pont helyvektora a megfigyelés kezdetekor \vec{a} , a következő másodpercben pedig \vec{b} , akkor a sebességvektor:

$$\vec{v} = \vec{b} - \vec{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j},$$

így a sebességvektor koordinátái $\vec{v}(2; 1)$.

- b) A megfigyelés kezdetét követő harmadik másodpercben a test helyvektora:

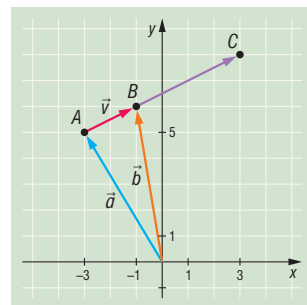
$$\vec{c} = \vec{a} + 3\vec{v}.$$

A műveletek elvégzése után kapjuk, hogy a test a $C(3; 8)$ pontban tartózkodik.

- c) A $D(11; 12)$ pontra teljesül, hogy

$$\overrightarrow{AD} = 14\mathbf{i} + 7\mathbf{j} = 7\vec{v},$$

ami azt jelenti, hogy az adott ponton a test a megfigyelés kezdetét követő 7. másodpercben halad át.



- 3567** A két vektor pontosan akkor merőleges egymásra, ha skaláris szorzatuk 0. A két vektor skaláris szorzata a koordinátáik segítségével:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -(\sqrt{2} + 2) + \sqrt{2} \cdot \alpha = 0,$$

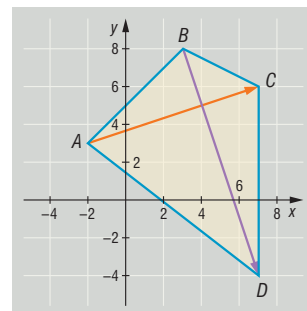
amiből α -t kifejezve:

$$\alpha = \frac{\sqrt{2} + 2}{\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}.$$

- 3568** Számítsuk ki a négyszög átlóvektorainak koordinátáit: $\overrightarrow{AC}(9; 3)$, illetve $\overrightarrow{BD}(4; -12)$. Mivel a két vektor skaláris szorzata:

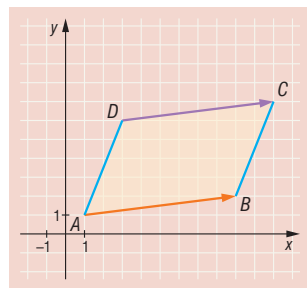
$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 9 \cdot 4 + 3 \cdot (-12) = 0,$$

ezért a két átló valóban merőleges egymásra.



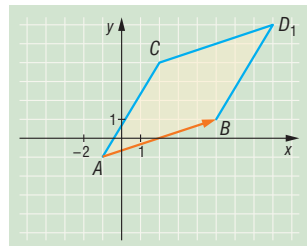


3569 A négyszög \overrightarrow{AB} , illetve \overrightarrow{DC} oldalvektorainak koordinátáit kiszámolva láthatjuk, hogy mindkét vektor koordinátái $(8; 1)$. Eredményünk azt jelenti, hogy az $ABCD$ négyszögben két szemkötti oldal ugyanolyan hosszú és párhuzamos, ezért a négyszög valóban paralelogramma.

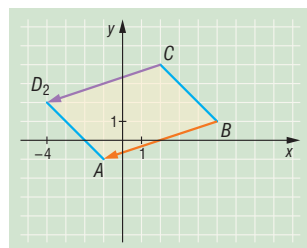


3570 A megadott pontokat jelölje rendre A , B és C . A feladatnak három megoldása van. Két olyan megoldást kapunk, amelyekben az AB szakasz a paralelogrammának egyik oldala. Ezekben a paralelogrammákban az egyik oldalvektor $\overrightarrow{AB}(6; 2)$.

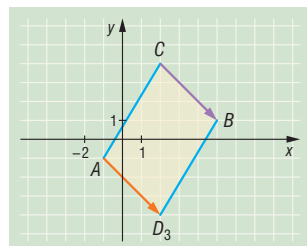
Az ábra azt az esetet mutatja, amelyben a BC szakasz átló. Ekkor $\overrightarrow{CD_1} = \overrightarrow{AB}$, amiből $D_1(8; 6)$.



A következő ábra azt a paralelogrammát mutatja, amelyben az AB , valamint a BC szakaszok is a paralelogramma egy-egy oldalát alkotják. Ekkor $\overrightarrow{CD_2} = \overrightarrow{BA}$, és ezért $D_2(-4; 2)$.



Végül még egy megoldás adódik, amelyben az AB szakasz a paralelogrammának átlója. Ekkor $\overrightarrow{AD_3} = \overrightarrow{CB}(3; -3)$, amiből egyszerű számolással kapjuk, hogy $D_3(2; -4)$.



3571 a) A keresett összegvektor első koordinátája:

$$\sqrt{1} + (\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{4} - \sqrt{3}) + \dots + (\sqrt{2008} - \sqrt{2007}) + (\sqrt{2009} - \sqrt{2008}).$$

Ha alaposabban szemügyre vesszük az összeg tagjait, akkor láthatjuk, hogy az első helyen álló $\sqrt{1}$, valamint az első zárójelben szereplő második tag „kiejt egymást”, csakúgy mint az első, illetve a második zárójelekben szereplő $\sqrt{2}$, illetve $-\sqrt{2}$. Ha a többi tagot is párba állítjuk, akkor igazából csak a $\sqrt{2009}$ -nek nem találunk párt, az összes többi tag „kiesik” az összegből. Ebből adódóan az összegvektor első koordinátája $\sqrt{2009}$.

A második koordinátát illetően hasonlóan járhatunk el. A megfelelő koordináta „hosszú alakja”:

$$\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4} + \sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2009} + \sqrt{2008}} + \frac{1}{\sqrt{2010} + \sqrt{2009}}.$$



Ha a fenti összegben minden egyes tag nevezőjét gyöktelenítjük, akkor azt kapjuk, hogy:

$$\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{1}} = \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{1}} \cdot \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1}}{\sqrt{2} - \sqrt{1}} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1}}{2 - 1} = \sqrt{2} - \sqrt{1},$$

$$\frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{3 - 2} = \sqrt{3} - \sqrt{2},$$

⋮

$$\frac{1}{\sqrt{2010} + \sqrt{2009}} = \frac{1}{\sqrt{2010} + \sqrt{2009}} \cdot \frac{\sqrt{2010} - \sqrt{2009}}{\sqrt{2010} - \sqrt{2009}} = \frac{\sqrt{2010} - \sqrt{2009}}{2010 - 2009} = \sqrt{2010} - \sqrt{2009}.$$

Eredményeink alapján a keresett vektor második koordinátája tehát a következő alakban írható fel:

$$(\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{4} - \sqrt{3}) + \dots + (\sqrt{2009} - \sqrt{2008}) + (\sqrt{2010} - \sqrt{2009}).$$

Az összeg feltűnő hasonlóságot mutat a vektor első koordinátájánál szereplő összeggel, csak itt most az első zárójelben szereplő $-\sqrt{1}$ -nek, valamint az utolsó zárójelben található $\sqrt{2010}$ -nek nincs párja, így az összegvektor második koordinátája $\sqrt{2010} - 1$.

A keresett összeg koordinátái tehát:

$$(\sqrt{2009}; \sqrt{2010} - 1).$$

b) Mivel $\sqrt{2009} > \sqrt{2010} - 1$, ezért a megfelelő pont az x tengelyhez van közelebb.

Két pont távolsága. Két vektor hajlásszöge. Területszámítási alkalmazások – megoldások

3572 a) 3; b) 5; c) 5; d) 13; e) $\frac{\sqrt{29}}{3}$; f) 2.

3573 a) 3; b) 5; c) 13; d) $2 \cdot \sqrt{34}$; e) $\sqrt{6}$; f) $2 \cdot \sqrt{3}$;
g) $\frac{7 \cdot \sqrt{2}}{2}$; h) $\frac{\sqrt{26}}{6}$.

3574 a) $AB = AC = \sqrt{50}$; b) $AB = AC = \sqrt{34}$; c) $AB = AC = \sqrt{20}$.

A c) feladatban szereplő háromszög derékszögű, mert $\overrightarrow{AB}(4; 2)$ és $\overrightarrow{AC}(2; -4)$.

3575 a) A pont illeszkedik a körre. b) A pont illeszkedik a körre.
c) A pont nem illeszkedik a körre. d) A pont illeszkedik a körre.

3576 a) $AB = 2$, $BC = 3,6$, $AC = 3$, a háromszög területe 8,6.
b) $AB = 23,7$, $BC = 13,3$, $AC = 16,1$, a háromszög területe 53,1.

3577 a) Az ilyen tulajdonságú pontok két, az x tengellyel párhuzamos egyenesen helyezkednek el, attól 3 egység távolságra. A megfelelő $(x; y)$ pontokra $y = 3$ vagy $y = -3$ teljesül.
b) Ezúttal az y tengellyel párhuzamos egyeneseken található a feltételnek megfelelő pontok. A koordinátáikra $x = 3$ vagy $x = -3$ teljesül.

3578 A megfelelő $(x; y)$ pontokra $x = y$ vagy $x = -y$ teljesül. A pontok a két tengely szögfelező egyenesre illeszkednek.



- 3579 a) $\alpha = 90,0^\circ$; b) $\alpha = 90,0^\circ$; c) $\alpha = 180,0^\circ$;
 d) $\alpha \approx 126,5^\circ$; e) $\alpha = 45,0^\circ$; f) $\alpha \approx 93,4^\circ$.

- 3580 a) $\alpha \approx 53,97^\circ$, $\beta \approx 79,70^\circ$, $\gamma \approx 46,33^\circ$;
 a háromszög területe 11.

- b) $\alpha \approx 32,70^\circ$, $\beta \approx 61,70^\circ$, $\gamma \approx 85,60^\circ$;
 a háromszög területe 26.

- c) $\alpha \approx 103,32^\circ$, $\beta \approx 48,18^\circ$, $\gamma \approx 28,50^\circ$;
 a háromszög területe 38.

- 3581 Használjuk az ábra jelöléseit: legyen $A(-7; 1)$, $B(3; 2)$ a két pont, melyeken a test a mozgás során áthaladt, továbbá $C(3; 0)$, $D(-7; 0)$, illetve $O(0; 0)$. A feladat kérdése alapján az ABO háromszög AB oldalához tartozó m magasságát kell kiszámolnunk.

Ehhez kiszámoljuk az AB szakasz hosszát, valamint az ABO háromszög területét. A két számolt értékből már könnyen megkaphatjuk a keresett magasságot.

Az ABO háromszög területét pl. úgy kaphatjuk meg, hogy az $ABCD$ trapéz területéből kivonjuk az AOD , valamint a BOC háromszögek területét. A számolásokat elvégezve kapjuk, hogy

$$T_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} \cdot CD = \frac{1 + 2}{2} \cdot 10 = 15;$$

$$T_{AOD} = \frac{AD \cdot OD}{2} = 3,5;$$

$$T_{BOC} = \frac{BC \cdot OC}{2} = 3;$$

$$T_{ABO} = T_{ABCD} - T_{AOD} - T_{BOC} = 15 - 3,5 - 3 = 8,5.$$

Az AB távolság:

$$AB = \sqrt{10^2 + 1^2} = \sqrt{101}.$$

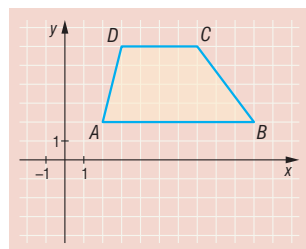
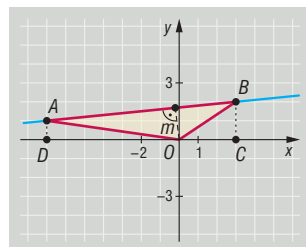
Ha most az ABO háromszög területét az AB oldal, valamint a hozzá tartozó m magasság segítségével írjuk fel, akkor

$$8,5 = \frac{\sqrt{101} \cdot m}{2} \Rightarrow m = \frac{17}{\sqrt{101}} \approx 1,69.$$

A mozgó test tehát 1,69 egység távolságra volt az origótól, amikor ahhoz legközelebb tartózkodott.

- 3582 a) A kapott négyszög trapéz, melynek alapjai párhuzamosak az x tengellyel. A négyszög területe:

$$T = \frac{8 + 4}{2} \cdot 4 = 24.$$





- b) Az ábra jelöléseivel $AB = AD = \sqrt{65}$, illetve $CB = CD = \sqrt{26}$, ezért az $ABCD$ négyszögben két-két szomszédos oldal meg egyezik, így a négyszög deltoid.

Az $ABCD$ deltoid területének kiszámolásához érdemes a négyszöget egy olyan téglalapba foglalni, amelynek oldalai párhuzamosak a tengelyekkel. A szóban forgó téglalap csúcsait az ábrán A, E, F , illetve G jelöli. A területszámítást megkönnyíti, ha az $AEFG$ téglalap területéből kivonjuk a deltoid körül „kimaradó” AED , DFC , CIB és AHB derékszögű háromszögek, valamint az $IGHB$ négyzet területét. Az egyes síkidomok területe:

$$\begin{aligned} T_{AEFG} &= 7 \cdot 9 = 63; & T_{AED} &= \frac{7 \cdot 4}{2} = 14; \\ T_{DFC} &= \frac{5 \cdot 1}{2} = 2,5; & T_{CIB} &= \frac{5 \cdot 1}{2} = 2,5; \\ T_{AHB} &= \frac{8 \cdot 1}{2} = 4; & T_{IGHB} &= 1. \end{aligned}$$

Az elmondottakból azonnal következik, hogy

$$T_{ABCD} = 63 - 14 - 2,5 - 2,5 - 4 - 1 = 39.$$

- c) A kapott négyszög paralelogramma, hiszen (az ábra jelöléseit használva) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}(1; 4)$, ami mutatja, hogy a négyszög BC és AD oldala párhuzamos egymással, valamint hosszuk is meg egyezik.

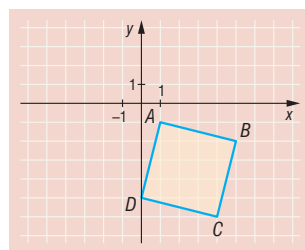
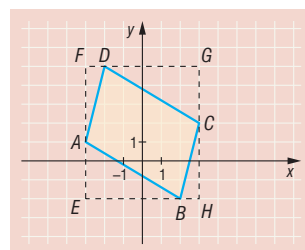
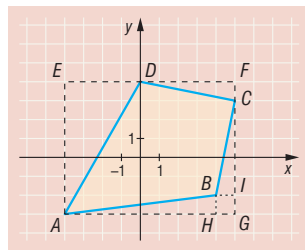
Az $ABCD$ paralelogramma területe a b) feladatban látott módszerrel számolható. A paralelogrammát ezúttal az $EFGH$ téglalapba „foglalhatjuk bele”, és a téglalap kimaradó részei háromszögek. A számításokat elvégezve az $ABCD$ paralelogramma területére 23 egység adódik.

- d) A kapott négyszög ezúttal négyzet. Ennek igazolásához vegyük észre, hogy $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}(4; -1)$, amiből látható, hogy a négyszög paralelogramma (van két párhuzamos és egyenlő hosszúságú oldala). Mivel $\overrightarrow{AD}(-1; -4)$, ezért

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 4 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-4) = 0,$$

ezért a négyszög A csúcsánál (és ebből kifolyólag a többi csúcsnál is) derékszög található, így az $ABCD$ négyszög valóban négyzet.

Mivel $AB = \sqrt{17}$, ezért az $ABCD$ négyzet területe 17 egység.



3583 Ha $PA = PB$, akkor

$$\sqrt{(3-x)^2 + (1-y)^2} = \sqrt{(-2-x)^2 + (5-y)^2}.$$

Mindkét oldalt négyzetre emelve, majd a kijelölt műveleteket, végül a lehetséges összevonásokat elvégezve azt kapjuk, hogy

$$10x - 8y + 19 = 0.$$

Mivel átalakításaink ekvivalensek voltak, ezért a fenti összefüggést csak a feltételeknek megfelelő P pont elégítheti ki.



3584 Mivel a feltételek alapján $PO = 5$, ezért

$$\sqrt{(2-x)^2 + (-1-y)^2} = 5.$$

Mindkét oldalt négyzetre emelve, majd a kijelölt műveleteket elvégezve kapjuk, hogy

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 = 0.$$

3585 a) Foglaljuk az ABC háromszöget az ábrán látható módon a tengelyekkel párhuzamos oldalakkal rendelkező $CDEF$ téglalapba. Mivel a téglalap oldalai 10 és 11 cm hosszúak, ezért

$$T_{CDEF} = 110 \text{ cm}^2.$$

Könnyen kiszámolható az ACD , ABE , BCF derékszögű háromszögek területe is:

$$T_{ACD} = 15 \text{ cm}^2, \quad T_{ABE} = 16 \text{ cm}^2 \quad \text{és} \quad T_{BCF} = 33 \text{ cm}^2.$$

Az ABC háromszög területe:

$$T_{ABC} = T_{CDEF} - T_{ACD} - T_{ABE} - T_{BCF} = 110 - 15 - 16 - 33 = 46 \text{ cm}^2.$$

b) A háromszög a legrövidebb oldalára állítva a legmagasabb. Mivel

$$\overrightarrow{AB}(8; -4), \quad \overrightarrow{BC}(-11; -6) \quad \text{és} \quad \overrightarrow{CA}(3; 10),$$

ezért az AB oldal a legrövidebb és

$$AB = \sqrt{8^2 + (-4)^2} = \sqrt{80} \approx 8,94 \text{ cm}.$$

c) A leghosszabb magasságot az ABC háromszög területéből számolhatjuk ki. Mivel

$$T_{ABC} = \frac{AB \cdot m_c}{2},$$

ezért

$$46 = \frac{\sqrt{80} \cdot m_c}{2}, \quad \text{amiből} \quad m_c = \frac{92}{\sqrt{80}} \approx 10,29 \text{ cm}.$$

d) Tegyük fel, hogy az AB -vel párhuzamos szakaszok az ábrának megfelelően az I , H , valamint a J és K pontokat metszik ki az ABC háromszög oldalából. Ekkor a CIH háromszög hasonló a CBA háromszöghöz, továbbá a hasonlóság aránya $\lambda = \frac{1}{3}$. Mivel hasonló síkidomok területének aránya a hasonlóság arányának négyzetével egyenlő, ezért a CIH háromszög, vagyis a piros sáv területe $\lambda^2 = \frac{1}{9}$ -szerese a CBA háromszög területének, ezért:

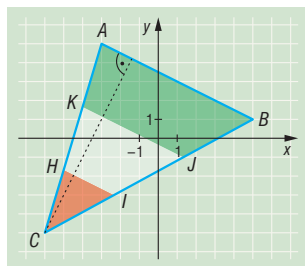
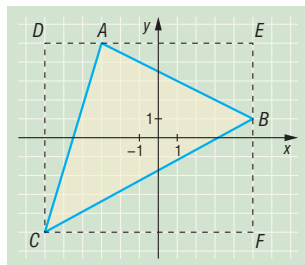
$$T_{CIH} = \frac{1}{9} \cdot 46 \approx 5,11 \text{ cm}^2.$$

A fentihez hasonló gondolatmenettel számíthatjuk ki a zöld sáv területét: a CJK háromszög hasonló a CBA háromszöghöz, a hasonlóság aránya $\frac{2}{3}$, amiből következik, hogy

$$T_{CJK} = \frac{4}{9} \cdot 46 \approx 20,44 \text{ cm}^2.$$

Így a zöld sáv területe:

$$46 - 20,44 = 25,56 \text{ cm}^2.$$





- 3586** a) A térképen kialakuló távolságokat a távolságképlettel számolhatjuk ki.

Az eredmények:

$$\begin{array}{lll} \text{Veszprém–Győr: } \sqrt{37}, & \text{Veszprém–Szeged: } 17, & \text{Veszprém–Debrecen: } \sqrt{641}, \\ \text{Győr–Szeged: } 2 \cdot \sqrt{113}, & \text{Győr–Debrecen: } 2 \cdot \sqrt{170}, & \text{Szeged–Debrecen: } 2 \cdot \sqrt{61}. \end{array}$$

A városok közti, kilométerben megadott távolságokat megkapjuk, ha a térképen mért távolságokat megszorozzuk 11-gyel.

Ezek alapján a távolságok egészre kerekített értékei:

$$\begin{array}{lll} \text{Veszprém–Győr: } 67 \text{ km}, & \text{Veszprém–Szeged: } 187 \text{ km}, & \text{Veszprém–Debrecen: } 278 \text{ km}, \\ \text{Győr–Szeged: } 234 \text{ km}, & \text{Győr–Debrecen: } 287 \text{ km}, & \text{Szeged–Debrecen: } 172 \text{ km}. \end{array}$$

- b) A koordinátákból észrevehető, hogy a koordináta-rendszer kezdőpontja a Győr–Szeged szakasz felezőpontjában van. Ez azt jelenti, hogy az origó körülbelül Dunaújvárosban lehet.

- 3587** a) Ha a P pont illeszkedik az x tengelyre, akkor koordinátáira $P(x; 0)$ teljesül. Ekkor

$$PA^2 + PB^2 = (x + 3)^2 + (0 - 2)^2 + (x - 5)^2 + (0 - 3)^2.$$

A műveletek elvégzése után kapjuk, hogy

$$PA^2 + PB^2 = 2x^2 - 4x + 47,$$

majd teljes négyzetté alakítás után

$$PA^2 + PB^2 = 2(x - 1)^2 + 45.$$

Mivel a négyzetes tag nemnegatív, ezért a kifejezés akkor lesz a lehető legkisebb, ha $x = 1$.

- b) A $PA^2 + PB^2$ összeg legkisebb értéke 45.

- 3588** a) Az asztal kicsinyített képének csúcspontjait az ábrának megfelelően A -val, B -vel és C -vel jelöltük:

$$A(0; 0), \quad B(3; 0) \quad \text{és} \quad C(2; 2).$$

Az ABC háromszög oldalai:

$$AB = 3, \quad BC = \sqrt{5} \quad \text{és} \quad AC = 2 \cdot \sqrt{2}.$$

Mivel 1 egység a valóságban 50 cm, ezért:

$$AB = 150 \text{ cm}, \quad BC = 50 \cdot \sqrt{5} \approx 111,8 \text{ cm} \quad \text{és} \quad AC = 100 \cdot \sqrt{2} \approx 141,4 \text{ cm}.$$

- b) A feladat arra kérdez rá, hogy mekkora az asztallap köré írt kör sugara. Az ABC háromszög

köré írt kör sugarát könnyen kiszámolhatjuk az $R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4 \cdot T}$ képlet segítségével, ahol T a három-

szög területét, a , b és c a háromszög oldalainak hosszát jelöli. A háromszög AB oldalát választva alapnak, a területre adódik:

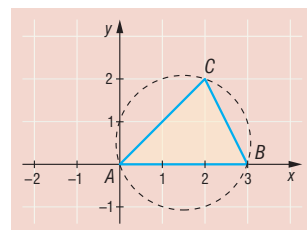
$$T = \frac{3 \cdot 2}{2} = 3 \text{ egység}.$$

Az a) feladat eredményeit felhasználva az ABC háromszög köré írható kör sugara:

$$R = \frac{3 \cdot \sqrt{5} \cdot 2 \cdot \sqrt{2}}{12} = \frac{\sqrt{10}}{2}.$$

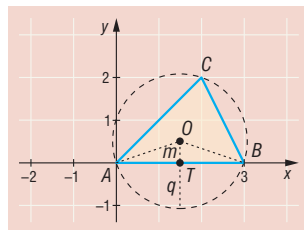
Figyelembe véve a kicsinyítés arányát, a kerek asztal sugara:

$$25 \cdot \sqrt{10} \approx 79,1 \text{ cm}.$$





- c) Az ABC háromszög leghosszabb oldala AB , ezért az AB oldalhoz illesztett körszelet (az ábrán q -val jelölt) magasságára kíváncsi a feladat. A keresett magasságot megkaphatjuk, ha az ABC háromszög köré írt kör sugarából kivonjuk az ABO egyenlő szárú háromszög AB oldalához tartozó m magasságát, ahol O a háromszög köré írt kör középpontját jelöli. Ha az ABO háromszög szövein forgó magasságának talppontját T jelöli, akkor az ATO derékszögű háromszögben $AO = R$, továbbá $AT = 1,5$, így Pitagorasz tételének alkalmazásával:



$$m = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{1}{2},$$

amiből

$$q = R - m = \frac{\sqrt{10}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{10} - 1}{2}.$$

A megfelelő toldalék magassága ezek alapján:

$$50 \cdot \frac{\sqrt{10} - 1}{2} \approx 54,1 \text{ cm}.$$

- d) Az asztallapon elhelyezhető legnagyobb kör alakú abrosz egybeesik az asztallapba írható körrel, így a feladat gyakorlatilag a beírt kör sugarát kérdezi. Az ABC háromszög beírható körének sugarát az $r = \frac{T}{s}$ képlettel számolhatjuk, ahol s a háromszög kerületének a felét jelöli.

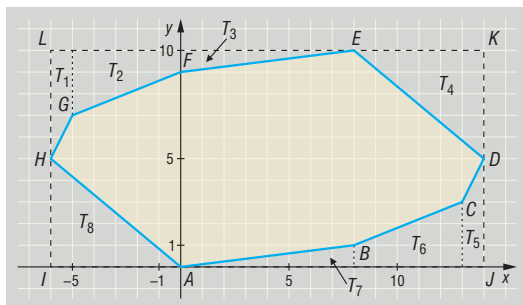
Az eredményeket behelyettesítve:

$$r = \frac{3 \cdot 2}{3 + \sqrt{5} + 2 \cdot \sqrt{2}} = \frac{6}{3 + \sqrt{5} + 2 \cdot \sqrt{2}}.$$

Az abrosz sugara így:

$$50 \cdot \frac{6}{3 + \sqrt{5} + 2 \cdot \sqrt{2}} \approx 37,2 \text{ cm}.$$

- 3589** a) Az erdő csúcspontjait jelöljük a megadás sorrendjében az A, B, C, D, E, F, G, H betűkkel. Foglaljuk bele a nyolcszöget abba a minimális területű téglalapba, amelynek oldalai párhuzamosak a koordinátatengelyekkel: az ábrán ennek a téglalapnak a csúcseit I, J, K és L jelöli. Látható, hogy a téglalap területe $20 \cdot 10 = 200$. A nyolcszög területét megkapjuk, ha az $IJKL$ téglalap területéből levonjuk azoknak a derékszögű háromszögeknek, illetve trapézoknak a területét, amelyek a nyolcszög egy-egy oldala mentén találhatók, és a nyolcszöggel együtt kitöltik az $IJKL$ téglalapot. Ezeknek a síkidomoknak a területét az ábrán T_1, \dots, T_8 jelöli. Egy-egy ilyen háromszög, illetve trapéz területe könnyedén kiszámolható.



Az eredmények:

$$T_1 = 4, \quad T_2 = 10, \quad T_3 = 4, \quad T_4 = 15, \quad T_5 = 4, \quad T_6 = 10, \quad T_7 = 4, \quad T_8 = 15.$$



Végül a nyolcszög területe:

$$T = 200 - 2 \cdot (4 + 10 + 4 + 15) = 134.$$

Az erdő és az ábrázolt nyolcszög hasonló egymáshoz, a hasonlóság aránya 5000. Mivel a hasonló síkidomok területének aránya a hasonlóság arányának négyzetével egyenlő, ezért az erdő területe:

$$134 \cdot 5000^2 \text{ cm}^2.$$

Mivel $1 \text{ ha} = 10^4 \text{ m}^2 = 10^8 \text{ cm}^2$, ezért az erdő területe:

$$\frac{134 \cdot 5000^2}{10^8} = 33,5 \text{ ha}.$$

- b) A számítások során felfigyelhettünk arra, hogy a nyolcszög szemközti oldalaihoz illeszkedő háromszögek, illetve trapézok egybevágók egymással. Ebből arra következtethetünk, hogy a nyolcszög középpontosan szimmetrikus. A szimmetria középpontja például az AE szakasz felezőpontja, vagyis a $(4; 5)$ pont. Egyszerű számolások mutatják, hogy ez a pont valóban megfelel a szemközti csúcsokat összekötő szakaszokat.

3590 a) $A(R; 0)$, $B(-R; 0)$, esetleg fordítva.

b) $\overrightarrow{CA}(R - c_1; -c_2)$, $\overrightarrow{CB}(-R - c_1; -c_2)$.

c) A \overrightarrow{CA} és \overrightarrow{CB} vektorok skaláris szorzatára:

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = (R - c_1) \cdot (-R - c_1) + (-c_2) \cdot (-c_2).$$

A kijelölt műveletek elvégzése után adódik:

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = -R^2 + c_1^2 + c_2^2.$$

Mivel a feltételek szerint a C pont az AB átmérőjű kör egy pontja, továbbá a kör középpontja az origó, ezért a C pont az origótól éppen R távolságra van, amit a C koordinátái segítségével úgy is megfogalmazhatunk, hogy

$$\sqrt{c_1^2 + c_2^2} = R, \quad \text{azaz} \quad c_1^2 + c_2^2 = R^2.$$

Eredményünket összehasonlítva a skaláris szorzat értékével láthatjuk, hogy

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = -R^2 + c_1^2 + c_2^2 = -R^2 + R^2 = 0.$$

- d) A c) feladat eredményéből következik, hogy a \overrightarrow{CA} és \overrightarrow{CB} vektorok merőlegesek egymásra, ami egyben azt is jelenti, hogy az ABC háromszög derékszögű. Ezzel beláttuk, hogy ha az AB átmérőjű kör egy $(A$ -tól és B -től különböző) C pontját összekötjük az átmérő két végpontjával, akkor derékszögű háromszög keletkezik, amelyben a derékszög a C csúcsnál található. Megadtuk tehát Thalész tételének egy koordináta-geometriai bizonyítását.

Szakasz osztópontjának koordinátái. A háromszög súlypontjának koordinátái – megoldások

3591 a) $(1; 3)$; b) $(-1; -1)$; c) $\left(-\frac{5}{6}; \frac{8}{15}\right)$; d) $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$; e) $\left(a^2 + b^2; \frac{a}{a^2 - b^2}\right)$.

3592 a) $A(4; 8)$; b) $A\left(-\frac{2}{3}; \frac{3}{5}\right)$; c) $A(2e - 1; 2f - 4)$.

3593 a) $(5; 5)$, $\left(\frac{13}{2}; \frac{13}{2}\right)$, $\left(\frac{7}{2}; \frac{7}{2}\right)$; b) $(3; 1)$, $\left(6; \frac{11}{2}\right)$, $\left(0; -\frac{7}{2}\right)$.

3594 a) $(4; -7)$; b) $(14; -11)$.



3595 a) (2013; 2005);

b) (2027; 1997).

3596 a) $\left(6; \frac{8}{3}\right)$ és $\left(9; \frac{10}{3}\right)$;

b) $\left(\frac{8}{3}; -7\right)$ és $\left(\frac{1}{3}; -6\right)$;

c) $\left(\frac{31}{135}; -\frac{22}{9}\right)$ és $\left(\frac{2}{135}; -\frac{8}{9}\right)$.

3597 a) $B(14; 9)$;

b) $B(5; -17)$.

3598 a) (1; 2);

b) (9; 4);

c) (13; 5);

d) (37; 11).

3599 A paralelogramma két hiányzó csúcsának koordinátái: (8; 3) és (-1; 2).

3600 A két hiányzó csúcs koordinátái: $B(4; 2)$ és $D(-5; 4)$.

3601 a) A feltételeknek két négyzet tesz eleget. A hiányzó csúcsok koordinátái az egyes esetekben:

(7; 9) és (-1; 11), illetve (3; -7) és (-5; -5).

Az első négyzet középpontja (2; 6), a másodiké pedig (0; -2).

b) A feladatnak egyetlen megoldása van. A hiányzó csúcsok (0; -2) és (2; 6). A négyzet középpontja (1; 2).

3602 a) Az oldalfelező pontok:

$$E(0; 1), \quad F\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right) \quad \text{és} \quad G\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right).$$

b) A háromszög oldalvektorai:

$$\overrightarrow{AB}(2; 4), \quad \overrightarrow{BC}(1; -5) \quad \text{és} \quad \overrightarrow{CA}(-3; 1).$$

A középvonalvektorok:

$$\overrightarrow{FE}\left(-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right), \quad \overrightarrow{GF}(1; 2) \quad \text{és} \quad \overrightarrow{EG}\left(\frac{1}{2}; -\frac{5}{2}\right).$$

c) Látható, hogy

$$\overrightarrow{FE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}, \quad \overrightarrow{GF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \quad \text{és} \quad \overrightarrow{EG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC},$$

ami mutatja, hogy a megfelelő középvonal és oldalvektor egymással valóban párhuzamos.

3603 a) (2; 3); b) (0; 0); c) $\left(\frac{19}{45}; \frac{5}{36}\right)$.

3604 a) $A(0; 2)$; b) $A(0; 6)$;

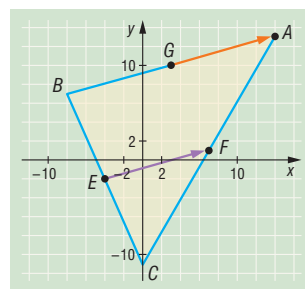
3605 a) Az oldalfelező pontok által meghatározott háromszög súlypontja: (2; 3).

b) Ha az ABC háromszög csúcspontjainak koordinátái $A(a_1; a_2)$, $B(b_1; b_2)$ és $C(c_1; c_2)$, valamint oldalfelező pontjai $E(-4; -2)$, $F(7; 1)$ és $G(3; 10)$, akkor az első koordinátákra a következő egyenletek írhatók fel:

$$\frac{a_1 + b_1}{2} = 3, \quad \frac{b_1 + c_1}{2} = -4, \quad \frac{a_1 + c_1}{2} = 7.$$

Az egyenletek megfelelő oldalait összeadva:

$$a_1 + b_1 + c_1 = 6, \quad \text{amiből} \quad a_1 + b_1 = 6 - c_1.$$





Az első egyenletbe visszahelyettesítve:

$$\frac{6-c_1}{2}=3, \text{ azaz } c_1=0.$$

Hasonló módszerrel kaphatjuk meg, hogy

$$a_1=14 \text{ és } b_1=-8.$$

A második koordinátákra felírható egyenletek:

$$\frac{a_2+b_2}{2}=10, \quad \frac{b_2+c_2}{2}=-2, \quad \frac{a_2+c_2}{2}=1.$$

Az egyenletrendszer megoldása:

$$a_2=13, \quad b_2=7 \text{ és } c_2=-11.$$

Az Alex által berajzolt háromszög csúcspontjai tehát:

$$A(14; 13), \quad B(-8; 7) \text{ és } C(0; -11).$$

Az ABC háromszög súlypontjának koordinátái: $S(2; 3)$.

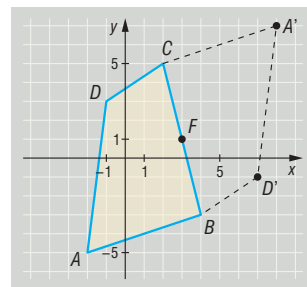
Megjegyzés: Az ABC háromszög csúcspontjait a következő észrevétel alapján is meghatározhatjuk. Az EF szakasz középvonal az ABC háromszögben, ezért EF párhuzamos AB -vel, továbbá hossza az AB hosszának fele. Ebből az is következik, hogy $\overline{GA} = \overline{EF}$. Mivel az \overline{EF} koordinátáira $\overline{EF}(11; 3)$, ezért az A pont helyvektora: $\vec{a} = \vec{g} + \overline{EF}$, ahol \vec{g} a G pont helyvektorát jelöli. A számítások elvégzése után $A(14; 13)$ adódik. A többi csúcs koordinátái hasonlóan számíthatók.

- c) A két háromszög súlypontja egybeesik. Indoklásként említhetjük, hogy az ABC háromszög S súlypontjára vonatkozó, $\lambda = -\frac{1}{2}$ arányú középpontos hasonlóság az ABC háromszöget az EFG háromszögbe viszi át. Mivel az S pont a transzformáció fixpontja, ezért a két háromszög súlypontja valóban egybeesik.

- 3606** a) Az $ABCD$ négyszög BC oldalának felezőpontja $F(3; 1)$. A tükrözés után a B pont képe C és a C pont képe B . Ha az A pont A' tükörképének koordinátái $A'(x; y)$, akkor felhasználva, hogy az AA' szakasznak F a felezőpontja, azt kapjuk, hogy

$$\frac{x+(-2)}{2}=3, \quad \frac{y+(-5)}{2}=1.$$

Az egyenletrendszer megoldásaként $A'(8; 7)$. Hasonló számolásokkal a D pont tükörképéként $D'(7; -1)$ adódik.



- b) Az $ABD'A'CD$ hatszög származtatásából adódóan középpontosan szimmetrikus, amiből azonnal következik, hogy a szemkötti oldalai párhuzamosak. Utóbbi állítás természetesen koordináta-geometriai eszközökkel is igazolható. Példaként: $\overline{AB}(6; 2)$ és $\overline{CA'}(6; 2)$, ami azt jelenti, hogy a két vektor megegyezik, így természetesen párhuzamosak is egymással.

- 3607** a) Az A, B és C pontok képe az OA, OB, OC szakaszt $1:1$ arányban osztó pontok lesznek. A képpontok koordinátái:

$$A'(1; 1), \quad B'\left(-\frac{3}{2}; -4\right), \quad C'\left(-3; \frac{1}{2}\right).$$

Az $A'B'C'$ háromszög O pontra vonatkozó tükörképe is megoldása a feladatnak. E pontok koordinátái:

$$A''(-9; -9), \quad B''\left(-\frac{13}{2}; -4\right), \quad C''\left(-5; -\frac{17}{2}\right).$$



- b) Ebben az esetben a képpontok az OA , OB , OC szakaszt $1:2$ arányban osztják. A képpontok koordinátái:

$$A'\left(-\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}\right), \quad B'\left(-\frac{7}{3}; -4\right), \quad C'\left(-\frac{10}{3}; -1\right).$$

Az $A'B'C'$ háromszög O pontra vonatkozó tükörképe is megoldása a feladatnak. E pontok koordinátái:

$$A''\left(-\frac{22}{3}; -\frac{22}{3}\right), \quad B''\left(-\frac{17}{3}; -4\right), \quad C''\left(-\frac{14}{3}; -7\right).$$

- 3608** a) Ha az A pont képe $A'(x; y)$, akkor az OA' szakasznak a felezőpontja A , azaz

$$\frac{x + (-4)}{2} = 6, \quad \frac{y + (-4)}{2} = 6,$$

amiből $A'(16; 16)$. Hasonló módszerrel: $B'(6; -4)$, illetve $C'(0; 14)$.

- b) Ebben az esetben az A pont $1:2$ arányban osztja az OA' szakaszt, azaz

$$\frac{2 \cdot (-4) + x}{3} = 6, \quad \frac{2 \cdot (-4) + y}{3} = 6,$$

és így $A'(26; 26)$. A másik két pontra $B'(11; -4)$, illetve $C'(2; 23)$ adódik.

- 3609** a) Az AB oldal felezőpontja: $E\left(\frac{a_1 + b_1}{2}; \frac{a_2 + b_2}{2}\right)$.

A BC oldal felezőpontja: $F\left(\frac{b_1 + c_1}{2}; \frac{b_2 + c_2}{2}\right)$.

Az AC oldal felezőpontja: $G\left(\frac{a_1 + c_1}{2}; \frac{a_2 + c_2}{2}\right)$.

- b) Példaként bemutatjuk, hogy EF párhuzamos az AC oldallal. Ehhez kiszámoljuk az \overrightarrow{EF} és az \overrightarrow{AC} vektorok koordinátáit. Látható, hogy

$$\overrightarrow{EF}\left(\frac{c_1 - a_1}{2}; \frac{c_2 - a_2}{2}\right), \quad \text{míg} \quad \overrightarrow{AC}(c_1 - a_1; c_2 - a_2).$$

A koordináták összehasonlítása után vegyük észre, hogy

$$\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC},$$

ami egyben mutatja, hogy a két vektor, és így persze a nekik megfelelő szakaszok is párhuzamosak egymással.

- c) Az állítás az $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC}$ összefüggésből azonnal következik.

- 3610** a) A paralelogramma átlói felezik egymást, ezért az AC szakasz és a BD szakasz felezőpontja egybeesik. Az AC szakasz felezőpontjának koordinátái:

$$\left(\frac{a_1 + c_1}{2}; \frac{a_2 + c_2}{2}\right),$$

míg ha a D pont koordinátái x , illetve y , akkor a BD szakasz felezőpontja

$$\left(\frac{b_1 + x}{2}; \frac{b_2 + y}{2}\right).$$



A két felezőpont megfelelő koordinátái egyenlők, ezért

$$\frac{a_1 + c_1}{2} = \frac{b_1 + x}{2}, \quad \frac{a_2 + c_2}{2} = \frac{b_2 + y}{2}.$$

Az egyenletrendszert megoldva adódik:

$$D(a_1 + c_1 - b_1; a_2 + c_2 - b_2).$$

- b) Paralelogramma középvonala alatt két szemközti oldal felezőpontját összekötő szakaszt értjük. Példaként megmutatjuk, hogy az AD és BC oldalak felezőpontját összekötő középvonal párhuzamos az AB oldallal. Az AD oldal felezőpontja:

$$E\left(\frac{2a_1 + c_1 - b_1}{2}; \frac{2a_2 + c_2 - b_2}{2}\right),$$

míg a BC oldalé:

$$F\left(\frac{b_1 + c_1}{2}; \frac{b_2 + c_2}{2}\right).$$

Az \overrightarrow{EF} koordinátáira $\overrightarrow{EF}(b_1 - a_1; b_2 - a_2)$ teljesül, amiről azonnal kiderül, hogy megegyezik az \overrightarrow{AB} koordinátáival. Eredményünket úgy is megfogalmazhatjuk, hogy az EF és AB szakaszok párhuzamosak egymással.

- c) A b) feladatban beláttuk, hogy $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB}$, amiből a feladat állítása nyilvánvaló módon következik.

- 3611** a) Példaként néhány szükséges és elegendő feltétel: egy négyszög akkor és csak akkor paralelogramma, ha

I. szemközti oldalai egyenlő hosszúak;

II. van két szemközti oldala, amelyek párhuzamosak és hosszuk egyenlő;

III. átlói felezik egymást;

IV. középpontosan szimmetrikus;

V. szemközti szögei megegyeznek.

- b) Az I. feltétel alapján:

$$AB = \sqrt{7^2 + 3^2} = \sqrt{58},$$

$$BC = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20},$$

$$CD = \sqrt{(-7)^2 + (-3)^2} = \sqrt{58},$$

$$DA = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2} = \sqrt{20}.$$

A szemközti oldalak valóban egyenlők.

A II. feltétel alapján:

$\overrightarrow{AB}(7; 3)$, továbbá $\overrightarrow{DC}(7; 3)$. Mivel a két oldalvektor koordinátái megegyeznek, ezért AB és CD párhuzamos és egyenlő hosszúságúak.

A III. feltétel alapján:

Az AC átló felezőpontja: $\left(\frac{4009}{2}; \frac{4021}{2}\right)$. Látható, hogy ez egyben a BD átló felezőpontja is, ezért az átlók valóban felezik egymást.

A IV. feltétel alapján:

A négyszög középpontosan szimmetrikus a $\left(\frac{4009}{2}; \frac{4021}{2}\right)$ pontra vonatkozóan.



Az V. feltétel alapján:

$\overrightarrow{AB}(7; 3)$, $\overrightarrow{AD}(2; 4)$. A két vektor skaláris szorzatára:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 7 \cdot 2 + 3 \cdot 4 = 26.$$

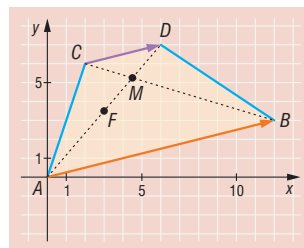
A skaláris szorzat definíciója alapján (α a két vektor hajlásszögét jelöli):

$$|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}| \cdot \cos \alpha = 26, \text{ amiből } \cos \alpha = \frac{26}{\sqrt{58} \cdot \sqrt{20}}.$$

Hasonló számolással ugyanezt az értéket kapjuk a \overrightarrow{CB} és \overrightarrow{CD} vektorok hajlásszögének koszinuszára is, ami igazolja, hogy a négyszög két szemközti szöge megegyezik. Ugyanígy számolással ellenőrizhető, hogy a másik két szemközti szög is egyenlő.

- 3612** a) Az ábra alapján valószínűsíthető, hogy az AB és CD oldalak párhuzamosak. A megfelelő vektorok koordinátáira: $\overrightarrow{AB}(12; 3)$ és $\overrightarrow{CD}(4; 1)$, ami mutatja, hogy $\overrightarrow{AB} = 3 \cdot \overrightarrow{CD}$.

Eredményünkből következik, hogy AB és CD valóban párhuzamos, ezért az $ABDC$ négyszög trapéz, amelyben a hosszabb alap háromszor akkora, mint a rövidebb.



- b) Az átlók hossza a koordináta-rendszerben:

$$AD = \sqrt{6^2 + 7^2} = \sqrt{85}, \text{ illetve } BC = \sqrt{(-10)^2 + 3^2} = \sqrt{109}.$$

A két út hossza a valóságban:

$$1000 \cdot (\sqrt{85} + \sqrt{109}) \approx 19660 \text{ méter, vagyis } 19,66 \text{ km.}$$

- c) Ismert elemi geometriai összefüggés alapján a trapéz átlói az alapok hosszának arányában osztják egymást. Az a) feladat eredménye alapján ez az arány 1 : 3, ezért az átlók M metszéspontja egybeesik az AD átló D -hez legközelebbi negyedelőpontjával. Az AD szakasz felezőpontja:

$$F\left(3; \frac{7}{2}\right),$$

így az FD szakasz M felezőpontja:

$$M\left(\frac{3+6}{2}; \frac{3,5+7}{2}\right), \text{ vagyis } M(4,5; 5,25).$$

- 3613** Alkalmazzuk az adott szakaszt adott arányban osztó pont koordinátáira vonatkozó összefüggéseket! Az eredmények az egyes esetekben:

$$a) P\left(\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right); \quad b) P\left(\frac{4}{5}; \frac{1}{5}\right); \quad c) P\left(\frac{10}{9}; \frac{7}{9}\right).$$

- 3614** Ha a B pont koordinátáira $B(x; y)$ teljesül, akkor a feltételek szerint a P pont koordinátái:

$$P\left(\frac{3 \cdot (-3) + 2x}{5}; \frac{3 \cdot 0 + 2y}{5}\right).$$

Mivel a P pont adott, így

$$\frac{3 \cdot (-3) + 2x}{5} = 1 \quad \text{és} \quad \frac{3 \cdot 0 + 2y}{5} = -2.$$

Az egyenletrendszer megoldása után azt kapjuk, hogy a B pont koordinátái: $B(7; -5)$.



- 3615 a) Az ABC háromszög oldalainak hossza:

$$AC = 3 \cdot \sqrt{2}, \quad BC = 5 \cdot \sqrt{2} \quad \text{és} \quad AB = \sqrt{68} = 2 \cdot \sqrt{17}.$$

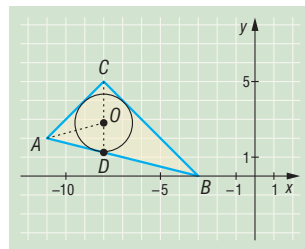
Vegyük észre, hogy $AC^2 + BC^2 = AB^2$ teljesül, ezért Pitagorasz tételének megfordítása alapján az ABC háromszög derékszögű, mégpedig a derékszög a C csúcsnál található.

- b) A Pista bácsi által tervezett ösvény éppen a C csúcsból induló szögfelező mentén húzódik. Eszerint az átfogóhoz tartozó szögfelező és az átfogó D metszéspontjának koordinátáit kell kiszámolnunk. A szögfelezőtétel alapján:

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AC}{BC} = \frac{3 \cdot \sqrt{2}}{5 \cdot \sqrt{2}} = \frac{3}{5},$$

vagyis a D pont az AB átfogót 3:5 arányban osztja. Az osztópont koordinátái alapján a D pont koordinátái:

$$D\left(-8; \frac{5}{4}\right).$$



- c) A mindhárom úttól ugyanolyan távolságra található pont egybeesik az ABC háromszög beírt körének középpontjával, ezért a feladat gyakorlatilag a beírt kör sugarára kérdez rá. A kör sugarát az $r = \frac{T}{s}$ összefüggésből számíthatjuk ki, ahol T az ABC háromszög területe, s pedig a háromszög kerületének fele. Mivel

$$T = \frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{3 \cdot \sqrt{2} \cdot 5 \cdot \sqrt{2}}{2} = 15,$$

továbbá

$$s = \frac{3 \cdot \sqrt{2} + 5 \cdot \sqrt{2} + \sqrt{68}}{2} = 4 \cdot \sqrt{2} + \sqrt{17},$$

ezért a beírt kör sugara

$$r = \frac{15}{4 \cdot \sqrt{2} + \sqrt{17}} = 4 \cdot \sqrt{2} - \sqrt{17} \approx 1,53 \text{ egység}.$$

- d) A beírt kör O középpontját az ABC háromszög szögfelezőinek metszéspontjaként kapjuk. Az A csúcsból induló szögfelező az ADC háromszögnek is szögfelezője, ezért az O pont koordinátáit a b) feladatban már megismert módszerrel számolhatjuk ki. Mivel az a) feladat alapján $AC = 3 \cdot \sqrt{2}$, továbbá

$$AD = \sqrt{3^2 + \left(-\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{3}{4} \cdot \sqrt{17},$$

ezért az O pont $(3 \cdot \sqrt{2}) : \left(\frac{3}{4} \cdot \sqrt{17}\right)$ arányban osztja a CD szakaszt. Az osztópont koordinátáira vonatkozó összefüggések alapján:

$$O\left(\frac{-8 \cdot \frac{3}{4} \cdot \sqrt{17} + (-8) \cdot 3 \cdot \sqrt{2}}{3 \cdot \sqrt{2} + \frac{3}{4} \cdot \sqrt{17}}; \frac{5 \cdot \frac{3}{4} \cdot \sqrt{17} + \frac{5}{4} \cdot 3 \cdot \sqrt{2}}{3 \cdot \sqrt{2} + \frac{3}{4} \cdot \sqrt{17}}\right),$$

amit kicsit „barátságosabb” alakban is felírhatunk:

$$O\left(-8; \frac{(\sqrt{17} + \sqrt{2}) \cdot (4 \cdot \sqrt{2} - \sqrt{17})}{3}\right).$$



- 3616** a) Az $ABCD$ négyszög csúcspontjai legyenek $A(a_1; a_2)$, $B(b_1; b_2)$, $C(c_1; c_2)$ és $D(d_1; d_2)$. Ha az AB oldal felezőpontja a $(-3; 1)$ pont, akkor

$$\frac{a_1 + b_1}{2} = -3 \quad \text{és} \quad \frac{a_2 + b_2}{2} = 1,$$

amiből $b_1 = -6 - a_1$ és $b_2 = 2 - a_2$, tehát $B(-6 - a_1; 2 - a_2)$. Mivel a BC oldal felezőpontja is ismert, ezért

$$\frac{-6 - a_1 + c_1}{2} = 2 \quad \text{és} \quad \frac{2 - a_2 + c_2}{2} = -2,$$

amiből a C pont koordinátái: $C(10 + a_1; -6 + a_2)$. Végül a CD oldal felezőpontjának koordinátáira

$$\frac{10 + a_1 + d_1}{2} = 3 \quad \text{és} \quad \frac{-6 + a_2 + d_2}{2} = 2,$$

és így $D(-4 - a_1; 10 - a_2)$. Eredményeink alapján az AD oldal H felezőpontjának koordinátáira:

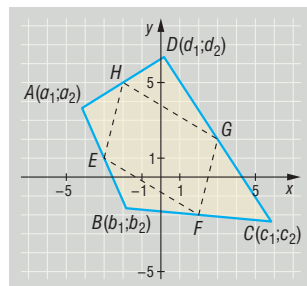
$$H\left(\frac{a_1 + (-4 - a_1)}{2}; \frac{a_2 + (10 - a_2)}{2}\right) = (-2; 5).$$

Megjegyzés: a számításokból az is kiderül, hogy végtelen sok olyan négyszög van, amelynek oldalfelező pontjai a megadott pontok; a négyszög csúcsait az A pont már egyértelműen meghatározza.

- b) Az $EFGH$ négyszög EG átlója felezőpontjának koordinátái:

$$\left(\frac{-3 + 3}{2}; \frac{1 + 2}{2}\right) = \left(0; \frac{3}{2}\right).$$

Egyszerű számolás mutatja, hogy az FH átló felezőpontja szintén ugyanez a pont. Ez azt jelenti, hogy az $EFGH$ négyszög átlói felezik egymást, így a négyszög paralelogramma.



- 3617** a) Az $ABCD$ négyszög csúcspontjai legyenek $A(a_1; a_2)$, $B(b_1; b_2)$, $C(c_1; c_2)$ és $D(d_1; d_2)$. Ekkor az oldalfelező pontok:

$$E\left(\frac{a_1 + b_1}{2}; \frac{a_2 + b_2}{2}\right), \quad F\left(\frac{b_1 + c_1}{2}; \frac{b_2 + c_2}{2}\right),$$

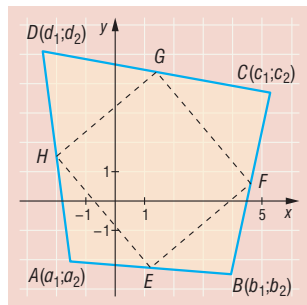
$$G\left(\frac{c_1 + d_1}{2}; \frac{c_2 + d_2}{2}\right), \quad H\left(\frac{a_1 + d_1}{2}; \frac{a_2 + d_2}{2}\right).$$

Többféleképpen igazolható, hogy az $EFGH$ négyszög paralelogramma. Például megmutathatjuk, hogy az EF és HG oldalak párhuzamosak és egyenlő hosszúak.

A megfelelő vektorok koordinátái:

$$\overrightarrow{EF}\left(\frac{c_1 - a_1}{2}; \frac{c_2 - a_2}{2}\right) \quad \text{és} \quad \overrightarrow{HG}\left(\frac{c_1 - a_1}{2}; \frac{c_2 - a_2}{2}\right).$$

A két vektor koordinátái megegyeznek, ami igazolja, hogy az $EFGH$ négyszög paralelogramma.





b) Az a) feladat jelöléseit fogjuk használni.

Az oldalfelező pontok által közrefogott paralelogramma középpontja egybeesik az EG szakasz O felezőpontjával.

Ezek alapján a paralelogramma középpontjának koordinátái felírhatók:

$$O\left(\frac{a_1 + b_1 + c_1 + d_1}{4}; \frac{a_2 + b_2 + c_2 + d_2}{4}\right).$$

A BD , illetve az AC átló felezőpontja:

$$P\left(\frac{b_1 + d_1}{2}; \frac{b_2 + d_2}{2}\right) \text{ illetve } Q\left(\frac{a_1 + c_1}{2}; \frac{a_2 + c_2}{2}\right).$$

A két átló felezőpontját összekötő PQ szakasz felezőpontja pedig:

$$\left(\frac{a_1 + b_1 + c_1 + d_1}{4}; \frac{a_2 + b_2 + c_2 + d_2}{4}\right).$$

Mivel a kapott pont koordinátái szemlátomást megegyeznek az $EFGH$ paralelogramma O középpontjának koordinátaival, ezért a feladatban szereplő két pont valóban egybeesik.

c) Vegyük fel a koordináta-rendszerben a trapézt úgy, hogy az $ABCD$ trapéz AB alapja illeszkedjen az x tengelyre, A csúcsa pedig az origóba essen.

Ekkor a trapéz csúcsainak koordinátái a következő alakúak:

$$A(0; 0), B(b; 0), C(c; m) \text{ és } D(d; m),$$

ahol m a trapéz magasságát jelöli.

A szárak felezőpontja:

$$E\left(\frac{d}{2}; \frac{m}{2}\right) \text{ és } F\left(\frac{b+c}{2}; \frac{m}{2}\right).$$

A koordináta-rendszerben az adatok (pontok) választásából adódóan a trapéz alapjai párhuzamosak az x tengellyel. Tudjuk továbbá, hogy E és F második koordinátája megegyezik, ezért EF is párhuzamos az x tengellyel. Ezzel beláttuk, hogy a trapéz szárait összekötő középvonala párhuzamos az alapokkal.

Az alapok, valamint az EF középvonal hossza könnyen kiszámítható:

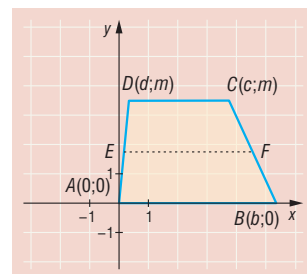
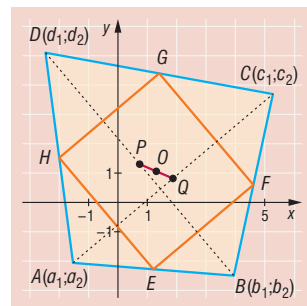
$$AB = |b|, DC = |c - d|,$$

illetve

$$EF = \sqrt{\left(\frac{b+c-d}{2}\right)^2} = \left|\frac{b+c-d}{2}\right|.$$

Vegyük észre, hogy ha $b > 0$, akkor $c > d$, és ha $b < 0$, akkor $c < d$ (máskülönben az $ABCD$ négyszög hurkolt lenne), ezért b és $c - d$ előjele mindenképpen megegyezik, és így valóban teljesül, hogy

$$EF = \frac{AB + DC}{2}.$$





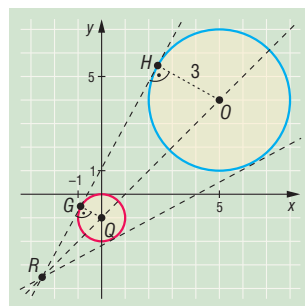
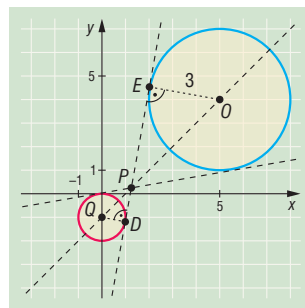
- 3618** a) A két közös belső érintő természetesen az OQ szakaszon metszi egymást. Tegyük fel, hogy az ábrának megfelelően az egyik közös belső érintő a köröket az E , illetve D pontokban érinti, míg a belső érintők metszéspontja P . Ekkor az OEP háromszög hasonló a QDP háromszöghöz, hiszen mindkettő derékszögű (az érintő merőleges az érintési ponthoz tartozó sugárra), illetve a P csúcsnál lévő szögek csúcsszögek, így szintén egyenlők egymással. A hasonlóság aránya megegyezik a körök sugarainak arányával, azaz $\lambda = \frac{OE}{QD} = 3$. Természetesen a két háromszög átfogóinak arányára is érvényes, hogy $\frac{OP}{QP} = \lambda = 3$. Eredményünket másként is megfogalmazhatjuk; a P pont az OQ szakasz Q -hoz legközelebbi negyedelőpontja. Így a P pont koordinátái:

$$P\left(\frac{3 \cdot 0 + 1 \cdot 5}{4}; \frac{3 \cdot (-1) + 1 \cdot 4}{4}\right) = \left(\frac{5}{4}; \frac{1}{4}\right).$$

- b) Az a) feladathoz hasonló módszerrel járhatunk el. Jelöljük R -rel a két közös külső érintő metszéspontját, az egyik érintő érintési pontjait pedig G -vel, illetve H -val. Az RHO háromszög hasonló az RGQ háromszöghöz, a hasonlóság aránya 3. Az elmondottak alapján $\frac{RO}{RQ} = 3$, ami azt is jelenti, hogy a Q pont 1:2 arányban osztja az RO szakaszt. Ha az ismeretlen R pont koordinátái x és y , akkor

$$\frac{2 \cdot x + 1 \cdot 5}{3} = 0 \quad \text{és} \quad \frac{2 \cdot y + 1 \cdot 4}{3} = -1.$$

Az egyenleteket megoldva kapjuk, hogy $R\left(-\frac{5}{2}; -\frac{7}{2}\right)$.



Az egyenest meghatározó adatok a koordináta-rendszerben – megoldások

- 3619** a) Például: $(1; 0)$, $(2; 0)$, $(-3; 0)$.
 b) Például: $(0; 1)$, $(0; 2)$, $(0; 3)$.
 c) Például: $(4; 5)$; $\left(2; \frac{5}{2}\right)$; $(40; 50)$.
 d) Például: $(-5; -7)$, $(5; 7)$, $(0, 5; 0, 7)$.
 e) Például: $(9; -4)$, $(-9; 4)$, $(18; -8)$.
 f) Például: $(1; 0)$, $(-1; 0)$, $(2010; 0)$.
- 3620** a) $(5; -9)$; b) $(-6; 5)$; c) $(5; -3)$.
- 3621** a) $(1; 0)$; b) $(0; 1)$; c) $(8; 3)$; d) $(17; 50)$; e) $(1; 3)$.
- 3622** a) $\alpha = 90^\circ$, meredekség nem létezik;
 b) $\alpha = 0^\circ$, $m = 0$;
 c) $\alpha = 45^\circ$, $m = 1$;
 d) $\alpha \approx 51,34^\circ$, $m = \frac{5}{4}$;
 e) $\alpha = -45^\circ$, $m = -1$.
- 3623** a) $\vec{v}(5; -3)$, $\vec{n}(3; 5)$, $\alpha \approx -30,96^\circ$, $m = -\frac{3}{5}$;
 b) $\vec{v}(2; 1)$, $\vec{n}(1; -2)$, $\alpha \approx 26,57^\circ$, $m = \frac{1}{2}$;
 c) $\vec{v}(1; 0)$, $\vec{n}(0; 1)$, $\alpha = 0^\circ$, $m = 0$;

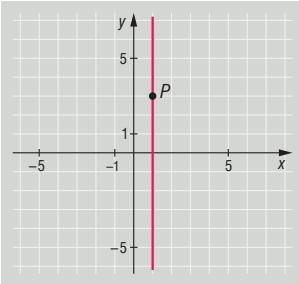


d) $\vec{v}(0; 1)$, $\vec{n}(1; 0)$, $\alpha = 90^\circ$, meredekség nem létezik;

e) $\vec{v}(3; -1)$, $\vec{n}(1; 3)$, $\alpha \approx -18,43^\circ$, $m = -\frac{1}{3}$;

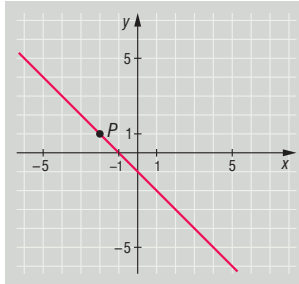
f) $\vec{v}(1; 5)$, $\vec{n}(5; -1)$, $\alpha \approx 78,69^\circ$, $m = 5$.

3624 a)



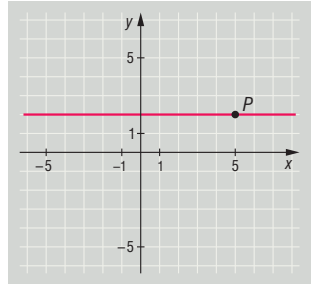
$\vec{n}(1; 0)$, $\alpha = 90^\circ$, m nincs;

b)



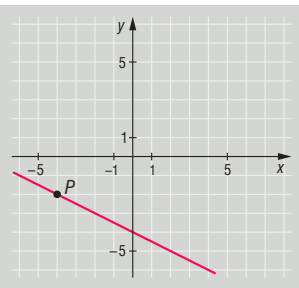
$\vec{n}(1; 1)$, $\alpha = -45^\circ$, $m = -1$;

c)



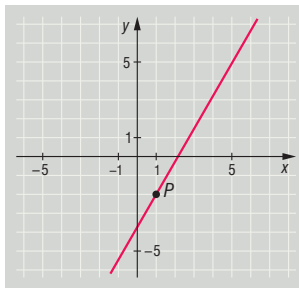
$\vec{n}(0; 1)$, $\alpha = 0^\circ$, $m = 0$;

d)



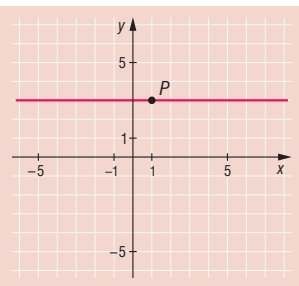
$\vec{n}(1; 2)$, $\alpha \approx -26,57^\circ$, $m = -\frac{1}{2}$;

e)



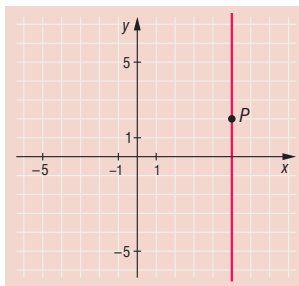
$\vec{n}(\sqrt{3}; -1)$, $\alpha = 60^\circ$, $m = \sqrt{3}$.

3625 a)



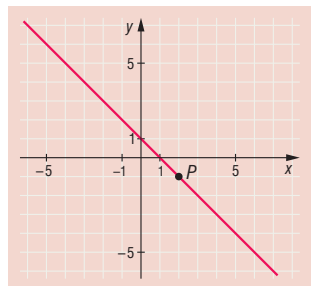
$\vec{v}(1; 0)$, $\alpha = 0^\circ$, $m = 0$;

b)



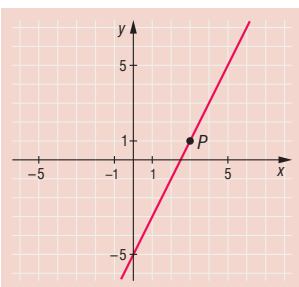
$\vec{v}(0; 1)$, $\alpha = 90^\circ$, m nincs;

c)

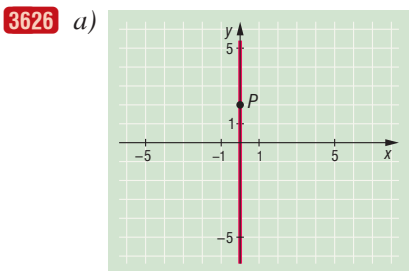


$\vec{v}(1; -1)$, $\alpha = -45^\circ$, $m = -1$;

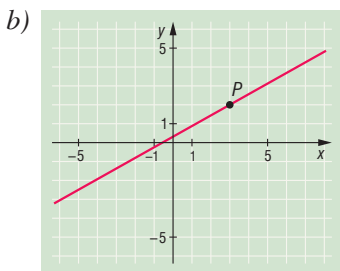
d)



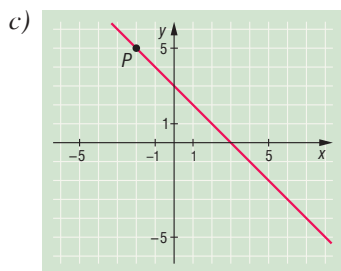
$\vec{v}(1; 2)$, $\alpha \approx 63,43^\circ$, $m = 2$.



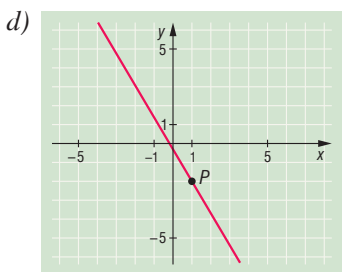
$\vec{v}(0; 1), \vec{n}(1; 0), m$ nincs;



$\vec{v}(3; \sqrt{3}), \vec{n}(\sqrt{3}; -3), m = \frac{\sqrt{3}}{3};$



$\vec{v}(1; -1), \vec{n}(1; 1), m = -1;$



$\vec{v}(-1; \sqrt{3}), \vec{n}(\sqrt{3}; 1), m = -\sqrt{3}.$

3627 a) 0° ; b) -45° ; c) $18,43^\circ$; d) -30° ; e) $89,97^\circ$.

3628 a) $m = \frac{\sqrt{3}}{3}; \vec{v}(3; \sqrt{3}), \vec{n}(\sqrt{3}; -3);$

b) $m = -1, \vec{v}(1; -1), \vec{n}(1; 1);$

c) $m = 0, \vec{v}(1; 0), \vec{n}(0; 1);$

d) $m \approx 3,73, \vec{v}(1; 3,73), \vec{n}(3,73; -1);$

e) $m = -\sqrt{3}; \vec{v}(-1; \sqrt{3}), \vec{n}(\sqrt{3}; 1).$

3629 a) $m_e = \frac{1}{2}, m_f = -2;$ b) $m_e = \frac{1}{5}, m_f = -5;$ c) $m_e = 1, m_f = -1;$ d) $m_e = \frac{2}{3}, m_f = -\frac{3}{2}.$

A két egyenes meredekségének szorzata minden esetben -1 , ami mutatja, hogy az egyenesek merőlegesek egymásra.

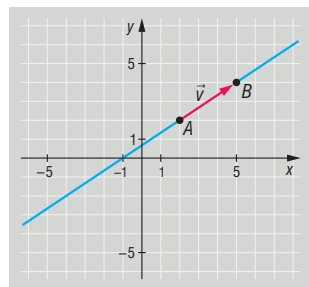
3630 a) $m_e = m_f = 3;$ b) $m_e = m_f = -\frac{3}{10};$ c) $m_e = m_f = \sqrt{\frac{3}{2}};$ d) $m_e = m_f = \frac{a+b}{a-b}.$

Mivel a két egyenes meredeksége minden esetben megegyezik, ezért az egyenesek valóban párhuzamosak egymással.

3631 Az ábra alapján az egyenes egy irányvektora a $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ vektor, melynek koordinátái $\vec{v}(3; 2)$. Ha a C pont koordinátái $C(2007; y)$, akkor az $\overrightarrow{AC}(2005; y - 2)$ vektor szintén irányvektora az egyenesnek, ezért valamely α valós számra $\overrightarrow{AC} = \alpha \cdot \vec{v}$. Ezek alapján a vektorok első koordinátáira $2005 = \alpha \cdot 3$, amiből $\alpha = \frac{2005}{3}$, és így

$$y - 2 = \frac{2005}{3} \cdot 2 \Rightarrow y = \frac{4016}{3}.$$

A C pont koordinátái tehát $C\left(2007; \frac{4016}{3}\right)$.





- a) Mivel $\overrightarrow{AP}(33; 22)$, ezért $\overrightarrow{AP} = 11\vec{v}$, ami azt jelenti, hogy az \overrightarrow{AP} szintén irányvektora az egyenesnek, tehát a P pont illeszkedik az egyenesre.
- b) Mivel $\overrightarrow{AQ}(-15; -10)$, ezért $\overrightarrow{AQ} = -5\vec{v}$, ezért a Q pont szintén illeszkedik az egyenesre.
- c) Az \overrightarrow{AR} koordinátái $\overrightarrow{AR}(-18; -11)$. Mivel az \overrightarrow{AR} nem írható fel a \vec{v} valahányszorosaként, ezért a két vektor nem párhuzamos, így az R pont nem illeszkedik az egyenesre.

3632 a) Ha az autópálya két ismert pontját A és B jelöli (megadásuk sorrendjében), akkor a pálya egy irányvektorának koordinátái $\overrightarrow{AB}(5; 3)$. Az A pontot a koordináta-rendszer O kezdőpontjával összekötő vektor koordinátáira: $\overrightarrow{AO}(2; 1)$. Mivel a két vektor nem párhuzamos egymással, ezért az autópálya nem halad keresztül az origón.

- b) Ha a keresett C pont koordinátáit $C(1; y)$ jelöli, akkor $\overrightarrow{AC}(3; y + 1)$. A C pont pontosan akkor illeszkedik az autópálya nyomvonalára, ha valamely α valós számra teljesül, hogy $\overrightarrow{AC} = \alpha \cdot \overrightarrow{AB}$.

A vektorok első koordinátáinak összehasonlításából $\alpha = \frac{3}{5}$, így a második koordinátákra:

$$y + 1 = \frac{3}{5} \cdot 3, \text{ amiből } y = \frac{4}{5}.$$

A C pont koordinátái: $C\left(1; \frac{4}{5}\right)$.

- c) Elegendő megmutatni, hogy a P pont illeszkedik az autópálya nyomvonalára. Mivel $\overrightarrow{AP}(10; 6)$, ezért $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{AB}$, ami mutatja, hogy a két vektor párhuzamos egymással. Ebből adódik, hogy a P pont valóban az autópályán található.

- d) A két útszakasz által bezárt szöget az ábrának megfelelően jelöljük α -val. Ekkor α megegyezik a \overrightarrow{PB} és \overrightarrow{PQ} vektorok hajlásszögével. A vektorok koordinátái: $\overrightarrow{PB}(-5; -3)$, $\overrightarrow{PQ}(1; -3)$. A két vektor skaláris szorzatára:

$$\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PQ} = (-5) \cdot 1 + (-3) \cdot (-3) = 4,$$

hosszukra pedig

$$|\overrightarrow{PB}| = \sqrt{34} \text{ és } |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{10}$$

teljesül. A skaláris szorzat definíciója alapján:

$$\sqrt{34} \cdot \sqrt{10} \cdot \cos \alpha = 4,$$

$$\cos \alpha = \frac{4}{\sqrt{34} \cdot \sqrt{10}},$$

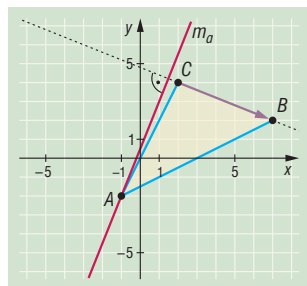
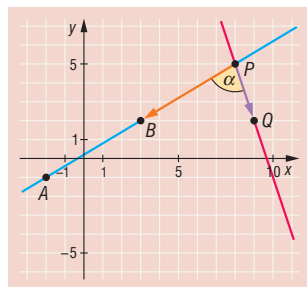
$$\alpha \approx 77,47^\circ.$$

A két útszakasz $77,47^\circ$ -os szögben metszi majd egymást.

3633 Az A csúcsból induló m_a magasságvonalnak a $\overrightarrow{CB}(5; -2)$ vektor egy normálvektora, ezért a magasságvonal egy irányvektora: $\vec{v}(2; 5)$. A magasságvonal meredeksége $m = \frac{5}{2}$, irányszöge pedig $68,20^\circ$.

Hasonló számításokkal kaphatjuk a B csúcsból induló magasságvonal adatait: irányvektorának koordinátái $(2; -1)$, meredeksége $-\frac{1}{2}$, irányszöge $-26,57^\circ$.

A C csúcsból induló magasságvonal adatai: irányvektorának koordinátái $(1; -2)$, meredeksége -2 , irányszöge $-63,43^\circ$.





3634 A háromszög súlypontja $S\left(\frac{8}{3}; \frac{4}{3}\right)$. Az AS súlyvonal egy irányvektora: $\overrightarrow{AS}\left(\frac{11}{3}; \frac{10}{3}\right)$, egy normálvektora pedig a $\left(\frac{10}{3}; -\frac{11}{3}\right)$ koordinátájú vektor.

A BS súlyvonal egy irányvektora $\overrightarrow{BS}\left(-\frac{13}{3}; -\frac{2}{3}\right)$, egy normálvektorának koordinátái $\left(\frac{2}{3}; -\frac{13}{3}\right)$.

Végül a CS súlyvonal egy irányvektora $\overrightarrow{CS}\left(\frac{2}{3}; -\frac{8}{3}\right)$, egy normálvektorának koordinátái $\left(\frac{8}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

3635 a) A 3633. feladat eredménye alapján az A csúcsból induló magasságvonal egy irányvektora $\vec{v}(2; 5)$, míg a 3634. feladat alapján az A csúcsból induló súlyvonal egy irányvektora $\overrightarrow{AS}\left(\frac{11}{3}; \frac{10}{3}\right)$. A két vektor skaláris szorzata 24, a vektorok hossza:

$$|\vec{v}| = \sqrt{29} \text{ és } |\overrightarrow{AS}| = \frac{\sqrt{221}}{3}.$$

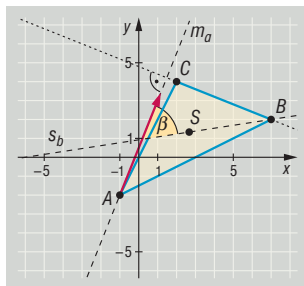
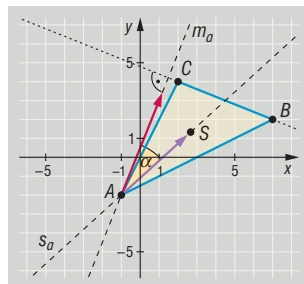
Ha a két vektor által bezárt szöget α jelöli, akkor a skaláris szorzatból:

$$24 = \sqrt{29} \cdot \frac{\sqrt{221}}{3} \cdot \cos \alpha, \text{ amiből } \alpha \approx 25,92^\circ.$$

b) A keresett β szög megegyezik az A csúcsból induló magasságvonal $\vec{v}(2; 5)$ irányvektora, és az s_b súlyvonal $\overrightarrow{SB}\left(\frac{13}{3}; \frac{2}{3}\right)$ által bezárt szöggel. A 3634. feladat eredménye alapján $\overrightarrow{SB}\left(\frac{13}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

Az a) feladathoz hasonló számítással:

$$12 = \sqrt{29} \cdot \frac{\sqrt{173}}{3} \cdot \cos \beta, \text{ amiből } \beta \approx 59,45^\circ.$$



3636 a) Két egyenes akkor és csak akkor merőleges egymásra, ha irányvektoraik merőlegesek egymásra, ez pedig pontosan akkor következik be, ha az irányvektorok skaláris szorzata 0. Ezek alapján

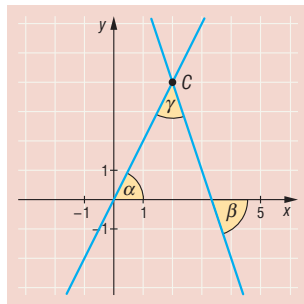
$$\vec{v}_e \cdot \vec{v}_f = 2 \cdot 5 + 1 \cdot p = 0, \text{ amiből } p = -10.$$

b) $p = 0$.

c) $p = 2 \cdot \sqrt{2}$ vagy $p = -2 \cdot \sqrt{2}$.

3637 Tegyük fel, hogy a 2 meredekséggel rendelkező egyenes irányszöge α , ekkor $\alpha \approx 63,43^\circ$, a -3 meredekséggel rendelkező pedig β , ekkor $\beta \approx -71,57^\circ$. A két egyenes által bezárt γ szög az ábrán a C metszéspontnál alakul ki. Az egyenesek, valamint az x tengely által közrefogott háromszögből:

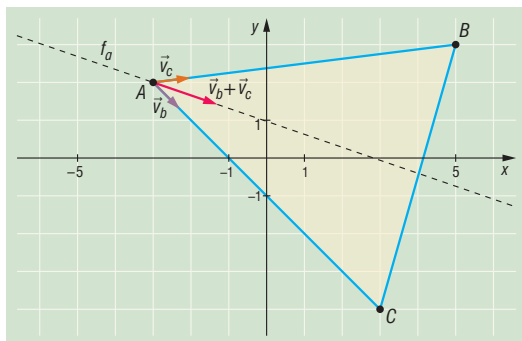
$$\gamma = 180^\circ - \alpha + \beta = 180^\circ - 63,43^\circ - 71,57^\circ = 45,00^\circ.$$





3638 a) Az AB oldalegyenes egy irányvektora: $\overrightarrow{AB}(8; 1)$, az AC egyenesé $\overrightarrow{AC}(6; -6)$, vagy $\vec{v}_{AC}(1; -1)$, és a BC oldalegyenesé $\overrightarrow{BC}(-2; -7)$.

b) Az ábrán \vec{v}_c , illetve \vec{v}_b az AB , illetve AC oldalegyenesek egy-egy egységnyi hosszúságú irányvektorát jelöli. A $\vec{v}_b + \vec{v}_c$ vektor a két vektor által kifeszített paralelogramma megfelelő átlóvektora. Mivel a két vektor rombuszt feszít ki, ezért átlója illeszkedik a két oldal által közrefogott szögfelezőre, így a $\vec{v}_b + \vec{v}_c$ vektor az A csúcsnál lévő f_a szögfelező egy irányvektora. Feladatunk tehát a \vec{v}_c , illetve \vec{v}_b vektorok koordinátáinak meghatározása.



Mivel $\overrightarrow{AB}(8; 1)$, ezért $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{65}$, így az \overrightarrow{AB} -ral egyállású egységvektor koordinátái:

$$\vec{v}_c \left(\frac{8}{\sqrt{65}}; \frac{1}{\sqrt{65}} \right).$$

Hasonlóan $\vec{v}_{AC}(1; -1)$ és $|\vec{v}_{AC}| = \sqrt{2}$, ezért az AC egyenes egység-hosszú irányvektora:

$$\vec{v}_b \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

Az f_a szögfelező egy irányvektorának koordinátái:

$$\vec{v}_b + \vec{v}_c \left(\frac{8}{\sqrt{65}} + \frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{65}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

c) Az f_a egyenes irányvektorából a meredeksége már könnyen számolható:

$$m = \frac{\frac{1}{\sqrt{65}} - \frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{8}{\sqrt{65}} + \frac{1}{\sqrt{2}}},$$

$$m = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{65}}{8 \cdot \sqrt{2} + \sqrt{65}}.$$

Az egyenes irányszöge $\approx -18,94^\circ$.

3639 Ha a két egyenest e és f jelöli, továbbá m_1 az e , m_2 az f egyenes iránytangense, akkor az egyenesek egy-egy irányvektora $\vec{v}_e(1; m_1)$, $\vec{v}_f(1; m_2)$. A két irányvektor skaláris szorzatára teljesül, hogy:

$$\vec{v}_e \cdot \vec{v}_f = 1 + m_1 \cdot m_2.$$

A két vektor által közrefogott szög éppen a két egyenes által bezárt φ szöggel egyenlő, ezért a skaláris szorzat más alakban is felírható:

$$\vec{v}_e \cdot \vec{v}_f = |\vec{v}_e| \cdot |\vec{v}_f| \cdot \cos \varphi.$$

Mivel

$$|\vec{v}_e| = \sqrt{1 + m_1^2} \quad \text{és} \quad |\vec{v}_f| = \sqrt{1 + m_2^2},$$

ezért

$$\vec{v}_e \cdot \vec{v}_f = \sqrt{1 + m_1^2} \cdot \sqrt{1 + m_2^2} \cdot \cos \varphi.$$



A skaláris szorzatra kapott két eredmény összevetéséből:

$$1 + m_1 \cdot m_2 = \sqrt{1 + m_1^2} \cdot \sqrt{1 + m_2^2} \cdot \cos \varphi,$$

$$\cos \varphi = \frac{1 + m_1 \cdot m_2}{\sqrt{1 + m_1^2} \cdot \sqrt{1 + m_2^2}}. \quad (1)$$

Jól ismert, de amúgy nem túlságosan bonyolultan igazolható, addíciós összefüggés alapján:

$$1 + \operatorname{tg}^2 \varphi = \frac{1}{\cos^2 \varphi},$$

ezért ha az (1) egyenlőség mindkét oldalának reciprokát vesszük, majd négyzetre emeljük, akkor adódik, hogy:

$$1 + \operatorname{tg}^2 \varphi = \frac{(1 + m_1^2) \cdot (1 + m_2^2)}{(1 + m_1 \cdot m_2)^2},$$

$$\operatorname{tg}^2 \varphi = \frac{(1 + m_1^2) \cdot (1 + m_2^2)}{(1 + m_1 \cdot m_2)^2} - 1,$$

$$\operatorname{tg}^2 \varphi = \frac{(1 + m_1^2) \cdot (1 + m_2^2) - (1 + m_1 \cdot m_2)^2}{(1 + m_1 \cdot m_2)^2}.$$

A kijelölt műveletek és összevonások elvégzése után:

$$\operatorname{tg}^2 \varphi = \frac{m_1^2 - 2 \cdot m_1 \cdot m_2 + m_2^2}{(1 + m_1 \cdot m_2)^2},$$

$$\operatorname{tg}^2 \varphi = \frac{(m_1 - m_2)^2}{(1 + m_1 \cdot m_2)^2}.$$

Mindkét oldalból négyzetgyököt vonva kapjuk, hogy:

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2} \right|,$$

amit éppen bizonyítani kellett.

Az egyenes egyenletei – megoldások

- 3640** a) $y = 3$; b) $x = 3$; c) $x + y = 5$; d) $-2x + y = 0$;
e) $x - 3y = -14$; f) $x + 2y = -4$; g) $x - 2y = 5$; h) $x + 2y = 8$.
- 3641** a) $x = 1005$; b) $y = \frac{3}{2}$; c) $x + 3y = 0$; d) $-6x + 20y = 37$.
- 3642** $8x - 3y = 6,5$.
- 3643** a) $x = 2$; b) $y = -5$; c) $x - y = 2$; d) $x + 2y = -4$;
e) $x + 2y = 7$; f) $x - 3y = 0$; g) $x - y = -6$; h) $3x + 2y = 16$.
- 3644** a) $y = 0$; b) $x = -2$; c) $y = 3x$; d) $10x + 3y = 11$;
e) $x + y = \frac{1}{15}$; f) $2x - y = 5 \cdot \sqrt{3}$.

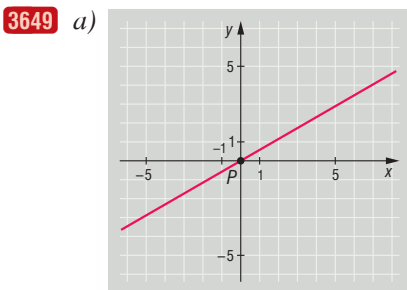


- 3645 a) A pontok mindegyike illeszkedik az $y = -2x + 1$ egyenletű egyenesre.
 b) Mindhárom pont illeszkedik a $3x - 2y = 2005$ egyenletű egyenesre.
 c) Mindhárom pont illeszkedik a $3x - 2y = 15$ egyenletű egyenesre.
 d) A három pont nem illeszkedik egy egyenesre.

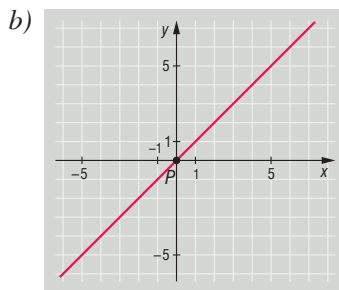
- 3646 a) $y = 4x$, illetve $y = -\frac{1}{4}x$; b) $3x + 4y = 10$, illetve $4x - 3y = -20$;
 c) $y = 4x + 10$, illetve $x + 4y = -11$; d) $6x - 7y = 41$, illetve $7x + 6y = -23$.

- 3647 a) $3x + 2y = 5$; b) $y = 2x + 8$; c) $y = x$;
 d) $2x + 3y = -19$.

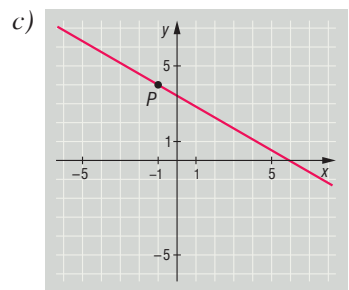
- 3648 a) $y = -x$; b) $x + 2y = 2$; c) $x + 3y = 10$;
 d) $y = x + 1$.



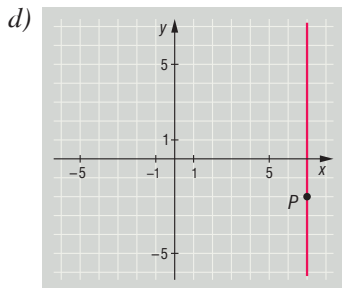
$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x;$$



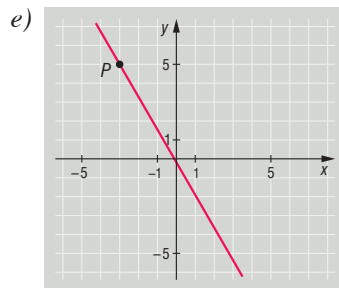
$$y = x;$$



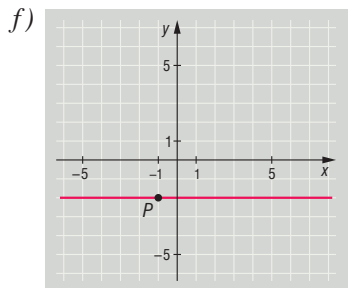
$$y - 4 = -\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot (x + 1);$$



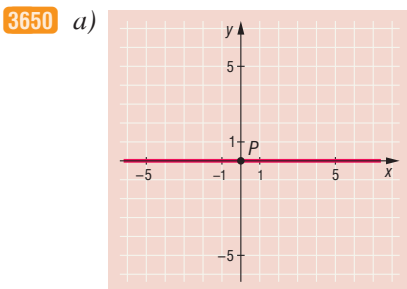
$$x = 7;$$



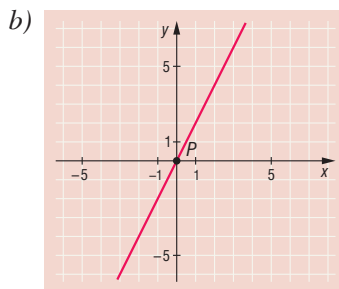
$$y - 5 = -\sqrt{3} \cdot (x + 3);$$



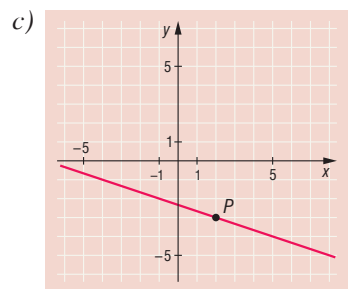
$$y = -2.$$



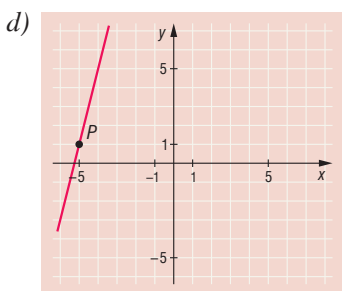
$$y = 0;$$



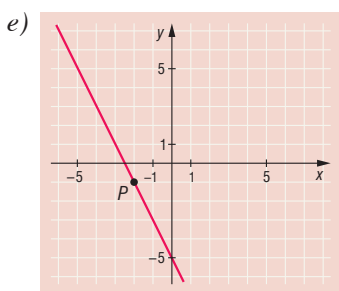
$$y = 2x;$$



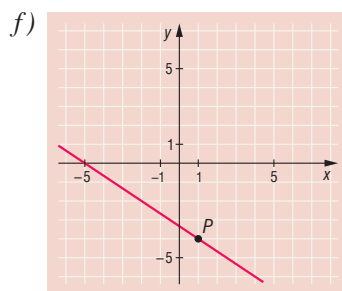
$$x + 3y = -7;$$



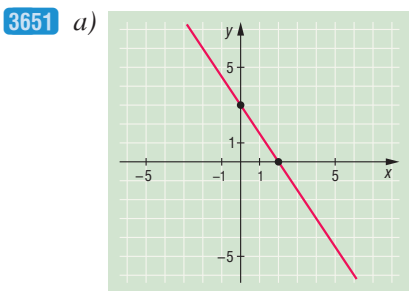
$$4x - y = -21;$$



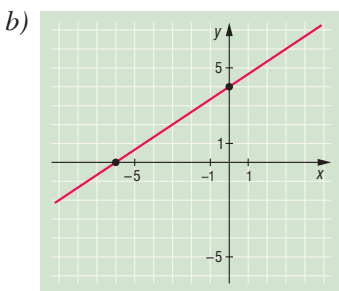
$$2x + y = -5;$$



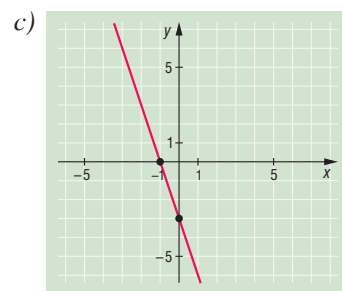
$$2x + 3y = -10.$$



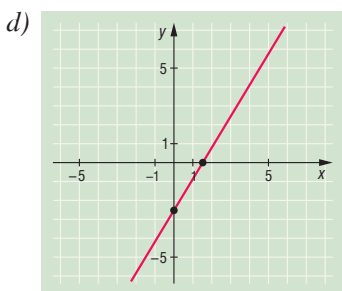
$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1;$$



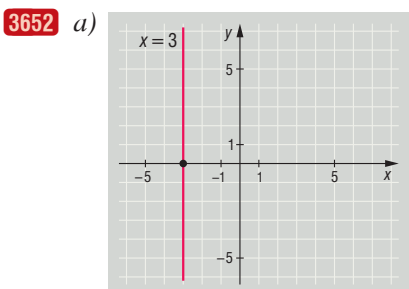
$$-\frac{x}{6} + \frac{y}{4} = 1;$$



$$-x - \frac{y}{3} = 1;$$

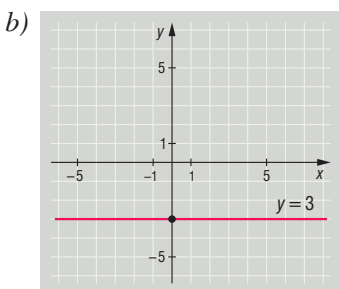


$$\frac{2x}{3} - \frac{2y}{5} = 1.$$



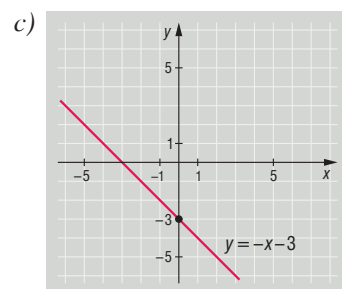
$$\vec{v}(0; 1), \vec{n}(1; 0),$$

m nem létezik, $\alpha = 90^\circ$;



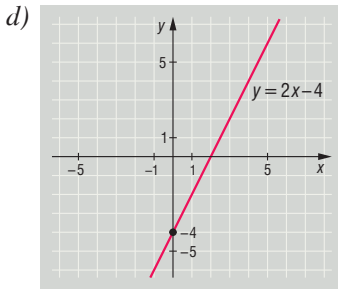
$$\vec{v}(1; 0), \vec{n}(0; 1),$$

$m = 0$, $\alpha = 0^\circ$;



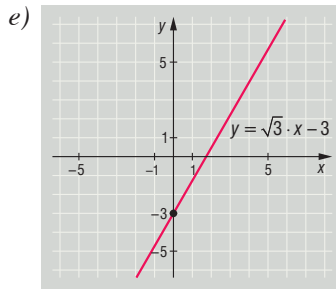
$$\vec{v}(1; -1), \vec{n}(1; 1),$$

$m = -1$, $\alpha = -45^\circ$;



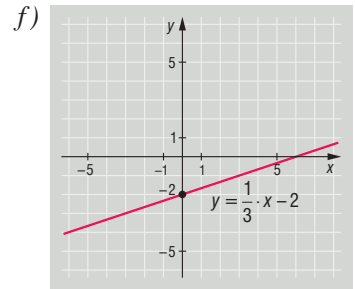
$$\vec{v}(1; 2), \vec{n}(2; -1),$$

$$m = 2, \alpha \approx 63,43^\circ;$$



$$\vec{v}(1; \sqrt{3}), \vec{n}(\sqrt{3}; -1),$$

$$m = \sqrt{3}, \alpha = 60^\circ;$$



$$\vec{v}(3; 1), \vec{n}(-1; 3),$$

$$m = \frac{1}{3}, \alpha \approx 18,43^\circ.$$

3653 a) $x + y = 3$, $\vec{n}(1; 1)$, $\vec{v}(1; -1)$, $m = -1$, $\alpha = -45^\circ$;

b) $-2x + y = 4$, $\vec{n}(-2; 1)$, $\vec{v}(1; 2)$, $m = 2$, $\alpha \approx 63,43^\circ$;

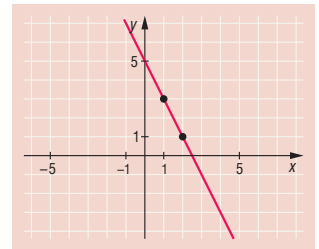
c) $x + 2y = -2$, $\vec{n}(1; 2)$, $\vec{v}(2; -1)$, $m = -\frac{1}{2}$, $\alpha \approx -26,57^\circ$;

d) $x - 6y = 6$, $\vec{n}(1; -6)$, $\vec{v}(6; 1)$, $m = \frac{1}{6}$, $\alpha \approx 9,46^\circ$.

3654 a) A P pont illeszkedik az egyenesre, ezért az egyenes és tükörképe egybeesik. Így a tükörkép egyenlete: $2x + y = 5$.

b) $2x + y = -3$.

c) $2x + y = -5$.



3655 a) Az egyenes a háromszög BC oldalegyenes.

b) Nem oldalegyenes.

c) Nem oldalegyenes.

d) Nem oldalegyenes.

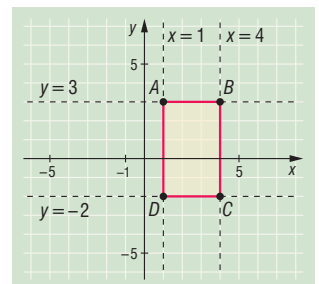
e) Az egyenes a háromszög AC oldalegyenes.

f) Az egyenes a háromszög AB oldalegyenes.

g) Az egyenes a háromszög BC oldalegyenes.

3656 a) $A(1; 3)$, $B(4; 3)$, $C(4; -2)$, $D(1; -2)$.

b) Az egyenesek téglalapot fognak közre.



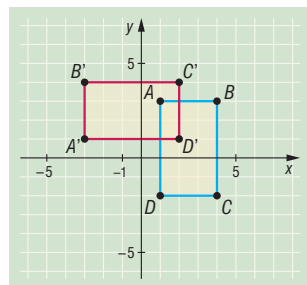


c) $A'(-3; 1)$, $B'(-3; 4)$, $C'(2; 4)$, $D(2; 1)$.

d) Az oldalegyenesek egyenlete:

$$x = -3, \quad y = 4, \quad x = 2, \quad y = 1.$$

e) A két négyszög közös részének kerülete 6, területe 2; egyesítésük kerülete 26, területe pedig 28.



3657 a) Az AB egyenes egy irányvektora az $\overrightarrow{AB}(5; -5)$ vektor, így egy normálvektora az $\vec{n}_{AB}(1; 1)$ vektor. Az egyenes egyenlete: $x + y = 0$. A BC egyenes egy irányvektora: $\overrightarrow{BC}(2; 6)$, normálvektora $\vec{n}_{BC}(-3; 1)$, egyenlete: $3x - y = 12$. Végül az AC egyenes egyenlete: $x - 7y = -16$.

b) Az A csúsból induló m_a magasságvonal merőleges a BC egyenesre, ezért egy normálvektora az $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}(1; 3)$ vektor. Az A pont illeszkedik a magasságvonalra, ezért m_a egyenlete: $x + 3y = 4$.

Hasonló gondolatmenettel kaphatjuk a másik két magasságvonal egyenletét is: m_b egyenlete $7x + y = 18$ és m_c egyenlete $x - y = 2$.

c) Mivel $2,5 + 3 \cdot 0,5 = 4$, ezért az M pont illeszkedik az m_a egyenesre. Hasonlóan: $7 \cdot 2,5 + 0,5 = 18$, illetve $2,5 - 0,5 = 2$, ezért az M pont a másik két magasságvonalnak is pontja. Az M pont épp az ABC háromszög magasságpontja.

3658 a) Az AB oldal felezőpontja az $\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ koordinátájú pont. Mivel az AB oldalfelező merőlegesének az $\overrightarrow{AB}(5; -5)$ vektor normálvektora, ezért az egyenes egyenlete:

$$5x - 5y = 5 \cdot \frac{1}{2} - 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right), \quad \text{vagyis} \quad x - y = 1.$$

A BC oldal felezőpontja $(4; 0)$, az oldalfelező merőleges normálvektora $(1; 3)$, ezért annak egyenlete $x + 3y = 4$. Végül az AC oldalfelező merőlegesének egyenlete: $7x + y = 13$.

b) Mivel

$$\frac{7}{4} - \frac{3}{4} = 1, \quad \frac{7}{4} + 3 \cdot \frac{3}{4} = 4, \quad 7 \cdot \frac{7}{4} + \frac{3}{4} = 13,$$

ezért az O pont valóban illeszkedik mindhárom oldalfelező merőlegesre.

c) Az O pont és az ABC háromszög csúcsainak távolsága:

$$OA = \sqrt{\left(-2 - \frac{7}{4}\right)^2 + \left(2 - \frac{3}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{225}{16} + \frac{25}{16}} = \frac{5 \cdot \sqrt{10}}{4},$$

$$OB = \sqrt{\left(3 - \frac{7}{4}\right)^2 + \left(-3 - \frac{3}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{16} + \frac{225}{16}} = \frac{5 \cdot \sqrt{10}}{4},$$

$$OC = \sqrt{\left(5 - \frac{7}{4}\right)^2 + \left(3 - \frac{3}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{169}{16} + \frac{81}{16}} = \frac{5 \cdot \sqrt{10}}{4}.$$

Eredményeink igazolják, hogy az O pont a háromszög csúcsaitól egyenlő távolságra található.

d) Az O pont az ABC háromszög köré írt kör középpontja.



- 3659** Az adott pontokat a megadás sorrendjében E, F és G , a háromszög csúcspontjait A, B és C jelöli az ábrán. Az EF szakasz középvonal az ABC háromszögben, ezért párhuzamos a háromszög BC oldalával. Ezt a tényt a koordináta-geometriában úgy is megfogalmazhatjuk, hogy az $\overrightarrow{EF}(4; -1)$ vektor a BC egyenes egy irányvektora. A BC egyenes átmegy a G ponton, ezért az egyenes irányvektoros egyenletének alkalmazása után a BC egyenes egyenlete:

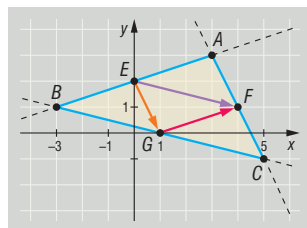
$$-x - 4y = -1 \cdot 1 - 4 \cdot 0, \text{ azaz } x + 4y = 1.$$

Hasonló megfontolások után az AB egyenes egyenlete:

$$x - 3y = -6,$$

az AC egyenesé:

$$2x + y = 9.$$



- 3660** a) Jelöljük C -vel az e egyenes egy olyan pontját, amellyel az ABC háromszög derékszögű, a derékszög pedig a C csúcsnál van. Mivel C illeszkedik az e egyenesre, ezért koordinátáit $C(2; y)$ alakban kereshetjük. A feltételek szerint $\angle ACB = 90^\circ$, ezért a \overrightarrow{CA} és \overrightarrow{CB} vektorok skaláris szorzata 0. Mivel $\overrightarrow{CA}(-4; 1 - y)$ és $\overrightarrow{CB}(-1; -4 - y)$, ezért

$$-4 \cdot (-1) + (1 - y) \cdot (-4 - y) = 0.$$

Az egyenlet megoldásai: $y = 0$ és $y = -3$. Az e egyenesen tehát valóban két olyan C pont található, amely az AB átfogóval derékszögű háromszöget alkot, ezek koordinátái $C(2; -3)$ és $C(2; 0)$.

- b) Az a) feladat eredményei alapján $C(2; -3)$. Az AC befogó egy irányvektora a $\overrightarrow{CA}(-4; 4)$ vektor, és egy pontja a C pont. Ezek alapján az AC egyenes egyenlete:

$$x + y = -1.$$

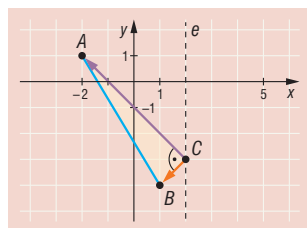
A BC egyenes egyenlete:

$$x - y = 5.$$

- c) Az AC egyenes meredeksége -1 , a BC egyenesé 1 .

- d) Az ABC háromszög derékszögű, ezért körülírt körének középpontja egybeesik az AB átfogó felezőpontjával, a kör sugara pedig az átfogó hosszának fele. Az AB átfogó hossza $\sqrt{34}$, így

a körülírt kör sugara $\frac{\sqrt{34}}{2} \approx 2,92$.

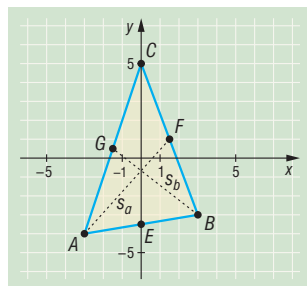


- 3661** A háromszöglap egyensúlyban marad, ha a súlyvonalai mentén támasztjuk alá. A háromszög AB oldalának felezőpontja $E(0; -\frac{7}{2})$.

Mivel e pont illeszkedik az y tengelyre, csakúgy mint a C csúcs, ezért az s_c súlyvonal egyenlete: $x = 0$.

A BC oldal felezőpontja $F(\frac{3}{2}; 1)$, ezért az AB súlyvonal egy irányvektora $\overrightarrow{AF}(\frac{9}{2}; 5)$, így egyenlete: $10x - 9y = 6$.

Az AC oldal felezőpontja $G(-\frac{3}{2}; \frac{1}{2})$, az s_b súlyvonal egyenlete: $7x + 9y = -6$.





3662 a) Az egyenes x tengellyel való metszete:

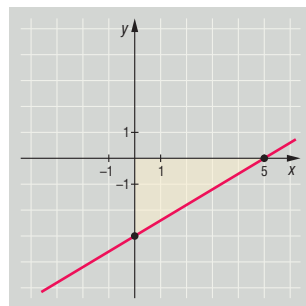
$$a = 5,$$

y tengellyel való metszete:

$$b = -3.$$

A tengelyekből kimetszett háromszög területe:

$$T = 7,5.$$



b) Az egyenes x tengellyel való metszete:

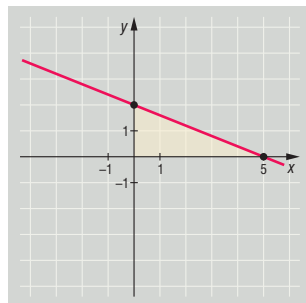
$$a = 5,$$

y tengellyel való metszete:

$$b = 2.$$

A tengelyekből kimetszett háromszög területe:

$$T = 5.$$



c) Az egyenes x tengellyel való metszete:

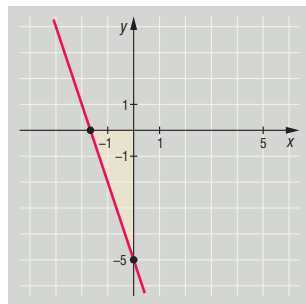
$$a = -\frac{5}{3},$$

y tengellyel való metszete:

$$b = -5.$$

A tengelyekből kimetszett háromszög területe:

$$T = \frac{25}{6}.$$



d) Az egyenes x tengellyel való metszete:

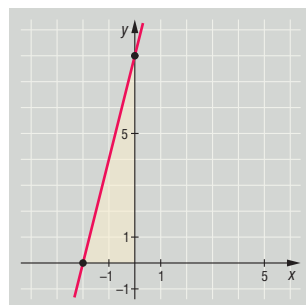
$$a = -2,$$

y tengellyel való metszete:

$$b = 8.$$

A tengelyekből kimetszett háromszög területe:

$$T = 8.$$



3663 a) Az e egyenes meredeksége $\frac{2}{3}$, az f egyenesé $-\frac{a}{2}$. A két egyenes merőlegességének szükséges és elegendő feltétele, hogy a meredekségek szorzata -1 legyen. Ezek alapján:

$$\frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{a}{2}\right) = -1, \text{ amiből } a = 3.$$

b) $a = \frac{5}{4}.$



c) Az e egyenes párhuzamos az y tengellyel, ezért az f egyenesnek az x tengellyel kell párhuzamosnak lennie. Ekkor az f egyenes egyenletében x -et tartalmazó tag nem szerepelhet, ezért a feltételeknek megfelelő a nem létezik.

d) $a = 5$ vagy $a = -5$.

3664 a) $b = \frac{1}{2}$ és a tetszőleges valós szám.

b) $b = -8$ és a tetszőleges valós szám.

c) $b = \frac{1}{2}$ és $a = -2$.

3665 A P és Q pontok koordinátái kielégítik az egyenes egyenletét, ezért:

$$\begin{cases} 4a + 6b = 4 \\ -6a + 21b = 4 \end{cases}$$

Az egyenletrendszer megoldása: $a = \frac{1}{2}$ és $b = \frac{1}{3}$.

3666 a) Az \overrightarrow{AC} vektor koordinátái: $\overrightarrow{AC}(3; 6)$, ezért az AC egyenes egy irányvektora:

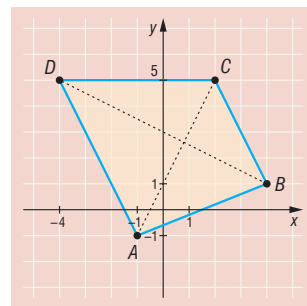
$$\vec{v} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC}(1; 2).$$

Mivel az AC egyenes átmegy az A ponton, ezért az irányvektoros egyenlet alkalmazásával kapjuk, hogy egyenlete:

$$2x - y = 2 \cdot (-1) - 1 \cdot (-1), \text{ azaz } 2x - y = -1.$$

Hasonló számításokkal a BD átló egyenesének egyenlete:

$$x + 2y = 6.$$



b) Az átlóegyeneselek egyenletéből az AC egyenes meredeksége 2, a BD egyenesé $-\frac{1}{2}$. Mivel a két egyenes meredekségének szorzata -1 , ezért a két egyenes valóban merőleges egymásra.

c) Mivel az $ABCD$ négyszög átlói merőlegesek egymásra, ezért területe $T = \frac{AC \cdot BD}{2}$. Egyszerű számolásokkal: $AC = \sqrt{45}$, illetve $BD = \sqrt{80}$, így az $ABCD$ négyszög területe:

$$T = \frac{\sqrt{45} \cdot \sqrt{80}}{2} = \frac{(3 \cdot \sqrt{5}) \cdot (4 \cdot \sqrt{5})}{2} = 30.$$

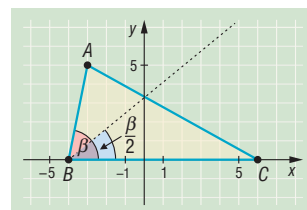
Mivel 1 egység 50 méternek felel meg a valóságban, ezért a birtok tényleges területe:

$$30 \cdot 50 \cdot 50 = 75\,000 \text{ m}^2, \text{ ami } 7,5 \text{ hektár.}$$

3667 a) Az AB egyenes egy irányvektorának koordinátái: $\overrightarrow{BA}(1; 5)$, ezért meredeksége 5, azaz $\tan \beta = 5$.

A B csúcshoz tartozó belső szögfelező irányszöge $\frac{\beta}{2}$, ezért meredeksége:

$$m = \tan \frac{\beta}{2}.$$





Ismert addíciós összefüggés alapján:

$$5 = \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \left(2 \cdot \frac{\beta}{2} \right) = \frac{2 \cdot \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2}} = \frac{2m}{1 - m^2},$$

amiből kapjuk, hogy

$$5m^2 + 2m - 5 = 0.$$

A fenti egyenlet megoldásai:

$$m_1 = \frac{-2 + 2 \cdot \sqrt{26}}{10} = \frac{-1 + \sqrt{26}}{5}, \quad \text{illetve} \quad m_2 = \frac{-1 - \sqrt{26}}{5}.$$

Az ábra alapján látható, hogy a B csúcshoz tartozó belső szögfelező meredeksége pozitív, így csak m_1 jöhet szóba. A B csúcsnál lévő szögfelező meredekségének pontos értéke:

$$m = \frac{-1 + \sqrt{26}}{5}.$$

A külső szögfelező merőleges a belső szögfelezőre, ezért ha meredekségét m' jelöli, akkor $m' \cdot m = -1$, azaz

$$m' \cdot \frac{-1 + \sqrt{26}}{5} = -1, \quad \text{amiből} \quad m' = \frac{-5}{-1 + \sqrt{26}} = -\frac{\sqrt{26} + 1}{5}.$$

A külső szögfelező meredekségének pontos értéke:

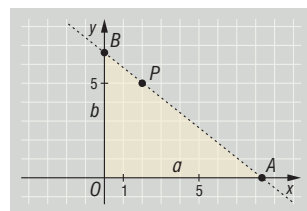
$$m' = -\frac{\sqrt{26} + 1}{5}.$$

b) Az egyenes irányítányező egyenlete alapján a B csúcshoz tartozó belső szögfelező egyenlete:

$$y = \frac{\sqrt{26} - 1}{5} \cdot (x + 4).$$

3668 Ha a P ponton átmenő egyenes tengelymetszetei az ábrának megfelelően a és b , akkor egyenlete $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ alakban írható (a és b pozitív számok). Mivel a P pont illeszkedik az egyenesre, ezért koordinátái kielégítik az egyenletet, azaz:

$$\frac{2}{a} + \frac{5}{b} = 1. \quad (1)$$



Az egyenes a koordináta-rendszer tengelyeivel az AOB derékszögű háromszöget fogja közre, amelynek befogói a és b , ezért területe $T = \frac{a \cdot b}{2}$. Feladatunk a terület minimumának megállapítása az (1) feltétel teljesülése mellett. Az (1) összeg tagjai kis ügyeskedéssel megjeleníthetők a terület leíró képletben:

$$\sqrt{2 \cdot T} = \sqrt{a \cdot b},$$

majd 10-zel bővítve az $a \cdot b$ szorzatot, kapjuk hogy:

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{10} \cdot \sqrt{\frac{a}{2} \cdot \frac{b}{5}}.$$

Mivel a terület nyilván pozitív értékű, ezért helyette a kapott kifejezés minimumát is kereshetjük.



Használjuk fel, hogy két pozitív szám – esetünkben az $\frac{a}{2}$ és $\frac{b}{5}$ számok – mértani közepe nem kisebb a két szám harmonikus közepénél:

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{10} \cdot \sqrt{\frac{a}{2} \cdot \frac{b}{5}} \geq \sqrt{10} \cdot \frac{2}{\frac{1}{\frac{a}{2}} + \frac{1}{\frac{b}{5}}} = \sqrt{10} \cdot \frac{2}{\frac{2}{a} + \frac{5}{b}} = \sqrt{10} \cdot \frac{2}{1} = 2 \cdot \sqrt{10}.$$

A harmadik egyenlőségnél felhasználtuk az (1) összefüggést. Eredményeink alapján:

$$\sqrt{2 \cdot T} = \sqrt{a \cdot b} \geq 2 \cdot \sqrt{10},$$

amiből következik, hogy

$$T \geq 20.$$

Ez azt jelenti, hogy a P ponton átmenő egyenesek a koordináta-rendszer tengelyeivel legalább 20 egység területű háromszöget fognak közre. A terület a minimumát akkor éri el, amikor a mértani és harmonikus közepek között egyenlőség teljesül, ami pontosan akkor következik be, amikor a két tag megegyezik egymással, azaz

$$\frac{a}{2} = \frac{b}{5}. \quad (2)$$

Az (1) és (2) egyenletekből álló egyenletrendszer megoldása $a = 4$ és $b = 10$, ezért a keresett egyenes egyenlete:

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{10} = 1.$$

Megjegyzés: A P pont éppen felezi a kapott egyenesnek a koordináta-rendszer tengelyei közé eső szakaszát.

3669 A P pont koordinátáit az ábrán $P(x; y)$, a befogókra eső merőleges vetületeit pedig Q , illetve R jelöli. Ekkor Béla bácsi az $OQPR$ téglalapba tervez epert ültetni, melynek oldalai x , illetve y , területe ebből kifolyólag pedig $T = x \cdot y$ (x és y pozitív számok). Feladatunk a maximális területű téglalap megtalálása.

Mivel a P pont a telek átfogójára illeszkedik, ezért koordinátái kielégítik az átfogó egyenesének egyenletét, azaz:

$$7x + 5y = 35. \quad (1)$$

A fenti összeg tagjai kis ügyeskedés után megjeleníthetők az $OQPR$ téglalap területét leíró képletben:

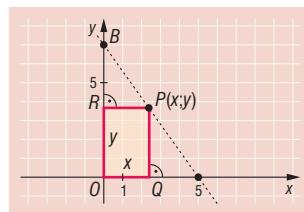
$$T = x \cdot y = \frac{1}{35} \cdot (7x) \cdot (5y).$$

Használjuk fel, hogy két pozitív szám mértani közepe nem lehet nagyobb, mint számtani közepük, ezért

$$T = \frac{1}{35} \cdot (\sqrt{(7x) \cdot (5y)})^2 \leq \frac{1}{35} \cdot \left(\frac{7x + 5y}{2}\right)^2 = \frac{1}{35} \cdot \left(\frac{35}{2}\right)^2 = \frac{35}{4}.$$

A második egyenlőségnél felhasználtuk az (1) összefüggést. Azt kaptuk tehát, hogy az $OQPR$ téglalap területére $T \leq \frac{35}{4}$. A terület a maximumát akkor veszi fel, amikor a mértani és számtani közép közötti egyenlőtlenségben egyenlőség teljesül, azaz amikor a két szám megegyezik egymással. Ez akkor következik be, ha

$$7x = 5y. \quad (2)$$





Az (1) és (2) egyenletekből álló egyenletrendszer megoldása:

$$x = \frac{5}{2} \quad \text{és} \quad y = \frac{7}{2}.$$

A maximális területű téglalap tehát a $P\left(\frac{5}{2}; \frac{7}{2}\right)$ ponthoz tartozik.

3670 a) Jelöljük a P pont koordinátáit $P(x; y)$ -nal. Ekkor

$$PA^2 = (x + 3)^2 + (y - 5)^2, \quad \text{illetve} \quad PB^2 = (x - 1)^2 + (y + 4)^2,$$

így a kijelölt műveleteket elvégezve kapjuk, hogy

$$PA^2 - PB^2 = 8x - 18y + 17.$$

Az adott feltételnek pontosan azok a P pontok tesznek eleget, amelyek koordinátái kielégítik a

$$8x - 18y + 17 = \lambda \quad (1)$$

egyenletet. Mivel a fenti egyenlet a λ értékétől függetlenül egy egyenes egyenlete, ezért a feltételt kielégítő P pontok valóban egy egyenesre illeszkednek.

b) Az (1) egyenletű egyenes meredeksége λ -tól függetlenül $m = \frac{4}{9}$, ezért a λ különböző értékeihez tartozó egyenesek valóban párhuzamosak egymással.

c) Ha az origó illeszkedik az egyenesre, akkor koordinátái kielégítik az (1) egyenletet, azaz

$$8 \cdot 0 - 18 \cdot 0 + 17 = \lambda, \quad \text{azaz} \quad \lambda = 17.$$

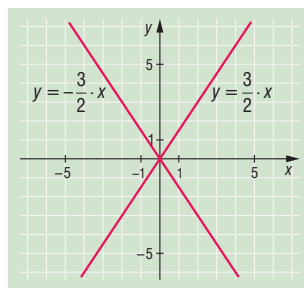
3671 a) Az egyenlet bal oldalát szorzattá alakíthatjuk:

$$(3x - 2y) \cdot (3x + 2y) = 0.$$

Mivel egy szorzat akkor és csak akkor lehet 0, ha valamelyik tényezője 0, ezért:

$$y = \frac{3}{2}x \quad \text{vagy} \quad y = -\frac{3}{2}x.$$

A feltételt kielégítő pontok tehát két, az origón áthaladó egyenes valamelyikére illeszkednek.



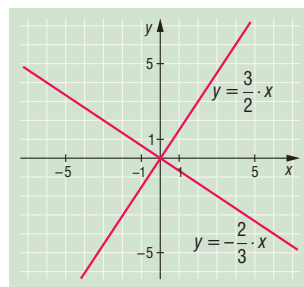
b) Az egyenlet bal oldalán álló kifejezést ezúttal is szorzattá alakíthatjuk:

$$\begin{aligned} 6x^2 - 6y^2 + 5xy &= 6x^2 - 4xy + 9xy - 6y^2 = \\ &= 2x \cdot (3x - 2y) + 3y \cdot (3x - 2y) = (3x - 2y) \cdot (2x + 3y) = 0. \end{aligned}$$

A feltételnek az

$$y = \frac{3}{2}x \quad \text{vagy} \quad y = -\frac{2}{3}x$$

egyenletű, egymásra merőleges egyenesek pontjai tesznek eleget.



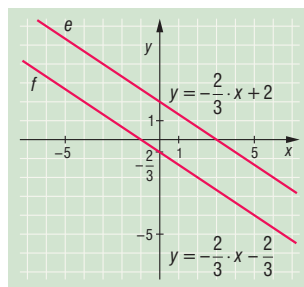
c) Az abszolút érték értelmezése alapján:

$$2x + 3y - 2 = 4 \quad \text{vagy} \quad 2x + 3y - 2 = -4.$$

A feltételnek az

$$e: 2x + 3y = 6, \quad \text{illetve} \quad f: 2x + 3y = -2$$

egyenletű, egymással párhuzamos egyenesek pontjai tesznek eleget.





Két egyenes metszéspontja, távolsága, hajlásszöge – megoldások

3672 a) $(1; 1);$ b) $(3; -3);$ c) $(5; 2);$ d) $\left(\frac{745}{168}; \frac{35}{24}\right).$

3673 a) $(-2; 5), (5; 3), (-1; -2);$ b) $(0; 0), (3; 5), (1; -4);$
c) $(-4; 2), (8; 3), (-1; -5);$ d) $(-3; 6), (5; 0), (-2; -1).$

3674 a) Az átlók metszéspontjának koordinátái $(2; 1).$
b) Az átlókat tartalmazó egyenesek egyenlete: $y = x - 1$, illetve $y = -x + 3$. A két egyenes meredekségének szorzata -1 , ami igazolja, hogy a négyszög átlói merőlegesek egymásra.
c) Az $ABCD$ négyszög deltoid.

3675 a) $O(3; -2), r = 5;$ b) $O(0; 0), r = \sqrt{20};$
c) $O(-5; -3), r = \sqrt{20};$ d) $O(-7; 0), r = \sqrt{17}.$

3676 a) $\left(\frac{38}{61}; \frac{20}{61}\right);$ b) $(1; 1);$ c) $\left(\frac{1}{3}; \frac{19}{3}\right).$

3677 $(1; 0).$

3678 a) $\sqrt{32} = 4 \cdot \sqrt{2} \quad [M(2; 0)];$ b) $\sqrt{5} \quad [M(1; -2)];$
c) $2 \cdot \sqrt{5} \quad [M(1; 3)];$ d) $2 \cdot \sqrt{5} \quad [M(3; 1)].$

3679 a) $(6; -4);$ b) $(2; -4);$ c) $(3; 7);$ d) $(5; 5).$

3680 a) Ha az $x - y = 4$ egyenletű egyenesen adott a $P(4; 0)$ pont, akkor az $x - y = -1$ egyenletű egyenesnek a P ponton áthaladó, rá merőleges egyenessel való metszéspontja $M\left(\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right).$

Ekkor $d_{PM} = \frac{5 \cdot \sqrt{2}}{2}.$

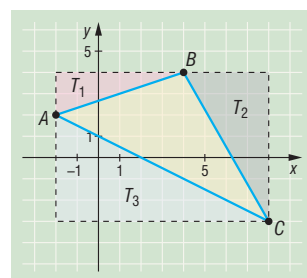
b) Ha a $-2x + y = 5$ egyenletű egyenesen adott a $P(0; 5)$ pont, akkor a $-2x + y = -5$ egyenletű egyenesnek a P ponton áthaladó, rá merőleges egyenessel való metszéspontja $M(4; 3).$
Ekkor $d_{PM} = 2 \cdot \sqrt{5}.$

c) Ha az $x + y = 1$ egyenletű egyenesen adott a $P(0; 1)$ pont, akkor az $y = 2 - x$ egyenletű egyenesnek a P ponton áthaladó, rá merőleges egyenessel való metszéspontja $M\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right).$
Ekkor $d_{PM} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

3681 A háromszög területét könnyen kiszámolhatjuk, ha egy, a koordináta-rendszer tengelyeivel párhuzamos oldalú téglalapba foglaljuk. A téglalap területe $T = 10 \cdot 7 = 70$. A téglalap csúcsainál lévő háromszögek területe:

$$T_1 = \frac{6 \cdot 2}{2} = 6, \quad T_2 = \frac{4 \cdot 7}{2} = 14, \quad T_3 = \frac{5 \cdot 10}{2} = 25.$$

A háromszög területe ezért $T_{\Delta} = 70 - (6 + 14 + 25) = 25.$





A magasságok hosszát a $T = \frac{c \cdot m_c}{2}$ képlettel számolhatjuk ki. Mivel $c = d_{AB} = \sqrt{40} = 2 \cdot \sqrt{10}$,

$$\text{és } T = 25, \text{ ezért } m_c = \frac{5 \cdot \sqrt{10}}{2}.$$

A háromszög másik két magassága $2 \cdot \sqrt{5}$, és $\frac{10 \cdot \sqrt{65}}{13}$.

3682 Az A-val jelölt templom koordinátáit az adott egyenesek metszéspontjaként kaphatjuk. A két egyenes egyenletéből álló egyenletrendszer megoldása $x = -1$ és $y = 5$, azaz az A pont koordinátái: $A(-1; 5)$.

A tervek szerint a K pont a három templom által meghatározott ABC háromszög magasságpontja, ezért a b-re merőleges, K-t tartalmazó egyenes éppen az ABC háromszög m_b magasságvonala. A magasságvonala egy normálvektora megegyezik a b egyenes egy irányvektorával. A b egyenes egyenletéből leolvasható annak egy irányvektora: $\vec{v}_b = \vec{n}_{m_b}(-1; 4)$, ezért az m_b egyenes egyenlete: $-x + 4y = 4$. A B pont koordinátáit az m_b , valamint a c egyenesek egyenletéből álló egyenletrendszer megoldása adja:

$$\begin{cases} -x + 4y = 4 \\ 2x + 9y = 43 \end{cases},$$

amiből $B(8; 3)$. Hasonló megfontolással juthatunk el a C pont koordinátáihoz. Az m_c egyenes egyenlete: $9x - 2y = 15$, a C pont koordinátái: $C(1; -3)$.

3683 A rajzlapon megmaradt két csúcspontot az ábrán A és B, a magasságpontot M, a hiányzó csúcspontot C jelöli. Mivel az $\overline{AM}(\frac{3}{2}; -\frac{3}{2})$

vektor a BC egyenesnek egy normálvektora, továbbá a $B(2; -3)$ pont illeszkedik az egyenesre, ezért a BC egyenes egyenlete:

$$\frac{3}{2}x - \frac{3}{2}y = \frac{3}{2} \cdot 2 - \frac{3}{2} \cdot (-3), \text{ azaz } x - y = 5.$$

Hasonló számolással az AC egyenes egyenlete: $x - 9y = -27$.

A C csúcs koordinátáit a BC és az AC egyenesek egyenletéből álló egyenletrendszer megoldása adja. Az egyenletrendszer megoldása után $C(9; 4)$ adódik.

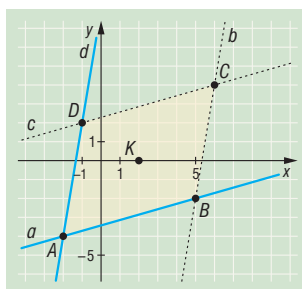
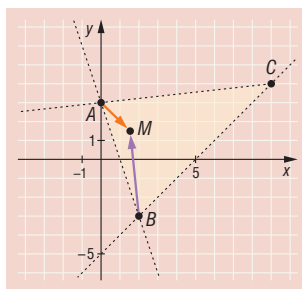
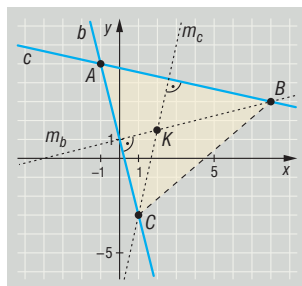
3684 A két adott egyenest megadásuk sorrendjében a és d, a paralelogramma középpontját K, csúcsait A, B, C és D jelöli az ábrán. Mivel az a és d egyenesek nem párhuzamosak egymással, ezért az egyenleteikből álló egyenletrendszer megoldása adja a paralelogramma A csúcsának koordinátáit: $A(-2; -4)$. A paralelogramma középpontja egybeesik az átlók felezőpontjával, ezért a K pont az AC szakasz felezőpontja is egyben. Ha a C pont koordinátáit $C(x; y)$ jelöli, akkor

$$\frac{x + (-2)}{2} = 2, \text{ illetve } \frac{y + (-4)}{2} = 0,$$

amiből $C(6; 4)$.

A BC egyenes egyenletét a C pont koordinátáinak ismeretében már könnyen felírhatjuk. Mivel BC párhuzamos az ismert d egyenessel, ezért a BC egyenes egy normálvektora $\vec{n}_{BC} = \vec{n}_d(-6; 1)$, így egyenlete:

$$-6x + y = -32.$$





Hasonló megfontolások után a CD egyenes egyenletére adódik:

$$-2x + 7y = 16.$$

A B pont koordinátáit a BC , valamint az a egyenesek egyenleteiből álló egyenletrendszer megoldásaként kapjuk: $B(5; -2)$.

Végül a CD és a d egyenesek D metszéspontja: $D(-1; 2)$.

- 3685** a) A B csúcs koordinátáit az AB és BC egyenesek egyenletéből álló egyenletrendszer megoldásaként kapjuk: $B(-1; -3)$.

A BC és CD egyenesek metszéspontja: $C(6; -2)$.

Ha a D pont koordinátái $D(x; y)$, és a BD átló felezőpontja F , akkor a felezőpontra vonatkozó összefüggések alapján:

$$\frac{(-1) + x}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{és} \quad \frac{(-3) + y}{2} = 1,$$

amiből $x = 2$ és $y = 5$, így $D(2; 5)$.

Végül az A pont első koordinátája -4 , továbbá illeszkedik az AB egyenesre, ezért ha második koordinátáját a_2 jelöli, akkor

$$4 \cdot (-4) + 3a_2 = -13, \quad \text{amiből} \quad a_2 = 1,$$

végül $A(-4; 1)$.

- b) Az $\overrightarrow{AD}(6; 4)$ vektor az AD egyenesnek egy irányvektora, ezért annak egyenlete:

$$4x - 6y = 4 \cdot 2 - 6 \cdot 5,$$

aminek egyszerűbb alakja:

$$2x - 3y = -11.$$

- c) Az $e: x = -1$ egyenletű egyenes párhuzamos az y tengellyel, továbbá tartalmazza az $ABCD$ négyszög B csúcsát. Az AD egyenessel való E metszéspontjának koordinátáit az

$$\left. \begin{array}{l} x = -1 \\ 2x - 3y = -11 \end{array} \right\}$$

egyenletrendszer megoldása adja: $E(-1; 3)$.

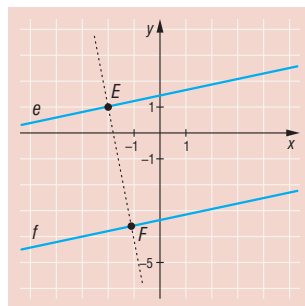
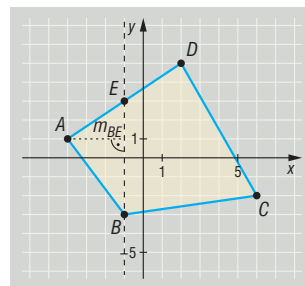
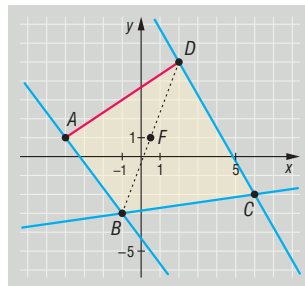
Eredményeink alapján az e egyenes az $ABCD$ négyszögből az ABE háromszöget vágja le. Az ABE háromszög területe:

$$T_{ABE} = \frac{BE \cdot m_{BE}}{2} = \frac{6 \cdot 3}{2} = 9.$$

- 3686** a) Jelöljük a két adott oldalegyenest megadásuk sorrendjében e -vel és f -fel. Az egyenletekből leolvasható, hogy a két egyenes párhuzamos egymással, ezért csakis a rombusz két szemközti oldalegyenesei lehetnek. Az elmondottak alapján a rombusz magassága az e és az f egyenes távolságával egyenlő. Ezt a távolságot megkaphatjuk például úgy, hogy az e egyenes egy tetszőleges E pontjának az f egyenestől való távolságát kiszámítjuk. Az e egyenes egy pontja az $E(-2; 1)$ pont.

Az f -re merőleges egyenesek egy normálvektora az $\vec{n}(5; 1)$ vektor, ezért az E -re illeszkedő, f -re merőleges egyenes egyenlete:

$$5x + y = 5 \cdot (-2) + 1 \cdot 1, \quad \text{azaz} \quad 5x + y = -9.$$





Ennek az egyenesnek az f egyenessel való F metszéspontjának koordinátáit az

$$\begin{cases} 5x + y = -9 \\ x - 5y = 17 \end{cases}$$

egyenletrendszer megoldása adja. Az egyenletrendszer megoldása:

$$F\left(-\frac{14}{13}; -\frac{47}{13}\right).$$

Az e és f egyenesek távolságát – így a rombusz magasságát is – az EF távolság adja meg:

$$EF = \sqrt{\left(-\frac{14}{13} + 2\right)^2 + \left(-\frac{47}{13} - 1\right)^2} = \sqrt{\frac{144}{169} + \frac{3600}{169}} = \frac{12 \cdot \sqrt{26}}{13}.$$

A rombusz területe ezek után már könnyen kiszámolható:

$$T = a \cdot m = \sqrt{26} \cdot \frac{12 \cdot \sqrt{26}}{13} = 24.$$

- b) Egyszerű számolás mutatja, hogy az $A(2; -3)$ pont illeszkedik az f egyenesre. Ismert, hogy a rombusz átlói felezik egymást, ezért ha az A -val szemkötti C csúcs koordinátái $C(x; y)$, akkor az AC szakasz felezőpontja az $O(5; 0)$ pont, és így

$$\frac{2+x}{2} = 5 \quad \text{és} \quad \frac{-3+y}{2} = 0.$$

Az egyenletrendszer megoldásaként a C pont koordinátái: $C(8; 3)$.

A rombusz átlói merőlegesen egymásra, ezért az $\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}(1; 1)$

vektor normálvektora a másik átlót tartalmazó egyenesnek. Mivel az O pont ennek az egyenesnek is pontja, ezért a BD átlót tartalmazó egyenes egyenlete: $x + y = 5$. A rombusz B csúcsát az

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x - 5y = 17 \end{cases}$$

egyenletrendszer megoldása után kapjuk: $B(7; -2)$. Hasonló számolások eredményeként: $D(3; 2)$.

A $\overrightarrow{BC}(1; 5)$ vektor irányvektora a BC és az AD egyenesnek is. Ezek alapján a BC egyenes egyenlete:

$$5x - y = 5 \cdot 7 - 1 \cdot (-2), \quad \text{azaz} \quad 5x - y = 37.$$

Az AD egyenes egyenlete:

$$5x - y = 5 \cdot 2 - 1 \cdot (-3), \quad \text{azaz} \quad 5x - y = 13.$$

- 3687 a) Az ábra jelöléseit használva az ED egyenes egyenlete:

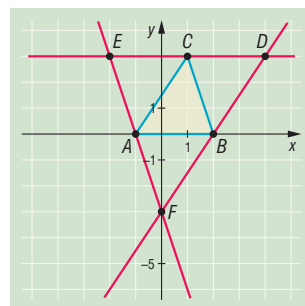
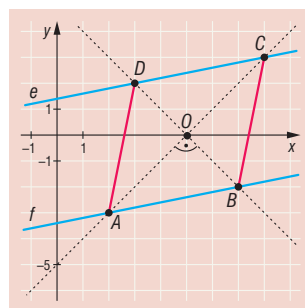
$$y = 3.$$

Az EF egyenesnek a $\overrightarrow{BC}(-1; 3)$ vektor irányvektora, az A csúcs pedig egy pontja, ezért EF egyenlete:

$$3x + y = -3.$$

Az FD egyenesnek az $\overrightarrow{AC}(2; 3)$ vektor irányvektora, B pedig egy pontja, így FD egyenlete:

$$3x - 2y = 6.$$





- b) A megfelelő egyenletrendszerek megoldása után kapjuk a DEF háromszög csúcspontjainak koordinátáit:

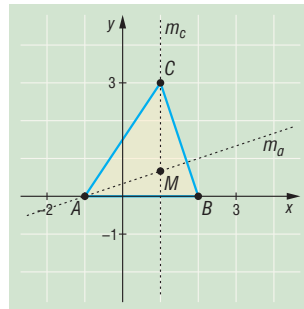
$$D(4; 3), E(-2; 3) \text{ és } F(0; -3).$$

- c) Az ABC háromszög C csúcán átmenő m_c magasságvonalának egyenlete: $x = 1$.

Az A csúchhoz tartozó m_a magasságvonalnak a $\overrightarrow{BC}(-1; 3)$ vektor normálvektora, ezért m_a egyenlete: $-x + 3y = 1$.

Az M magasságpont koordinátáit az m_a és m_c egyenleteiből álló egyenletrendszerből számíthatjuk:

$$M\left(1; \frac{2}{3}\right).$$



- d) A háromszög köré írható kör középpontja az oldalfelező merőlegesek metszéspontja. Vegyük észre, hogy az m_c egyenes egyben a DEF háromszög ED oldalának, míg az m_a egyenes az EF oldalnak a felezőmerőlegese, ezért az M pont egybeesik a DEF háromszög köré írható kör középpontjával. A DEF háromszög köré írható kör középpontja így:

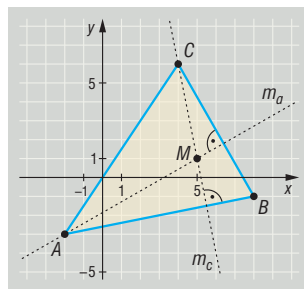
$$M\left(1; \frac{2}{3}\right).$$

- 3688** a) Az A csúchhoz tartozó m_a magasságvonalnak a $\overrightarrow{BC}(-4; 7)$ vektor normálvektora, ezért m_a egyenlete: $-4x + 7y = -13$.

Hasonló megfontolások után a C csúchhoz tartozó m_c magasságvonal egyenlete: $5x + y = 26$.

A két egyenletből álló egyenletrendszer megoldása szolgáltatja az ABC háromszög M magasságpontjának koordinátáit:

$$M(5; 1).$$



- b) Az ABC háromszög köré írt kör O középpontja az oldalfelező merőlegesek metszéspontjával esik egybe. A BC oldal f_a oldalfelező merőlegese egyrészt tartalmazza a BC oldal felezőpontját, másrészt egy normálvektora a $\overrightarrow{BC}(-4; 7)$ vektor. Ezek alapján az f_a egyenes egyenlete:

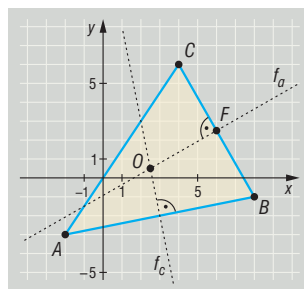
$$-4x + 7y = -\frac{13}{2}.$$

Hasonló módszerrel kapjuk, hogy az AB oldal f_c oldalfelező merőlegesének egyenlete:

$$5x + y = 13.$$

Az egyenletrendszer megoldása után adódik:

$$O\left(\frac{5}{2}; \frac{1}{2}\right).$$



- c) Az OM egyenes egy irányvektora az $2\overrightarrow{OM}(5; 1)$ vektor, egy pontja az $M(5; 1)$ pont. Ezek alapján az Euler-egyenes egyenlete:

$$x - 5y = 0.$$

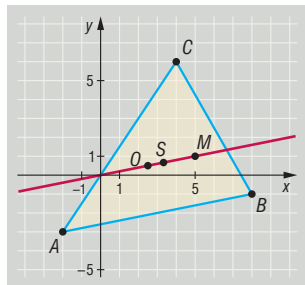


d) Az ABC háromszög súlypontja: $S\left(\frac{10}{3}; \frac{2}{3}\right)$. Mivel $\frac{10}{3} - 5 \cdot \frac{2}{3} = 0$, ezért az S pont koordinátái

kielégítik az Euler-egyenes egyenletét, amiből következik, hogy S illeszkedik az OM Euler-egyenesre.

e) Mivel $\overrightarrow{OS}\left(\frac{5}{6}; \frac{1}{6}\right)$, továbbá $\overrightarrow{SM}\left(\frac{5}{3}; \frac{1}{3}\right)$, ezért $\overrightarrow{SM} = 2\overrightarrow{OS}$. Ezek

alapján láthatjuk, hogy az S súlypont 1:2 arányban osztja fel az OM szakaszt.



3689 Az egyenes egyenletéből könnyen leolvasható, hogy az e egyenes egy egységnyi hosszúságú normálvektora:

$$\vec{n}\left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}; \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right).$$

Vegyünk fel egy tetszőleges E pontot az e egyenesen, koordinátáit jelöljük $E(x; y)$ -nal. Ekkor:

$$\overrightarrow{EP}(x_0 - x; y_0 - y).$$

Mivel az E pont koordinátái biztosan kielégítik az e egyenes egyenletét, ezért teljesül:

$$Ax + By + C = 0. \quad (1)$$

Ezután indítsuk az \vec{n} normálvektor kezdőpontját az E pontból, és jelöljük az \overrightarrow{EP} és az \vec{n} vektorok által bezárt szöget α -val. Jelölje továbbá Q a P pontnak az E ponton átmenő, e -re merőleges egyenesre eső vetületét. Ekkor az EQ szakasz hossza éppen megegyezik a P pont és az e egyenes d távolságával.

Ha az \overrightarrow{EP} és az \vec{n} vektorok az e egyenesnek ugyanabba a félsíkjaiba mutatnak, akkor $\alpha \leq 90^\circ$. Kiszámoljuk a két vektor skaláris szorzatát:

$$\overrightarrow{EP} \cdot \vec{n} = |\overrightarrow{EP}| \cdot |\vec{n}| \cdot \cos \alpha = |\overrightarrow{EP}| \cdot 1 \cdot \cos \alpha = EQ = d. \quad (2)$$

A fenti eredmények alapján a két vektor skaláris szorzata éppen az e egyenes és a P pont távolságával egyenlő. A skaláris szorzatot a koordináták segítségével felírva azt kapjuk, hogy

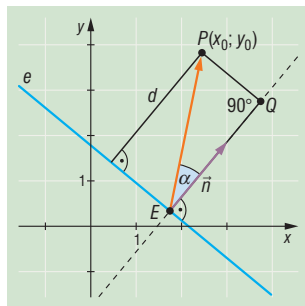
$$\overrightarrow{EP} \cdot \vec{n} = (x_0 - x) \cdot \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} + (y_0 - y) \cdot \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{Ax_0 + By_0 + C - (Ax + By + C)}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Az utolsó zárójelben található összeg (1) miatt 0-val egyenlő, azaz:

$$\overrightarrow{EP} \cdot \vec{n} = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (3)$$

A (2) és (3) egyenlőségek összevetése után azt kapjuk, hogy:

$$d(P, e) = d = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (4)$$





Amennyiben az \overrightarrow{EP} és az \vec{n} vektorok az e egyenesnek különböző félsíkjaiba mutatnak (ld. a jobb oldalon lévő ábrát), akkor $\alpha > 90^\circ$, így a (2) egyenlőség a következőképpen módosul:

$$\overrightarrow{EP} \cdot \vec{n} = |\overrightarrow{EP}| \cdot 1 \cdot \cos \alpha = -EP \cdot \cos(180^\circ - \alpha) = -EQ = -d. \quad (2')$$

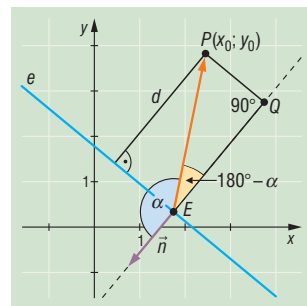
A bizonyítás további lépései nem változnak, így (2') és (3) összevetéséből azt kapjuk, hogy:

$$d(P, e) = d = -\frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (4')$$

A (4) és (4') összefüggéseket egyetlen egyenlőségben is felírhatjuk:

$$d(P, e) = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|,$$

ami éppen a bizonyítandó állítás.



- 3690** a) Két egyenes hajlásszögét többféle módszerrel is kiszámolhatjuk. Egyik lehetőség, hogy irányvektoraik skaláris szorzatából számoljuk ki a keresett szöget. Az egyenesek egyenletéből leolvasható egy-egy irányvektoruk:

$$\vec{v}_1(0; 1) \text{ és } \vec{v}_2(1; -2).$$

A két vektor skaláris szorzata:

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) = -2.$$

A skaláris szorzat definíciója alapján:

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = |\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_2| \cdot \cos \alpha = 1 \cdot \sqrt{5} \cdot \cos \alpha,$$

ahol α a két vektor hajlásszöge. A skaláris szorzatra kapott értékek összehasonlításából:

$$-2 = \sqrt{5} \cdot \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}},$$

amiből $\alpha \approx 153,43^\circ$. A két egyenes hajlásszöge így $180^\circ - 153,43^\circ = 26,57^\circ$.

- b) Amennyiben a két egyenes nem merőleges egymásra és iránytangenssel rendelkeznek, akkor a 3639. feladat eredménye alapján a két egyenes α hajlásszögére

$$\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2} \right|.$$

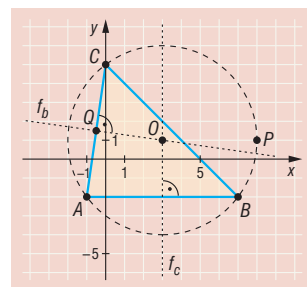
Az egyenletekből $m_1 = 2$ és $m_2 = 3$, ezért $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{7}$, amiből $\alpha \approx 8,13^\circ$.

- c) Ebben az esetben $m_1 = -2$ és $m_2 = 3$, ezért $\operatorname{tg} \alpha = 1$, amiből $\alpha = 45^\circ$.

- 3691** a) Az ABC háromszög köré írható körének középpontja az oldalfelező merőlegesek metszéspontjával esik egybe. Az AB oldal f_c felezőmerőlegesének egyenlete: $x = 3$. Az AC oldal f_b felezőmerőlegese tartalmazza az AC szakasz $Q\left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$ felezőpontját, továbbá a normálvektora az $\overrightarrow{AC}(1; 7)$ vektor, ezért f_b egyenlete: $x + 7y = 10$.

A körülírt kör O középpontja mindkét egyenletet kielégíti, ezért az egyenletrendszer megoldása után $O(3; 1)$ adódik.

Az ABC háromszög köré írható kör sugara: $r = |\overrightarrow{OA}| = 5$. Mivel $|\overrightarrow{OP}| = 5$ szintén teljesül, ezért a P pont valóban illeszkedik az ABC háromszög köré írható körre.





b) Az E pont koordinátái akár az ábráról is leolvashatók: $E(8; -2)$.

Az F pontot a BC egyenes, valamint a P -re illeszkedő, BC -re merőleges egyenes metszéspontjaként kapjuk. A BC egyenes két pontja ismert, ezért egyenlete könnyen felírható: $x + y = 5$. A BC -re merőleges, P -t tartalmazó egyenesnek a $\vec{v}(1; 1)$ vektor irányvektora, ezért egyenlete: $x - y = 7$. A két egyenletből álló egyenletrendszer megoldásaként $F(6; -1)$ adódik.

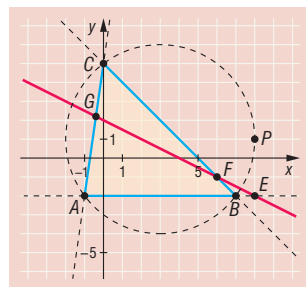
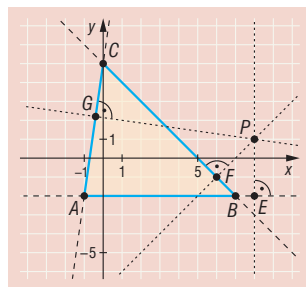
A G pont koordinátái hasonló módszerrel számolhatók ki. Az AC egyenes egyenlete: $-7x + y = 5$, a rá merőleges, P -t tartalmazó egyenesé: $x + 7y = 15$. Az egyenletrendszer megoldása után:

$$G\left(-\frac{2}{5}; \frac{11}{5}\right).$$

c) Megmutatjuk, hogy a G pont illeszkedik az EF egyenesre. Ehhez felírjuk az EF egyenes egyenletét. Mivel az egyenesnek az $\vec{FE}(2; -1)$ vektor irányvektora, E pedig egy pontja, ezért az egyenlet: $x + 2y = 4$. Az egyenletbe a G pont koordinátáit behelyettesítve teljesül, hogy:

$$-\frac{2}{5} + 2 \cdot \frac{11}{5} = 4,$$

ami igazolja, hogy a G pont illeszkedik az EF egyenesre. Ezzel beláttuk, hogy a P pont oldalegyenesekre vonatkozó merőleges vetületei egy egyenesre illeszkednek (Simson-egyenes).



3692 A golyó kezdeti helyét jelöljük A -val, az egyenest, amelyről visszapattan e -vel. A megoldás során feltételezzük, hogy a visszapattanás előtt a golyó útja ugyanakkora szöget zár be az e egyenessel, mint a visszapattanás utáni útja, azaz az ábrán α -val megjelölt szögek egyenlő nagyságúak. Ezt persze a következőképp is megfogalmazhatjuk: ha a golyó visszapattanás előtti útját meghosszabbítanánk (az ábrán ezt a TQ szakasz szemlélteti), akkor a visszapattanás utáni útja (az ábrán TQ' félegyenes) egybeesne a TQ félegyenes e egyenesre vonatkozó tükörképével. Ezek után a feladat megoldásához a következő lépések vezetnek.

1. Kiszámoljuk, hogy a golyó mely T pontban éri el az e egyenest. A golyó a $3x + 4y = 32$ egyenletű egyenesen halad. A T pont koordinátáit a

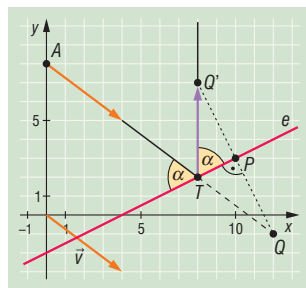
$$\begin{cases} 3x + 4y = 32 \\ x - 2y = 4 \end{cases}$$

egyenletrendszer megoldása adja. Megoldva a felírt egyenletrendszert, azt kapjuk, hogy a T pont koordinátái: $T(8; 2)$.

2. Keresünk egy Q pontot az AT félegyenes T ponton túli meghosszabbításán. Könnyen látható, hogy a $Q(12; -1)$ pont kielégíti az AT egyenes egyenletét, és így a feltételeknek megfelel.

3. A Q pontból merőlegest állítunk az e egyenesre. Az e egyenes $\vec{n}(1; -2)$ normálvektora a keresett egyenesnek irányvektora, ezért az e -re merőleges, Q -t tartalmazó egyenes egyenlete: $2x + y = 23$.

4. Megkeressük az iménti merőleges és az e egyenes P metszéspontját. A megfelelő egyenletrendszer megoldása után: $P(10; 3)$.





5. A Q pontot tükrözzük a P pontra, így kapjuk a Q' pontot. Ha a Q' pont koordinátái $Q'(x; y)$, akkor felhasználva, hogy a QQ' szakasznak éppen P a felezőpontja, azt kapjuk, hogy

$$\frac{12+x}{2} = 10 \quad \text{és} \quad \frac{-1+y}{2} = 3.$$

Az egyenleteket megoldva: $Q'(8; 7)$.

6. A golyó a visszapattanás után a TQ' egyenesen halad, ezért felírjuk annak egyenletét. Mivel a T és a Q' pontnak is 8 az első koordinátája, ezért a biliárdgolyó a visszapattanás után az $x = 8$ egyenletű egyenesen halad tovább.

A kör egyenlete – megoldások

3693 a) $x^2 + y^2 - \frac{1}{4} = 0;$

c) $x^2 + y^2 + 2x - 4y + \frac{24}{5} = 0;$

e) $x^2 + y^2 + 10x + 10y + 25 = 0;$

3694 a) $x^2 + y^2 - 4y + 2 = 0;$

c) $x^2 + y^2 - 2x + 8y - 65 = 0;$

3695 a) $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{13}{2};$

c) $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = \frac{29}{2};$

3696 a) $(5; 3),$ illetve $(5; -5);$

3697 a) $O(0; 0), \quad r = \sqrt{30};$

c) $O(2; -4), \quad r = 6;$

e) $O\left(\frac{7}{2}; -1\right), \quad r = \frac{\sqrt{373}}{2};$

g) $O\left(1; -\frac{3}{2}\right), \quad r = \frac{\sqrt{53}}{2}.$

b) $x^2 + y^2 - 5 - 2 \cdot \sqrt{6} = 0;$

d) $x^2 + y^2 + 2 \cdot \sqrt{3}x + 2 \cdot \sqrt{6}y + 5 = 0;$

f) $x^2 + y^2 + 4x - 10y + 4 = 0.$

b) $x^2 + y^2 + 4x + 6y + 3 = 0;$

d) $x^2 + y^2 - 4x - 4y = 0.$

b) $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 25;$

d) $(x - 1)^2 + y^2 = 29.$

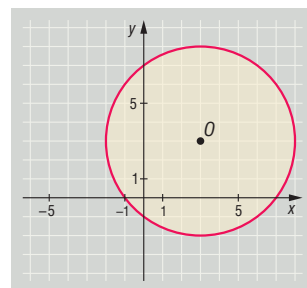
b) $(-2; 2),$ illetve $(6; 2).$

b) $O(0; 3), \quad r = 2 \cdot \sqrt{3};$

d) $O\left(-\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right), \quad r = \sqrt{\frac{67}{2}};$

f) $O(\sqrt{2}; \sqrt{3}), \quad r = \sqrt{5};$

3698 a) $O(3; 3), \quad r = 5.$

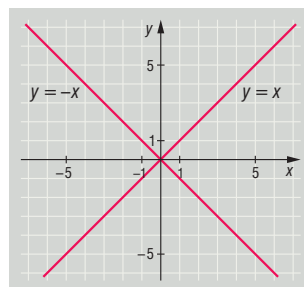




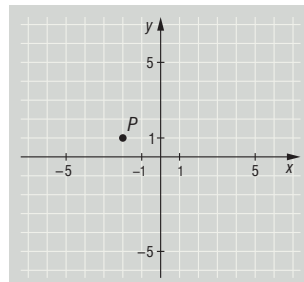
b) Az egyenlet bal oldalát szorzattá alakíthatjuk:

$$(x + y) \cdot (x - y) = 0.$$

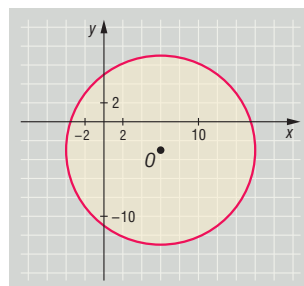
Az egyenlet két egyenest határoz meg.



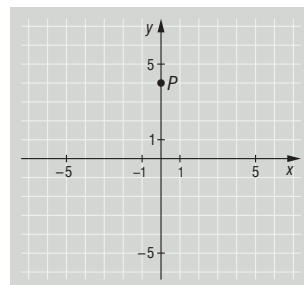
c) Az egyenletet csak a $P(-2; 1)$ pont koordinátái elégítik ki.



d) $O(6; -3)$, $r = 10$.



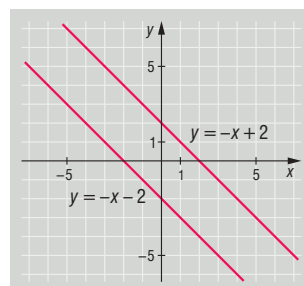
e) Az egyenletet csak a $P(0; 4)$ pont koordinátái elégítik ki.



f) Az egyenlet átalakítása után az

$$(x + y + 2) \cdot (x + y - 2) = 0$$

alakhoz juthatunk. Az egyenlet két egyenest határoz meg.

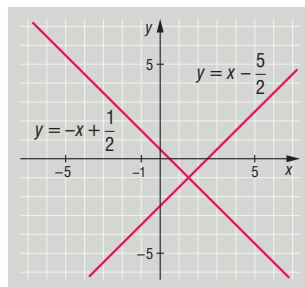




g) Az egyenlet átalakítása után az

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = (y + 1)^2$$

alakhoz juthatunk. Az egyenlet két egyenest határoz meg.



3699 a) $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 13$;

b) $(x - 3)^2 + y^2 = 34$.

3700 a) A kör egyenlete: $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 20$.

b) A kör egyenlete: $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 29$.

3701 a) $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 1$;

b) $(x + 3)^2 + (y - 5)^2 = 49$;

c) $(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 12,5$;

d) $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 5$.

3702 a) $(x - r)^2 + (y - r)^2 = r^2$;

b) $(x + r)^2 + (y - r)^2 = r^2$;

c) $(x + r)^2 + (y + r)^2 = r^2$;

d) $(x - r)^2 + (y + r)^2 = r^2$.

3703 Tegyük fel, hogy az ismeretlen csúcsok koordinátái $C(c_1; c_2)$ és $B(0; b_2)$. Mivel ismert a BC szakasz felezőpontja, ezért

$$\frac{0 + c_1}{2} = 2 \quad \text{és} \quad \frac{b_2 + c_2}{2} = 4.$$

Az első egyenletből $c_1 = 4$.

A feltételek alapján a C pont illeszkedik az $y = \frac{3}{2}x - 4$ egyenletű egyenesre, ezért

$$c_2 = \frac{3}{2} \cdot 4 - 4 = 2,$$

így $C(4; 2)$. A BC szakasz felezőpontjára felírt második egyenletből $B(0; 6)$.

Az AB oldal felezőmerőlegesének egyenlete: $y = 3$.

A BC oldal felezőmerőlegesének egyenlete: $x - y = -2$.

A két egyenes metszéspontja az $O(1; 3)$ pont, ami egyben az ABC háromszög köré írható körének középpontja is.

A kör sugara: $OA = \sqrt{10}$, ezért a keresett kör egyenlete:

$$(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 10.$$

3704 a) A háromszög köré írható kör középpontja az AB átfogó $O\left(2; \frac{1}{2}\right)$ pontja. A kör sugara:

$$r = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{85}}{2},$$

egyenlete:

$$(x - 2)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{85}{4}.$$



- b) A BC befogó meredeksége ismert, ezért a BC egyenes irány-tényezős egyenlete felírható:

$$y + 3 = \frac{1}{4}(x - 5), \quad \text{amiből} \quad x = 4y + 17.$$

Ha ezt a kör egyenletébe helyettesítjük, akkor:

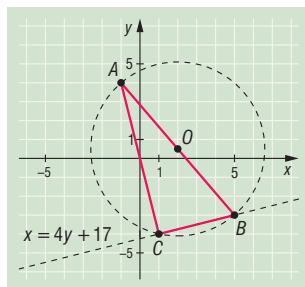
$$(4y + 15)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{85}{4},$$

$$17y^2 + 119y + 204 = 0,$$

$$y^2 + 7y + 12 = 0.$$

Az egyenletrendszer megoldásai: $y = -3$, illetve $y = -4$.

Ebből a kör és a BC egyenes két metszéspontja: $B(5; -3)$, illetve $C(1; -4)$.



- 3705** A kör egyenlete felírható a következő alakban is:

$$(x - 7)^2 + (y - 3)^2 = 4,$$

így a kör középpontja $O(7; 3)$, sugara pedig 2. A kör legkisebb ordinátájú pontja ebből adódóan a $Q(7; 1)$ pont. A Q középpontú, origót tartalmazó kör sugara $\sqrt{50}$, ezért a keresett kör egyenlete:

$$(x - 7)^2 + (y - 1)^2 = 50.$$

A kapott kör y tengellyel való metszéspontjait megkapjuk, ha x helyére nullát írunk, ekkor

$$(y - 1)^2 = 1,$$

amiből $y = 0$, vagy $y = 2$.

Ez azt jelenti, hogy a kör az ordinátatengelyt az origón kívül még a $(0; 2)$ pontban metszi.

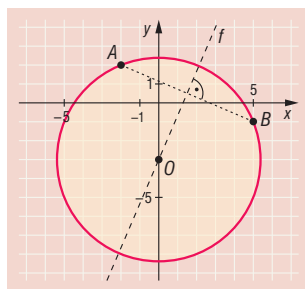
- 3706** Az adott pontokat jelöljük A -val és B -vel. Mivel az AB szakasz a keresett körnek egy húrja, ezért a kör O középpontja illeszkedik az AB szakasz felezőmerőlegesére. Az AB szakasz f felezőmerőlegesének egyenlete: $7x - 3y = 9$.

- a) Mivel az O pont illeszkedik az y tengelyre, ezért koordinátáira $O(0; -3)$ teljesül. A kör sugara ebben az esetben:

$$r = OA = \sqrt{29},$$

egyenlete:

$$x^2 + (y + 3)^2 = 29.$$



- b) A kör középpontja az adott h , és az f egyenesek metszéspontja, ezért koordinátáit az alábbi egyenletrendszer megoldása adja:

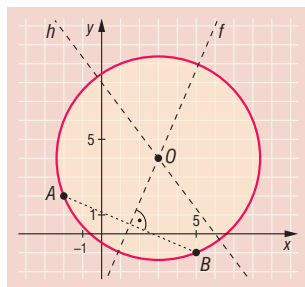
$$\begin{cases} 7x - 3y = 9 \\ 4x + 3y = 24 \end{cases}.$$

Az O középpont koordinátái: $O(3; 4)$, a kör sugara:

$$r = OA = \sqrt{29},$$

végül egyenlete:

$$(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 29.$$



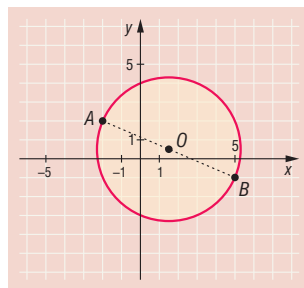


- c) A kör középpontja az AB szakasz $O\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$ felezőpontja, sugara:

$$r = OA = \sqrt{\frac{29}{2}},$$

egyenlete:

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{29}{2}.$$



- 3707** a) A tervezett kijáratot K -val, az autópálya nyomvonalát a -val jelöltük az ábrán. A feltételek szerint $AK = BK$, ezért a K pont illeszkedik az AB szakasz f felezőmerőlegesére. Az f egyenes egyenlete: $y = 2x + 11$. A tervezett kijárat helyére a megfelelő egyenletrendszer megoldása után $K(-3; 5)$ adódik.

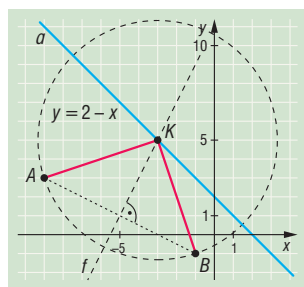
- b) A kör sugara:

$$r = AK = \sqrt{40},$$

egyenlete:

$$(x + 3)^2 + (y - 5)^2 = 40.$$

- c) A tervezett útszakaszok hossza egy tized pontossággal 6,3 km.



- 3708** a) A keresett kör az első síknegyedben található, és ha sugarát r jelöli, akkor középpontjának koordinátái $O(r; r)$, így egyenlete:

$$(x - r)^2 + (y - r)^2 = r^2$$

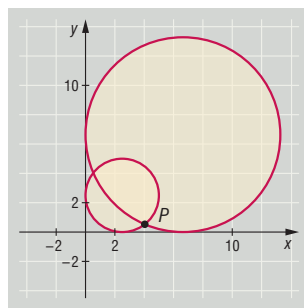
alakú. Mivel a $P\left(4; \frac{1}{2}\right)$ pont kielégíti a kör egyenletét, ezért:

$$\left(4 - r\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - r\right)^2 = r^2,$$

$$r^2 - 9r + \frac{65}{4} = 0.$$

Az egyenlet megoldásai: $r = \frac{5}{2}$, illetve $r = \frac{13}{2}$. A feltételeknek két kör tesz eleget, egyenletük:

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}, \quad \text{illetve} \quad \left(x - \frac{13}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{13}{2}\right)^2 = \frac{169}{4}.$$



- b) A kör a második síknegyedben található, így középpontja ezúttal $O(-r; r)$, egyenlete:

$$(x + r)^2 + (y - r)^2 = r^2.$$

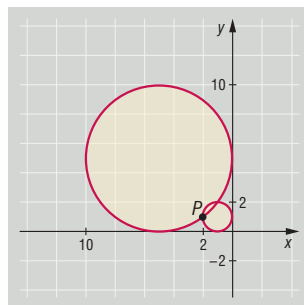
A $(-2; 1)$ pont koordinátáit az egyenletbe helyettesítve:

$$(-2 + r)^2 + (1 - r)^2 = r^2,$$

$$r^2 - 6r + 5 = 0.$$

Az egyenlet megoldásai: $r = 5$ és $r = 1$. A feltételeknek a következő egyenletű körök felelnek meg:

$$(x + 5)^2 + (y - 5)^2 = 25 \quad \text{és} \quad (x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 1.$$





c) A kör egyenletét az alábbi alakban kereshetjük:

$$(x + r)^2 + (y + r)^2 = r^2.$$

Az adott pont koordinátáit behelyettesítve:

$$\begin{aligned} (-1 + r)^2 + (-8 + r)^2 &= r^2, \\ r^2 - 18r + 65 &= 0. \end{aligned}$$

Az egyenlet megoldásai:

$$r = 13 \quad \text{és} \quad r = 5.$$

A kapott két kör egyenlete:

$$(x + 13)^2 + (y + 13)^2 = 169, \quad \text{illetve} \quad (x + 5)^2 + (y + 5)^2 = 25.$$

d) A kör egyenletének alakja ezúttal:

$$(x - r)^2 + (y + r)^2 = r^2.$$

Az adott pont koordinátáit a kör egyenletébe helyettesítve a következő egyenlethez jutunk:

$$r^2 - 22r + 85 = 0,$$

amelynek megoldásai:

$$r = 17 \quad \text{és} \quad r = 5.$$

A feltételeket kielégítő körök egyenlete:

$$(x - 17)^2 + (y + 17)^2 = 289, \quad \text{illetve} \quad (x - 5)^2 + (y + 5)^2 = 25.$$

3709 a) A fákát megadásuk sorrendjében A , B , C és D jelöli az ábrán. Célunk annak igazolása, hogy az $ABCD$ négyszög csúcsai egy körön találhatók, vagyis hogy $ABCD$ húrnégyszög.

A húrnégyszög körülírt körének középpontja az oldalfelező merőlegesek metszéspontja, ezért eljárhatunk úgy is, hogy kiszámítjuk valamely két oldal felezőmerőlegesének O metszéspontját, majd megmutatjuk, hogy az a csúcsoktól ugyanakkora távolságra van.

A CD oldal felezőmerőlegesének egyenlete: $y = 3$.

A BC oldal felezőmerőlegesének egyenlete: $x + y = 7$.

A két egyenletből álló egyenletrendszer megoldása után $O(4; 3)$ adódik. Az O pont származtatása alapján $OB = OC = OD$ nyilvánvalóan teljesül, és ez a közös távolság: $\sqrt{20}$.

Elegendő kimutatni, hogy az OA távolság szintén ugyanekkora. Egyszerű számolás mutatja, hogy

$$|\overline{OA}| = d_{AO} = \sqrt{(4 - 6)^2 + (3 - (-1))^2} = \sqrt{20}$$

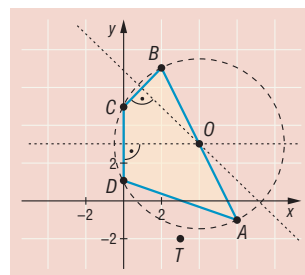
valóban teljesül. Eredményeink alapján az $ABCD$ négyszög húrnégyszög, azaz valóban található olyan pont, amelybe a locsoló berendezést elhelyezve, az képes meglocsolni mind a négy díszfát. Ez a pont a koordináta-rendszer $O(4; 3)$ pontja. Látható, hogy az O pont egybeesik az AB szakasz felezőpontjával.

b) A locsoló berendezést $\sqrt{20} \approx 4,47$ egység távolságra kell beállítani.

c) A tuját (T) az O ponttól

$$\sqrt{(4 - 3)^2 + (3 - (-2))^2} = \sqrt{26}$$

egység távolságra van, ezért a locsoló berendezés a tuját nem éri el.





- 3710** a) Az oldalfelező pontok: $E(2; -2)$, $F(4; 2)$ és $G(-1; 2)$. Az EFG háromszög köré írt körének O középpontjának koordinátái például az FG és a GE oldalak felezőmerőlegesének metszéspontjaként számíthatók. Az FG felezőmerőlegesének (az ábrán f_1 jelöli) egyenlete:

$$x = \frac{3}{2}.$$

A GE szakaszfelező merőlegesének (f_2) egyenlete:

$$3x - 4y = \frac{3}{2}.$$

Az egyenletrendszer megoldása után adódik:

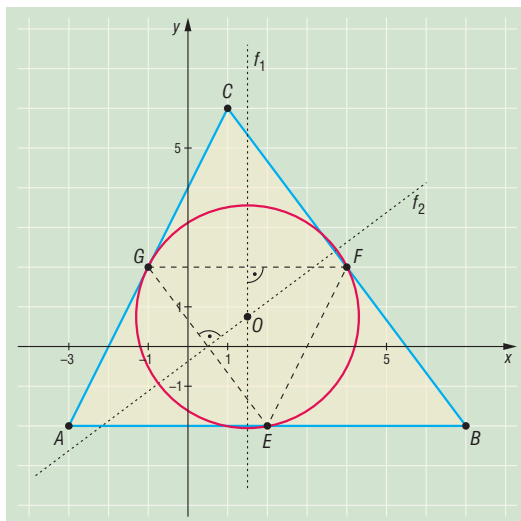
$$O\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{4}\right).$$

Az EFG háromszög körülírt körének sugara:

$$r = |\overrightarrow{OG}| = \sqrt{\frac{125}{16}} = \frac{5 \cdot \sqrt{5}}{4}.$$

Az ABC háromszög Feuerbach-körének egyenlete:

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{125}{16}.$$



- b) Vegyük észre, hogy az ABC háromszög egyenlő szárú, hiszen $AB = BC = 10$. Ebből következően az AC alap G felezőpontja egybeesik az m_b magasságvonal talppontjával, ezért az állítás az m_b magasságvonalra teljesül.

Az ABC háromszög m_c magasságvonala párhuzamos az y tengellyel és egyenlete: $x = 1$, így m_c talppontja a $H(1; -2)$ pont. Mivel teljesül, hogy

$$\left(1 - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(-2 - \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{125}{16},$$

ezért H koordinátái kielégítik a Feuerbach-kör egyenletét, amiből már következik, hogy illeszkedik a körre.

Az m_a magasságvonal egyenlete:

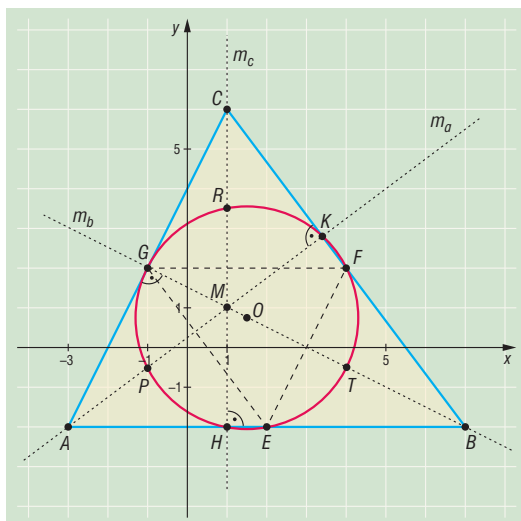
$$-3x + 4y = 1,$$

a BC egyenesé:

$$4x + 3y = 22.$$

A két egyenletből álló egyenletrendszer megoldása adja az m_a magasságvonal K talppontjának koordinátáit:

$$K\left(\frac{17}{5}; \frac{14}{5}\right).$$





Egyszerű számolás mutatja, hogy

$$\left(\frac{17}{5} - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{14}{5} - \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{125}{16},$$

így K is illeszkedik az ABC háromszög Feuerbach-körére.

- c) Az ABC háromszög M magasságpontja az m_a és m_c magasságvonalak metszéspontja. Ebből következően koordinátáit a

$$\begin{cases} -3x + 4y = 1 \\ x = 1 \end{cases}$$

egyenletrendszer megoldása adja. Az egyenletrendszer megoldásaként $M(1; 1)$ adódik. Ezek után könnyen kiszámolhatjuk a magasságpont és az ABC háromszög csúcsai közötti szakaszok felezőpontjainak koordinátáit (ld. ábra):

$$P\left(-1; -\frac{1}{2}\right), \quad T\left(4; -\frac{1}{2}\right) \quad \text{és} \quad R\left(1; \frac{7}{2}\right).$$

Nem kis fáradságot igénylő, de nem is túlságosan bonyolult számításokkal meggyőződhetünk arról, hogy mindhárom kapott pont valóban kielégíti az ABC háromszög Feuerbach-körének egyenletét.

- d) Az ABC háromszög körülírt körének sugarát az $R = \frac{abc}{4T}$ összefüggés alapján számolhatjuk, ahol a, b, c a háromszög oldalainak hosszát, T a területét jelöli. Mivel

$$b = |\overline{AC}| = \sqrt{80} = 4 \cdot \sqrt{5}$$

és a b) feladatban már utaltunk rá, hogy $a = c = 10$, továbbá $T = \frac{c \cdot m_c}{2} = 40$, ezért a háromszög köré írt kör sugara:

$$R = \frac{4 \cdot \sqrt{5} \cdot 10 \cdot 10}{4 \cdot 40} = \frac{5 \cdot \sqrt{5}}{2}.$$

Eredményünket az a) feladatban kapottakkal összevetve kapjuk, hogy

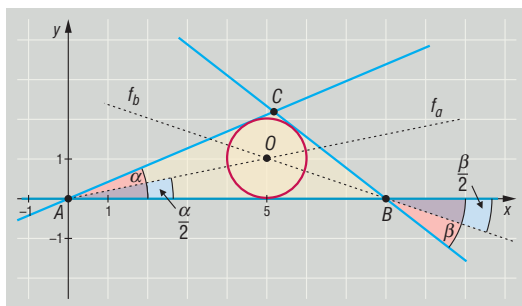
$$\frac{r}{R} = \frac{\frac{5 \cdot \sqrt{5}}{2}}{\frac{5 \cdot \sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{2},$$

és így a feladat állítását beláttuk.

Megjegyzés: A körülírt kör sugarát úgy is kiszámíthatjuk, hogy meghatározzuk annak középpontját két oldalfelező merőleges metszéspontjaként, majd a két pont távolságára vonatkozó összefüggéssel megadjuk a sugarát. Ezzel a módszerrel a körülírt kör középpontjaként a $\left(2; \frac{1}{2}\right)$ pontot kapjuk.

- 3711** a) Az oldalegyenesek egyenleteiből a háromszög csúspontjai: $A(0; 0)$, $B(8; 0)$ és $C\left(\frac{36}{7}; \frac{15}{7}\right)$.

A háromszögbe írható kör középpontja a szögfelezők metszéspontja. Vegyük észre, hogy az AB oldal illeszkedik az x tengelyre, ezért „célszerű” az A , valamint a B csúcsokhoz tartozó szögfelezők egyenletét felírni. Ekkor ugyanis a háromszög α szöge megegyezik az AC egyenes irányszögével.





Az AC egyenes egyenletéből látható, hogy az egyenes meredeksége $\frac{5}{12}$, ezért $\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{12}$.

Az f_a szögfelező irányszöge $\frac{\alpha}{2}$, így meredeksége $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$. Ismert addíciós összefüggés alapján:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}},$$

ezért

$$\frac{5}{12} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}},$$

$$0 = -5 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} - 24 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + 5.$$

A kapott egyenlet $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ -re nézve másodfokú, megoldásai: $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = -5$, illetve $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{5}$.

Az ábrából is látható, hogy az f_a szögfelező meredeksége pozitív, ezért $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{5}$. Végül az f_a szögfelező átmegy az origón, ezért egyenlete:

$$f_a: y = \frac{1}{5}x.$$

Hasonló számítások vezetnek el az f_b szögfelező egyenletéhez. Mivel a BC egyenes meredeksége $-\frac{3}{4}$, azaz $\operatorname{tg} \beta = -\frac{3}{4}$, így

$$-\frac{3}{4} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2}},$$

$$0 = 3 \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2} - 8 \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} - 3.$$

A kapott másodfokú egyenlet megoldásai: $\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = 3$, illetve $\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = -\frac{1}{3}$.

Mivel az f_b szögfelező meredeksége negatív, ezért $\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = -\frac{1}{3}$. A szögfelező átmegy a B ponton, ezért egyenlete:

$$f_b: y = -\frac{1}{3}(x - 8).$$

Az O pont koordinátáit az f_a és f_b egyenesek egyenletéből álló

$$\left. \begin{array}{l} y = -\frac{1}{3}(x - 8) \\ y = \frac{1}{5}x \end{array} \right\}$$

egyenletrendszer megoldása adja:

$$\frac{1}{5}x = -\frac{1}{3}(x - 8).$$

Az egyenlet megoldása: $x = 5$. Ekkor viszont $y = 1$, így a beírt kör középpontjának koordinátái:

$$O(5; 1).$$



A BC oldalhoz írt kör középpontja az f_a szögfelezőn, valamint a háromszög B csúcsánál lévő külső szög szögfelezőjén található. Ez utóbbi szögfelezőt az ábrán f -fel jelöltük. Elemi geometriai megfontolások alapján az f egyenes merőleges az f_b belső szögfelezőre, ezért e két egyenes meredekségének szorzata -1 . Ha az f egyenes meredekségét m jelöli, akkor:

$$m = -\frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\beta}{2}} = -\frac{1}{-\frac{1}{3}} = 3.$$

Az f szögfelező egyenlete: $y = 3(x - 8)$. A BC oldalhoz írt kör Q középpontjának koordinátáit az

$$\left. \begin{aligned} y &= 3(x - 8) \\ y &= \frac{1}{5}x \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszer megoldása adja. Az egyenletrendszer megoldásaként a Q pont koordinátái:

$$Q\left(\frac{60}{7}; \frac{12}{7}\right).$$

- b) Az a) feladatban szereplő körök érintik az x tengelyt, ezért sugaruk hossza megegyezik középpontjuk második koordinátájával. Ennek megfelelően a beírt kör egyenlete:

$$(x - 5)^2 + (y - 1)^2 = 1,$$

illetve a BC oldalhoz írt kör egyenlete:

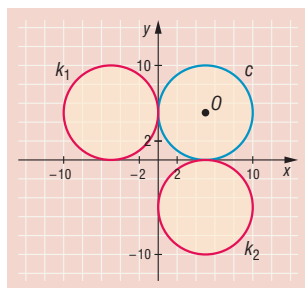
$$\left(x - \frac{60}{7}\right)^2 + \left(y - \frac{12}{7}\right)^2 = \frac{144}{49}.$$

- 3712** Egy-egy ilyen kört találhatunk a második, illetve a negyedik sík-negyedben. Ezek egyenlete:

$$k_1: (x + 5)^2 + (y - 5)^2 = 25,$$

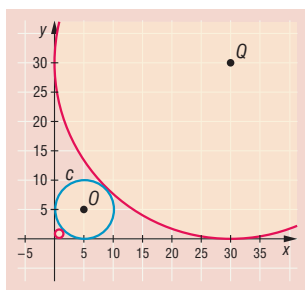
$$k_2: (x - 5)^2 + (y + 5)^2 = 25.$$

A fenti köröket, valamint a feladatban szereplő, c -vel jelölt kört az ábra mutatja.



A feltételeknek eleget tevő további köröket az első sík-negyedben kereshetünk; ha egy ilyen kör sugarát r jelöli, akkor középpontjának koordinátái $Q(r; r)$ alakúak. Mivel az $O(5; 5)$ középpontú, 5 egység sugarú c kört érinti, ezért az OQ távolság éppen a két kör sugarának összege, azaz $OQ = r + 5$. Az OQ távolságot a Q pont koordinátaival felírva kapjuk, hogy

$$\sqrt{(r - 5)^2 + (r - 5)^2} = r + 5.$$





Mindkét oldalt négyzetre emelve és a lehetséges összevonásokat elvégezve:

$$r^2 - 30r + 25 = 0.$$

A fenti egyenlet megoldásai:

$$r_1 = 15 + 10 \cdot \sqrt{2}, \quad \text{illetve} \quad r_2 = 15 - 10 \cdot \sqrt{2}.$$

A feltételeknek mindkét kör eleget tesz (ezeket az ábrán pirossal jelöltük). A körök egyenletei:

$$(x - (15 + 10 \cdot \sqrt{2}))^2 + (y - (15 + 10 \cdot \sqrt{2}))^2 = (15 + 10 \cdot \sqrt{2})^2,$$

$$(x - (15 - 10 \cdot \sqrt{2}))^2 + (y - (15 - 10 \cdot \sqrt{2}))^2 = (15 - 10 \cdot \sqrt{2})^2.$$

3713 Átalakítva a megadott egyenleteket:

$$k_1: (x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 1,$$

$$k_2: (x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 1,$$

$$k_3: (x - 5)^2 + (y + 2)^2 = 1.$$

Az egyenletekből látható, hogy mindhárom kör sugara 1 egység, továbbá a középpontjaik:

$$O_1(-1; 4), \quad O_2(-1; -1) \quad \text{és} \quad O_3(5; -2).$$

A feladat szerint olyan k kört keresünk, amely a k_1, k_2 és k_3 köröket kívülről érinti. Ha a megfelelő k kör középpontját nem változtatjuk, de a sugarát 1 egységgel megnöveljük, akkor olyan k' kört kapunk eredményül, amely átmegy az O_1, O_2, O_3 pontok mindegyikén. A megnövelt sugarú kör éppen az $O_1O_2O_3$ háromszög köré írható kör. A továbbiakban ennek a körnek a középpontját keressük. Ez a pont az oldalefelező merőlegesek metszéspontja.

Az O_1O_2 oldal f_1 felezőmerőlegesének egyenlete:

$$y = \frac{3}{2}.$$

Az O_2O_3 oldal f_2 felezőmerőlegesének egyenlete:

$$6x - y = \frac{27}{2}.$$

A két egyenletből álló egyenletrendszer megoldásaként a Q pont koordinátái:

$$Q\left(\frac{5}{2}; \frac{3}{2}\right).$$

Az $O_1O_2O_3$ háromszög köré írt körének sugara:

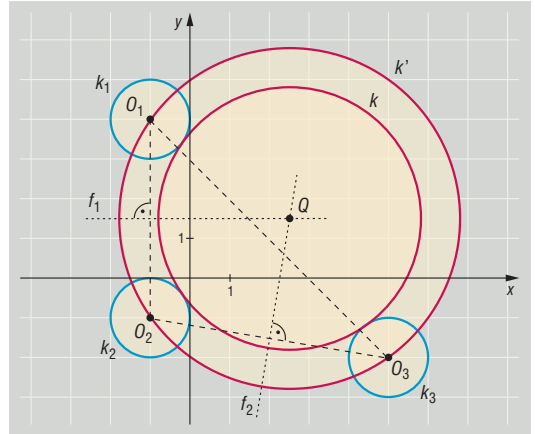
$$|\overline{QO_1}| = \sqrt{\left(-1 - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(4 - \frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{37}{2}}.$$

Korábbi észrevételeink alapján a k_1, k_2 és k_3 köröket érintő kör középpontja Q , sugara:

$$r = |\overline{QO_1}| - 1 = \sqrt{\frac{37}{2}} - 1,$$

ezért egyenlete

$$k: \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{37}{2}} - 1\right)^2.$$





3714 a) A Q pont koordinátáit jelölje $Q(x; y)$. Ekkor

$$QA^2 + QB^2 = x^2 + (3 - y)^2 + (6 - x)^2 + (1 - y)^2.$$

A műveletek elvégzése után:

$$QA^2 + QB^2 = 2x^2 - 12x + 2y^2 - 8y + 46.$$

Az x -et, valamint az y -t tartalmazó tagokból külön-külön teljes négyzeteket alakíthatunk ki:

$$QA^2 + QB^2 = 2(x^2 - 6x + 9) + 2(y^2 - 4y + 4) + 20 = 2(x - 3)^2 + 2(y - 2)^2 + 20.$$

Látható, hogy az első két tag mindig nemnegatív, továbbá a $QA^2 + QB^2$ összeg akkor a legkisebb, ha $x = 3$ és $y = 2$, ekkor értéke 20. A legkisebb összeg a $Q(3; 2)$ ponthoz tartozik.

b) Ha $QA^2 + QB^2 = \lambda$ teljesül, akkor az a) feladat eredményei alapján:

$$2(x - 3)^2 + 2(y - 2)^2 + 20 = \lambda,$$

$$(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = \frac{\lambda - 20}{2}.$$

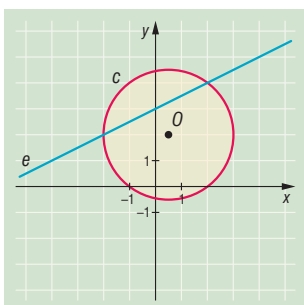
Ha $\lambda > 20$, akkor a feltételt kielégítő Q pontok a $(3; 2)$ középpontú, $r = \sqrt{\frac{\lambda - 20}{2}}$ sugarú körvonalon helyezkednek el.

Ha $\lambda = 20$, akkor a fenti egyenlet jobb oldalán 0 áll, így egyedül a $Q(3; 2)$ pont tesz eleget a feltételnek.

Ha $\lambda < 20$, akkor nincs a feltételnek megfelelő pont a síkon.

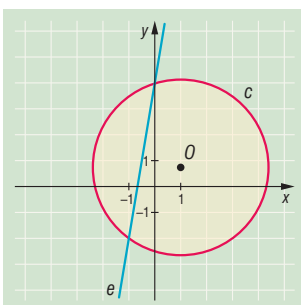
A kör és az egyenes kölcsönös helyzete; két kör közös pontjai – megoldások

3715 a)



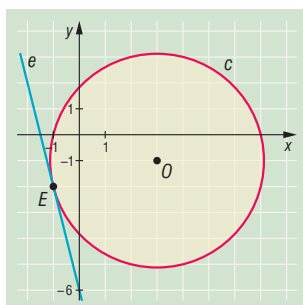
metszéspontok:
 $(-2; 2)$ és $(2; 4)$;

b)



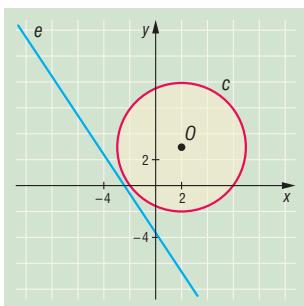
metszéspontok:
 $(-1; -2)$ és $(0; 4)$;

c)



érintési pont:
 $(-1; -2)$;

d)



nincs közös pont.



- 3716** a) A két alakzat metsző helyzetű.
 b) Az egyenesnek és a körnek nincs közös pontja ($D < 0$).
 c) Az egyenesnek és a körnek nincs közös pontja ($D < 0$).
 d) Az egyenes érinti a kört.
- 3717** A kör középpontja $O(4; 2)$, sugara $\sqrt{20} = 2 \cdot \sqrt{5}$. Mivel az O pont illeszkedik az adott egyenesre, ezért a kimetszett húr a körnek átmérője, amelynek hossza $4 \cdot \sqrt{5} \approx 8,94$.
- 3718** Két ilyen pont van: $(-1; 2)$, illetve $(4; -3)$.
- 3719** Két ilyen háromszög van. Az egyenlő szárú háromszög alaphoz tartozó felezőmerőlegesének és az adott körnek az egyenletrendszeréből adódnak a megoldások.
- Az ismeretlen csúcs koordinátái: $(7; 4)$, illetve $\left(-\frac{1}{2}; -1\right)$.
- 3720** A leghosszabb húr egyben átmérő is, ezért a leghosszabb húrt tartalmazó egyenes az OP egyenes, amelynek egyenlete: $y = 2x + 1$. A legrövidebb húrt tartalmazó egyenes merőleges az OP egyenesre, így egyenlete:
- $$y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}.$$
- 3721** A téglalap csúcsai: $(1; 2)$, $(2; -2)$, $(10; 0)$ és $(9; 4)$.
- 3722** Az egyenes és kör érintésének feltétele, hogy az egyenleteiből álló egyenletrendszerből kapott másodfokú paraméteres egyenlet diszkriminánsa 0 legyen.
- a) A kapott egyenlet:
- $$5x^2 + (2 - 4p) \cdot x + p^2 - 2p - 3 = 0,$$
- diszkriminánsa:
- $$p^2 - 6p - 16 = 0,$$
- így a megoldások:
- $$p_1 = 8 \quad \text{és} \quad p_2 = -2.$$
- b) A kapott egyenlet:
- $$(p^2 + 1) \cdot x^2 + (4 - 4p) \cdot x = 0,$$
- diszkriminánsa:
- $$4 - 4p = 0,$$
- így a megoldás:
- $$p = 1.$$
- c) A kapott egyenlet:
- $$2x^2 + (2p - 2) \cdot x + p^2 + 4p + 9 = 0,$$
- diszkriminánsa:
- $$p^2 + 10p + 17 = 0,$$
- így a megoldások:
- $$p_1 = -5 + 2 \cdot \sqrt{2} \quad \text{és} \quad p_2 = -5 - 2 \cdot \sqrt{2}.$$
- 3723** Az érintési pontba húzott sugár merőleges az érintőre, így a P ponton áthaladó érintő egyenletéhez minden esetben felhasználhatjuk, hogy az \overrightarrow{OP} a keresett érintőnek egy normálvektora, ahol O az adott kör középpontja.
- a) $\overrightarrow{OP}(3; 3)$, amiből $\vec{n}_e(1; 1)$, így az egyenlet: $x + y = 6$.
- b) $\overrightarrow{OP}(1; -3)$, így az egyenlet: $x - 3y = -5$.
- c) $\overrightarrow{OP}(0; 4)$, így az egyenlet: $y = 1$.
- d) $\overrightarrow{OP}(-\sqrt{2}; \sqrt{3})$, így az egyenlet: $\sqrt{2}x + \sqrt{3}y = -5$.



- 3724 a) Jelöljük a fa helyét A -val, a sziklást B -vel. Az AB egyenes egyenlete $-3x + y = 9$. Az origó középpontú 5 egység sugarú kör egyenlete: $x^2 + y^2 = 25$. A kincs helyét a két egyenletből álló

$$\begin{cases} -3x + y = 9 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$

egyenletrendszer megoldása adja. Az első egyenletből y -t kifejezve, majd a második egyenletbe beírva kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned} x^2 + (3x + 9)^2 &= 25, \\ 10x^2 + 54x + 56 &= 0. \end{aligned}$$

A fenti egyenlet megoldásai: $x_1 = -\frac{7}{5}$, valamint $x_2 = -4$, ebből adódóan a kör és az egyenes metszéspontjai:

$$P\left(-\frac{7}{5}; \frac{24}{5}\right) \quad \text{és} \quad Q(-4; -3).$$

Az ábráról leolvasható, hogy a P pont nem illeszkedik az AB szakaszra, ezért a kincset a $Q(-4; -3)$ pontban rejtették el.

- b) Mivel

$$AQ = \sqrt{10} \quad \text{és} \quad QB = \sqrt{40} = 2 \cdot \sqrt{10},$$

ezért a kincs az AB szakaszt 1 : 2 arányban osztja.

- 3725 A radar az $x^2 + y^2 = 100$ egyenletű kört, és annak belső pontjait felügyeli. Ha az utasszállító az A , illetve a B pontokban metszi a radar által vizsgált légtérrel, akkor a metszéspontok koordinátáit az

$$\begin{cases} y = 7x - 50 \\ x^2 + y^2 = 100 \end{cases}$$

egyenletrendszer megoldásai adják. Az y értékét a második egyenletbe helyettesítve:

$$\begin{aligned} x^2 + (7x - 50)^2 &= 100, \\ 50x^2 - 700x + 2400 &= 0, \\ x^2 - 14x + 48 &= 0. \end{aligned}$$

Az egyenlet megoldásai: $x_1 = 6$ és $x_2 = 8$. A kör és az egyenes metszéspontjai: $A(6; -8)$, $B(8; 6)$.

Az AB szakasz hossza $AB = 10 \cdot \sqrt{2}$. Az utasszállító körülbelül 141,4 km utat tesz meg a radar által felügyelt légtérben.

- 3726 a) Az ABC szabályos háromszög C csúcsa illeszkedik az AB oldal felezőmerőlegesére, és az A középpontú, $AB = \sqrt{18} = 3 \cdot \sqrt{2}$ egység sugarú körre. Az AB szakaszfelező merőlegesének egyenlete:

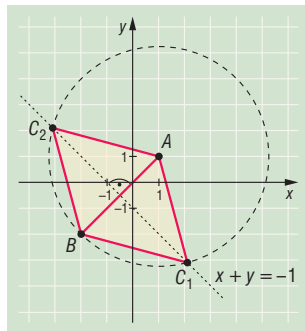
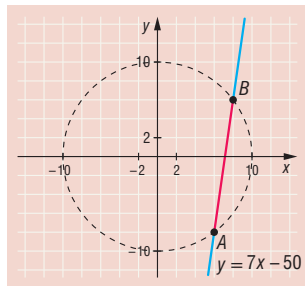
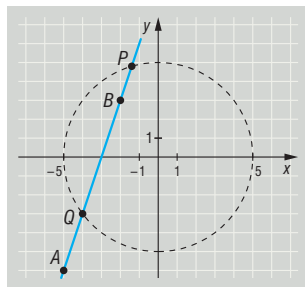
$$x + y = -1,$$

az A középpontú, AB sugarú kör egyenlete:

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 18.$$

A C pont koordinátáit az alábbi egyenletrendszer megoldása adja:

$$\begin{cases} x + y = -1 \\ (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 18 \end{cases}$$





Az első egyenletből $x = -1 - y$, amit a második egyenletbe helyettesítve:

$$\begin{aligned}(-2 - y)^2 + (y - 1)^2 &= 18, \\ 4 + 4y + y^2 + y^2 - 2y + 1 &= 18, \\ 2y^2 + 2y - 13 &= 0.\end{aligned}$$

A fenti egyenlet megoldásai:

$$y_1 = \frac{-1 - \sqrt{27}}{2}, \quad \text{illetve} \quad y_2 = \frac{-1 + \sqrt{27}}{2}.$$

Eredményünk (valamint az ábra is) mutatja, hogy a feltételeknek két pont is eleget tesz, ezek koordinátái:

$$C_1\left(\frac{-1 + \sqrt{27}}{2}; \frac{-1 - \sqrt{27}}{2}\right) \quad \text{és} \quad C_2\left(\frac{-1 - \sqrt{27}}{2}; \frac{-1 + \sqrt{27}}{2}\right).$$

- b) Az ABC_1 és az ABC_2 szabályos háromszögek AB oldala közös, ezért a két háromszög köré írható kör sugara is megegyezik. Ismert, hogy a szabályos háromszög magassága az oldalának $\frac{\sqrt{3}}{2}$ -szöröse, és mivel mindkét háromszög oldala $AB = 3 \cdot \sqrt{2}$, ezért magasságuk:

$$m = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (3 \cdot \sqrt{2}) = \frac{3 \cdot \sqrt{6}}{2}.$$

A szabályos háromszögben a magasságpont, a súlypont és a körülírt kör középpontja egybeesnek, továbbá a súlypont 2:1 arányban osztja a súlyvonalakat, ezért a körülírt kör sugara a súlyvonalnak (egyben magasságvonalnak) a $\frac{2}{3}$ -szorosa.

Ebből adódóan a háromszögek körülírt köreinek sugara:

$$R = \frac{2}{3} \cdot \frac{3 \cdot \sqrt{6}}{2} = \sqrt{6}.$$

- 3727** a) Thalész tételének megfordítása alapján, ha a P pontból az AB szakasz derékszög alatt látszik, akkor a P pont az AB szakasz mint átmérő fölé emelt körvonal egy pontja. Ennek megfelelően a keresett pontok illeszkednek az AB szakasz Thalész-körére (az ábrán k jelöli). E kör középpontja az AB szakasz $O\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right)$ felezőpontja, sugara pedig:

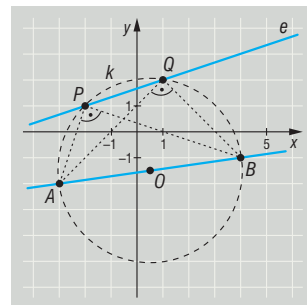
$$R = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{50}}{2} = \frac{5 \cdot \sqrt{2}}{2}.$$

Az AB szakasz Thalész-körének egyenlete:

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{25}{2}.$$

Az adott egyenletű (e -vel jelölt) egyenes feltételnek megfelelő pontjainak koordinátáit a következő egyenletrendszer megoldásai szolgáltatják:

$$\left. \begin{aligned} x - 3y &= -5 \\ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 &= \frac{25}{2} \end{aligned} \right\}.$$





Az első egyenletből $x = 3y - 5$, amit a második egyenletbe helyettesítve:

$$\begin{aligned}\left(3y - \frac{11}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 &= \frac{25}{2}, \\ 9y^2 - 33y + \frac{121}{4} + y^2 + 3y + \frac{9}{4} &= \frac{25}{2}, \\ 10y^2 - 30y + 20 &= 0, \\ y^2 - 3y + 2 &= 0.\end{aligned}$$

Az egyenletrendszer megoldásai: $y_1 = 2$ és $y_2 = 1$. Eredményünk mutatja, hogy az AB szakasz az e egyenes két pontjából is 90° -os szög alatt látszik; ezek koordinátái:

$$Q(1; 2) \text{ és } P(-2; 1).$$

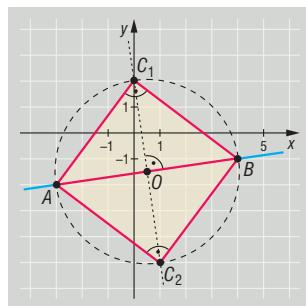
- b) A C pont illeszkedik AB Thalész-körére, továbbá az AB szakasz felezőmerőlegesére. A felezőmerőleges egyenlete: $7x + y = 2$.

A C pont koordinátáit az alábbi egyenletrendszer megoldásaiból kapjuk:

$$\left. \begin{aligned} 7x + y &= 2 \\ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 &= \frac{25}{2} \end{aligned} \right\}.$$

A metszéspontok:

$$C_1(0; 2) \text{ és } C_2(1; -5).$$



3728 Az adott kör egyenlete:

$$(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 5.$$

A szintén adott (ábránkon e -vel jelölt) egyenessel párhuzamos érintők merőlegesek az érintési ponthoz húzott sugárra, ezért az érintési pontokat a kör középpontján átmenő, e -re merőleges (f -fel jelölt) egyenes metszi ki a körből. Az f egyenes egyenlete:

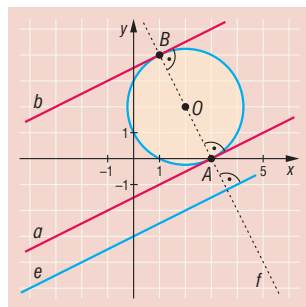
$$y = -2x + 6.$$

Az f egyenes és a kör metszéspontjainak meghatározásához a következő egyenletrendszert kell megoldanunk:

$$\left. \begin{aligned} y &= -2x + 6 \\ (x - 2)^2 + (y - 2)^2 &= 5 \end{aligned} \right\}.$$

Az egyenletrendszer megoldása után a metszéspontokra $A(3; 0)$ és $B(1; 4)$ adódik. Mivel az érintők párhuzamosak az e egyenessel, ezért meredekségük $\frac{1}{2}$, egyenletük pedig:

$$\begin{aligned} a: y &= \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \quad \text{és} \quad b: y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2}, \\ a: x - 2y &= 3 \quad \text{és} \quad b: x - 2y = 7. \end{aligned}$$



3729 I. megoldás. A kör egyenletét átalakítva:

$$(x + 2)^2 + (y + 4)^2 = 25,$$

így középpontja $O(-2; -4)$, sugara 5 egység. Az érintési ponthoz húzott sugár merőleges az érintőre, amelynek meredeksége ezúttal $-\frac{4}{3}$, ezért az O pontot, valamint az érintési pontot is tartalmazó



egyenes meredeksége $\frac{3}{4}$. Ez egyszerűen következik abból a tényből, hogy ha két egyenes merőleges egymásra, akkor meredekségeik szorzata -1 . Eszerint az érintők érintési pontját az O ponton átmenő, $\frac{3}{4}$ meredekségű egyenes metszi ki az adott körből. A szóban forgó egyenes egyenlete:

$$y = \frac{3}{4}x - \frac{5}{2}.$$

Az érintési pontokat meghatározó

$$\left. \begin{aligned} y &= \frac{3}{4}x - \frac{5}{2} \\ (x+2)^2 + (y+4)^2 &= 25 \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszer megoldása után az érintési pontokra $A(2; -1)$, valamint $B(-6; -7)$ adódik. A keresett érintők egyenlete:

$$\begin{aligned} a: y &= -\frac{4}{3}x + \frac{5}{3} & \text{és} & & b: y &= -\frac{4}{3}x - 15, \\ a: 4x + 3y &= 5 & \text{és} & & b: 4x + 3y &= -45. \end{aligned}$$

II. megoldás. A feladatra mutatunk egy másik, inkább algebrai megfontolásokat használó, első nekifutásra kissé talán rémisztő megoldást is. A keresett érintők meredeksége $-\frac{4}{3}$, ezért egyenletük $y = -\frac{4}{3}x + c$ alakban írható, ahol a c paraméter értékét úgy kell meghatároznunk, hogy az egyenes érintse a kört. Ekkor viszont az

$$\left. \begin{aligned} y &= -\frac{4}{3}x + c \\ (x+2)^2 + (y+4)^2 &= 25 \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszernek csak egyetlen megoldása van. Az első egyenlet felhasználásával a második a következő alakban írható:

$$\begin{aligned} (x+2)^2 + \left(-\frac{4}{3}x + c + 4\right)^2 &= 25, \\ \frac{25}{9}x^2 - \left(\frac{20}{3} + \frac{8}{3}c\right) \cdot x + c^2 + 8c - 5 &= 0. \end{aligned}$$

Mivel a fenti egyenletnek is csak egy megoldása lehet, ezért az egyenlet diszkriminánsa biztosan 0, azaz

$$\left(\frac{20}{3} + \frac{8}{3}c\right)^2 - 4 \cdot \frac{25}{9} \cdot (c^2 + 8c - 5) = 0.$$

A műveletek elvégzése után:

$$-4c^2 - \frac{160}{3}c + 100 = 0.$$

Az egyenlet megoldásai: $c_1 = -15$ és $c_2 = \frac{5}{3}$. A keresett érintők egyenlete ennek megfelelően:

$$a: y = -\frac{4}{3}x + \frac{5}{3} \quad \text{és} \quad b: y = -\frac{4}{3}x - 15.$$

Bízunk benne, hogy nem vettük el érdeklődő Olvasóink kedvét a paraméteres kifejezésekkel való számolásoktól.



3730 I. megoldás. A kör egyenlete

$$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 10$$

alakban írható, ahonnan leolvasható, hogy középpontja $O(-2; 3)$. Az adott (az ábrán e -vel jelölt) egyenesre merőleges érintők érintési pontjait az O ponton átmenő, e -vel párhuzamos egyenes (f) metszi ki a körből.

Az f egyenes egyenlete:

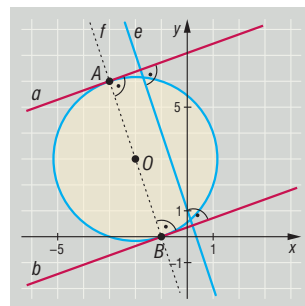
$$y = -3x - 3.$$

Az érintési pontok koordinátáit adó egyenletrendszer:

$$\begin{cases} y = -3x - 3 \\ (x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 10 \end{cases}.$$

Az egyenletrendszer megoldásaiból az érintési pontok: $A(-3; 6)$ és $B(-1; 0)$. A megfelelő érintők egyenlete:

$$a: y = \frac{1}{3}x + 7 \quad \text{és} \quad b: y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}.$$



II. megoldás. A 3729. feladat második megoldásához hasonló módszerrel is célt érhetünk. Az érintők egyenletét $y = \frac{1}{3}x + c$ alakban keressük, ahol a c paraméter értékét úgy kell meghatároznunk, hogy az egyenes érintse a kört. Az

$$\begin{cases} y = \frac{1}{3}x + c \\ (x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 10 \end{cases}$$

egyenletrendszernek ennek megfelelően csak egyetlen megoldása van. Az x változót kiküszöbölve:

$$\begin{aligned} (x + 2)^2 + \left(\frac{1}{3}x + c - 3\right)^2 &= 10, \\ \frac{10}{9}x^2 - \left(2 + \frac{2}{3}c\right) \cdot x + c^2 - 6c + 3 &= 0. \end{aligned}$$

A fenti egyenlet diszkriminánsa 0, azaz

$$\begin{aligned} \left(2 + \frac{2}{3}c\right)^2 - 4 \cdot \frac{10}{9} \cdot (c^2 - 6c + 3) &= 0, \\ -4c^2 + \frac{88}{3}c - \frac{28}{3} &= 0. \end{aligned}$$

A kapott egyenlet megoldásai:

$$c_1 = 7 \quad \text{és} \quad c_2 = \frac{1}{3}.$$

Ugyanazokat az egyeneseket kaptuk, mint az első megoldásban.

3731 a) Az első egyenletből a második egyenletet kivonva:

$$\begin{aligned} 10x - 10y + 20 &= 0, \\ x - y + 2 &= 0, \\ x &= y - 2. \end{aligned}$$



A kapott összefüggést a második egyenletbe helyettesítve:

$$\begin{aligned}(y-2)^2 + y^2 - 4 \cdot (y-2) - 6 &= 0, \\ 2y^2 - 8y + 6 &= 0, \\ y^2 - 4y + 3 &= 0.\end{aligned}$$

A fenti egyenlet megoldásai: $y_1 = 3$ és $y_2 = 1$. A két körnek két metszéspontja van, ezek koordinátái: $(1; 3)$ és $(-1; 1)$.

b) A két egyenlet különbsége: $6x - 12y - 30 = 0$, amiből $x = 2y + 5$. Az első egyenletbe visszahelyettesítve: $5y^2 + 10y + 5 = 0$. A kapott egyenlet diszkriminánsa 0, ezért a két kör érinti egymást. A közös pont: $(3; -1)$.

c) Az adott köröknek két metszéspontja van. Ezek koordinátái: $(3; 3)$ és $(1; 5)$.

d) Az adott köröknek nincs közös pontja.

- 3732** a) Mivel a keresett érintők az origón áthaladnak, ezért egyenletüket $Ax + By = 0$ alakban kereshetjük. Az ábra alapján is meggyőződhetünk arról, hogy egyik érintő sem párhuzamos az x tengellyel, ezért $A \neq 0$, sőt feltehetjük, hogy $A = 1$, azaz az érintők egyenletének alakja:

$$e: x + By = 0.$$

Az adott kör középpontjának koordinátái $O(3; 3)$, sugara $r = \sqrt{2}$. Mivel az érintő az O ponttól éppen r távolságra halad, azaz $d(O, e) = \sqrt{2}$, így a 3689. feladat eredményeit felhasználva:

$$\left| \frac{3 + 3B}{\sqrt{1 + B^2}} \right| = \sqrt{2}.$$

Az egyenlet mindkét oldalát négyzetre emelve:

$$\begin{aligned}\frac{9 + 18B + 9B^2}{1 + B^2} &= 2, \\ 7B^2 + 18B + 7 &= 0.\end{aligned}$$

A kapott másodfokú egyenlet gyökei:

$$B_1 = \frac{-9 + 4 \cdot \sqrt{2}}{7}, \quad \text{illetve} \quad B_2 = \frac{-9 - 4 \cdot \sqrt{2}}{7}.$$

Könnyen végiggondolhatjuk, hogy mindkét érték kielégíti a felírt egyenletet. A P pontot tartalmazó érintők egyenlete:

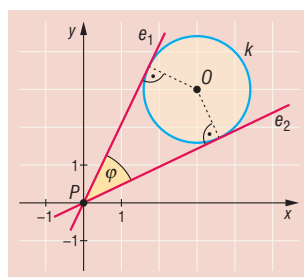
$$e_1: x + \frac{-9 + 4 \cdot \sqrt{2}}{7} \cdot y = 0 \quad \text{és} \quad e_2: x + \frac{-9 - 4 \cdot \sqrt{2}}{7} \cdot y = 0.$$

A két érintő φ hajlásszögének kiszámítása a 3639. alapján a

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2} \right|$$

összefüggés alapján történhet, ahol m_1 és m_2 a két érintő meredekségét jelöli. Az egyenes egyenletéből a meredekségek:

$$m_1 = -\frac{7}{-9 + 4 \cdot \sqrt{2}} = -\frac{7 \cdot (4 \cdot \sqrt{2} + 9)}{-49} = \frac{4 \cdot \sqrt{2} + 9}{7}, \quad \text{illetve} \quad m_2 = \frac{7}{9 + 4 \cdot \sqrt{2}} = \frac{9 - 4 \cdot \sqrt{2}}{7}.$$





A két érintő hajlásszögére:

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{\frac{4 \cdot \sqrt{2} + 9}{7} - \frac{9 - 4 \cdot \sqrt{2}}{7}}{1 + \frac{4 \cdot \sqrt{2} + 9}{7} \cdot \frac{9 - 4 \cdot \sqrt{2}}{7}} \right| = \frac{4 \cdot \sqrt{2}}{7}.$$

A két érintő hajlásszöge: $\varphi \approx 38,94^\circ$.

- b) Eljárhatunk az a) feladatban ismertetett módszerrel is, de ezúttal inkább egy elemi geometriai ismereteket alkalmazó megoldást mutatunk be.

Az adott k kör középpontja $O(-3; 4)$, sugara 4 egység.

Az érintők érintési pontját az OP szakasz fölé emelt Thalész-kör metszi ki a k körből. Az OP szakasz felezőpontja $Q(0; 2)$, a c -vel jelölt Thalész-kör sugara $QP = \sqrt{13}$, így egyenlete:

$$x^2 + (y - 2)^2 = 13.$$

Az érintési pontok koordinátáit a következő egyenletrendszer megoldásai adják:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 6x - 8y + 9 = 0 \\ x^2 + (y - 2)^2 - 13 = 0 \end{cases}.$$

A két egyenlet megfelelő oldalainak különbségéből:

$$3x - 2y + 9 = 0,$$

amiből y -t kifejezve, majd a második egyenletbe visszaírva kapjuk az alábbi egyenletet:

$$13x^2 + 30x - 27 = 0.$$

A kapott egyenlet megoldásai: $x_1 = -3$ és $x_2 = \frac{9}{13}$.

Ennek megfelelően a keresett érintési pontok: $E_1(-3; 0)$, illetve $E_2\left(\frac{9}{13}; \frac{72}{13}\right)$.

A PE_1 érintő egyenlete: $y = 0$ (éppen az x tengely). A PE_2 érintő egyenlete:

$$y = -\frac{12}{5}x + \frac{36}{5}.$$

Mivel az egyik érintő éppen az x tengely, ezért a két érintő hajlásszöge:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{12}{5}, \quad \text{amiből} \quad \varphi \approx 67,38^\circ.$$

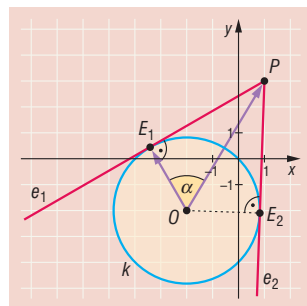
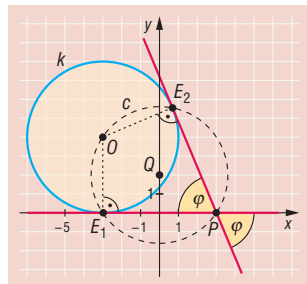
- c) Egy harmadik megoldási módszert is bemutatunk az érintő egyenletének felírására.

Az adott kör középpontja $O(-2; -2)$, sugara $r = \sqrt{8}$ egység.

Tegyük fel, hogy a P pontból húzott egyik érintő az E_1 pontban érinti a kört, továbbá az $\overrightarrow{OE_1}$ vektor koordinátái $\overrightarrow{OE_1}(a; b)$.

Mivel e vektor hossza éppen a kör sugarával egyenlő, ezért:

$$\begin{aligned} \sqrt{a^2 + b^2} &= \sqrt{8}, \\ a^2 + b^2 &= 8. \end{aligned} \quad (1)$$





A továbbiakban kiszámítjuk az $\overrightarrow{OE_1} \cdot \overrightarrow{OP}$ skaláris szorzatot. Mivel $\overrightarrow{OP}(3; 5)$, ezért

$$\overrightarrow{OE_1} \cdot \overrightarrow{OP} = 3a + 5b.$$

Másrészt a skaláris szorzat definíciója, valamint az OE_1P derékszögű háromszög alapján:

$$\overrightarrow{OE_1} \cdot \overrightarrow{OP} = |\overrightarrow{OE_1}| \cdot |\overrightarrow{OP}| \cdot \cos \alpha = \sqrt{8} \cdot |\overrightarrow{OP}| \cdot \frac{|\overrightarrow{OE_1}|}{|\overrightarrow{OP}|} = \sqrt{8} \cdot |\overrightarrow{OE_1}| = \sqrt{8} \cdot \sqrt{8} = 8,$$

ahol $\angle POE_1 = \alpha$.

A skaláris szorzatra kapott két eredmény összevetéséből:

$$3a + 5b = 8. \quad (2)$$

A (2) egyenletből $a = \frac{8-5b}{3}$, amit az (1) egyenletbe visszahelyettesítve:

$$\left(\frac{8-5b}{3}\right)^2 + b^2 = 8.$$

A kijelölt műveletek elvégzése után az alábbi egyenlethez jutunk:

$$34b^2 - 80b - 8 = 0.$$

A fenti egyenlet megoldásai:

$$b_1 = \frac{20+6 \cdot \sqrt{13}}{17} \quad \text{és} \quad b_2 = \frac{20-6 \cdot \sqrt{13}}{17}.$$

Az egyenletrendszer megoldásaiként a következő két vektort kapjuk:

$$\overrightarrow{OE_1} \left(\frac{12-10 \cdot \sqrt{13}}{17}; \frac{20+6 \cdot \sqrt{13}}{17} \right) \quad \text{és} \quad \overrightarrow{OE_2} \left(\frac{12+10 \cdot \sqrt{13}}{17}; \frac{20-6 \cdot \sqrt{13}}{17} \right).$$

Mivel a két kapott vektor egyben a megfelelő érintő egy-egy normálvektora, ezért az érintők egyenlete:

$$e_1: (12-10 \cdot \sqrt{13}) \cdot x + (20+6 \cdot \sqrt{13}) \cdot y = 72+8 \cdot \sqrt{13},$$

$$e_2: (12+10 \cdot \sqrt{13}) \cdot x + (20-6 \cdot \sqrt{13}) \cdot y = 72-8 \cdot \sqrt{13}.$$

A két érintő hajlásszöge: $\varphi \approx 58,03^\circ$.

3733 a) A c kör egyenlete:

$$(x-2)^2 + (y+2)^2 = 10,$$

a k köré:

$$(x+1)^2 + (y-1)^2 = 4.$$

A két egyenlet megfelelő oldalainak különbségéből: $-x+y=0$, azaz $y=x$. A kapott összefüggést a c kör egyenletébe visszahelyettesítve:

$$(x-2)^2 + (x+2)^2 = 10,$$

amiből $x^2 = 1$, így $x_1 = 1$ és $x_2 = -1$. A két kör közös pontjai: $A(1; 1)$, $B(-1; -1)$.

b) Ha a $P(x; y)$ pontból a c körhöz húzott érintő az E pontban érinti a kört, akkor az OEP derékszögű háromszögben:

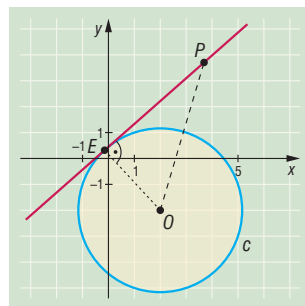
$$PE^2 = OP^2 - OE^2.$$

Mivel a c kör középpontja $O(2; -2)$, továbbá $OE = \sqrt{10}$, ezért:

$$PE^2 = (x-2)^2 + (y+2)^2 - 10.$$

Hasonló gondolatmenet mutatja, hogy a k körhöz a P pontból húzott érintőszakasz négyzete:

$$(x+1)^2 + (y-1)^2 - 4.$$





A feltételek alapján a két érintőszakasz hossza, így persze azok négyzete is megegyezik, azaz

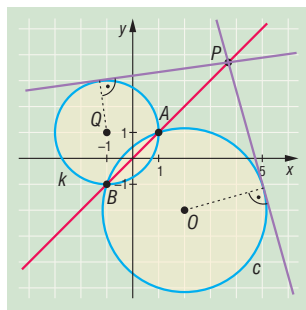
$$(x-2)^2 + (y+2)^2 - 10 = (x+1)^2 + (y-1)^2 - 4.$$

A műveletek elvégzése után:

$$y = x.$$

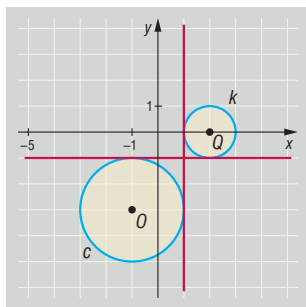
Eredményünk mutatja, hogy ha a P pontból a két körhöz ugyanakkora érintőszakasz húzható, akkor a pont koordinátái kielégítik a fenti egyenletet. Mivel a kapott egyenlet egyenes egyenlete, ezért a feladat állítását igazoltuk.

- c) Az A és B pontok koordinátái kielégítik a kapott egyenes egyenletét, így mindkét pont illeszkedik az egyenesre.



- 3734 A c kör középpontja $O(-1; -3)$, sugara 2 egység, a k köré $Q(2; 0)$, sugara 1 egység. Az ábra is mutatja, hogy a közös belső érintők egyike az x tengellyel, a másik az y tengellyel párhuzamos. A közös belső érintők egyenlete:

$$y = -1, \text{ illetve } x = 1.$$



A közös külső érintők egyenletének meghatározása nehezebb feladatnak bizonyul. Ha ezek az érintők a P pontban metszik egymást, akkor P nyilván az OQ egyenes egy pontja. Tegyük fel, hogy az egyik közös érintő (az ábrán az e -vel jelölt) a c kört az E , a k kört a G pontban érinti. Ekkor az OEP és a QGP derékszögű háromszögek hasonlósága alapján:

$$\frac{OP}{QP} = \frac{OE}{QG} = \frac{2}{1}, \text{ azaz } OP = 2QP.$$

Ez egyben azt is jelenti, hogy a Q pont egybeesik az OP szakasz felezőpontjával.

Ha a P pont koordinátáit $P(x; y)$ jelöli, akkor:

$$\frac{-1+x}{2} = 2 \quad \text{és} \quad \frac{-3+y}{2} = 0,$$

amiből $x = 5$ és $y = 3$, végül $P(5; 3)$.

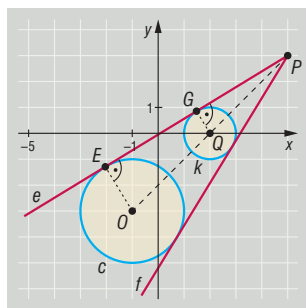
Ezután a feladatot visszavezettük a következő problémára:

Adott a $P(5; 3)$ pont, valamint a k : $x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$ kör. Írjuk fel a P ponton átmenő, a k kört pedig érintő egyenesek egyenletét.

A 3732. feladat a) pontjának módszerét követve – az egyenes normálvektoros egyenletét felhasználva, ahol $\vec{n}_e(1; B)$ és $P_0: P(5; 3)$ – az érintő egyenletét $x + By = 5 + 3B$ alakban kereshetjük.

Az érintő és a Q középpont távolsága:

$$\left| \frac{2 - 5 - 3B}{\sqrt{1 + B^2}} \right| = 1.$$





Az egyenlet mindkét oldalát négyzetre emelve, majd rendezve:

$$\frac{9 + 18B + 9B^2}{1 + B^2} = 1,$$

$$4B^2 + 9B + 4 = 0.$$

Az egyenlet megoldásai:

$$B_1 = \frac{-9 - \sqrt{17}}{8} \quad \text{és} \quad B_2 = \frac{-9 + \sqrt{17}}{8}.$$

A két kör közös külső érintőinek egyenlete:

$$e: x - \frac{9 + \sqrt{17}}{8} \cdot y = \frac{13 - 3 \cdot \sqrt{17}}{8},$$

$$f: x + \frac{-9 + \sqrt{17}}{8} \cdot y = \frac{13 + 3 \cdot \sqrt{17}}{8}.$$

3735 Ha a kör egyenletébe az $y = 0$ értéket helyettesítjük, akkor megkaphatjuk az x tengelyből kimetszett szakasz végpontjainak koordinátáit. Ekkor

$$x^2 - 11x + c = 0,$$

amiből:

$$x_1 = \frac{11 - \sqrt{121 - 4c}}{2} \quad \text{és} \quad x_2 = \frac{11 + \sqrt{121 - 4c}}{2},$$

és az ábra jelöléseinek megfelelően:

$$A\left(\frac{11 - \sqrt{121 - 4c}}{2}; 0\right) \quad \text{és} \quad B\left(\frac{11 + \sqrt{121 - 4c}}{2}; 0\right).$$

Az AB szakasz hossza:

$$AB = \sqrt{121 - 4c}.$$

A kör y tengelyből kimetszett húrjának végpontjait az

$$y^2 - 7y + c = 0$$

egyenlet megoldásai adják.

A megfelelő pontok:

$$C\left(\frac{7 - \sqrt{49 - 4c}}{2}; 0\right) \quad \text{és} \quad D\left(\frac{7 + \sqrt{49 - 4c}}{2}; 0\right).$$

A CD szakasz hossza:

$$CD = \sqrt{49 - 4c}.$$

A feltételek szerint $AB = 3CD$, azaz:

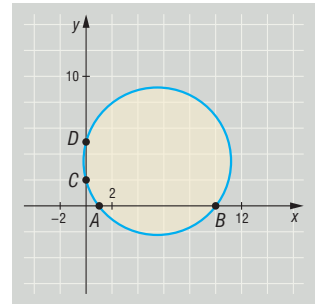
$$\sqrt{121 - 4c} = 3 \cdot \sqrt{49 - 4c}.$$

Mindkét oldalt négyzetre emelve, majd a kapott egyenletet megoldva:

$$121 - 4c = 9 \cdot (49 - 4c),$$

$$c = 10.$$

Ellenőrzéssel is meggyőződhetünk arról, hogy a kapott érték megfelel a feltételeknek.





A parabola – megoldások

3736 a) A parabola paramétere:

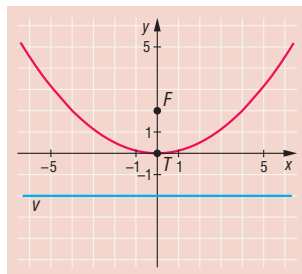
$$p = 4.$$

A parabola tengelypontja:

$$T(0; 0).$$

A parabola egyenlete:

$$x^2 = 8y.$$



b) A parabola paramétere:

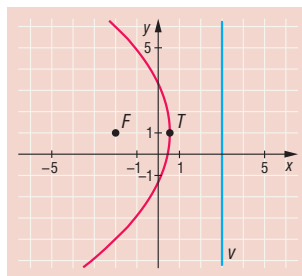
$$p = 5.$$

A parabola tengelypontja:

$$T\left(\frac{1}{2}; 1\right).$$

A parabola egyenlete:

$$x - \frac{1}{2} = -\frac{1}{10}(y - 1)^2.$$



c) A parabola paramétere:

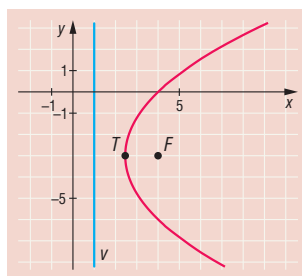
$$p = 3.$$

A parabola tengelypontja:

$$T\left(\frac{5}{2}; -3\right).$$

A parabola egyenlete:

$$x - \frac{5}{2} = \frac{1}{6}(y + 3)^2.$$



d) A parabola paramétere:

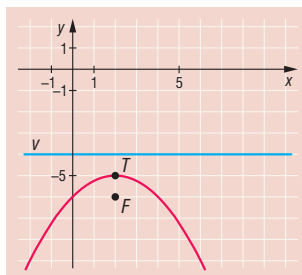
$$p = 2.$$

A parabola fókuszpontja:

$$F(2; -6).$$

A parabola egyenlete:

$$y + 5 = -\frac{1}{4}(x - 2)^2.$$



e) A parabola paramétere:

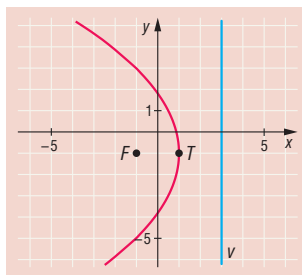
$$p = 4.$$

A parabola fókuszpontja:

$$F(-1; -1).$$

A parabola egyenlete:

$$x - 1 = -\frac{1}{8}(y + 1)^2.$$



f) A parabola paramétere:

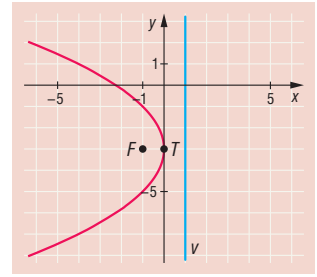
$$p = 2.$$

A parabola vezéregyenesének egyenlete:

$$v: x = 1.$$

A parabola egyenlete:

$$x = -\frac{1}{4}(y + 3)^2.$$



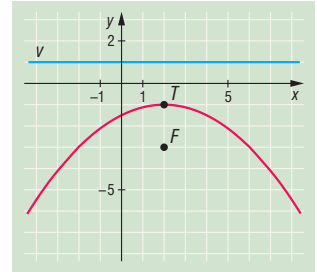
3737 A paramétert p , a fókuszpontot F , a tengelypontot T , a vezéregyeneset v jelöli.

a) Az egyenlet a következő alakra hozható:

$$-\frac{1}{8}(x - 2)^2 = y + 1.$$

A parabola adatai:

$$p = 4, \quad T(2; -1), \quad F(2; -3), \quad v: y = 1.$$

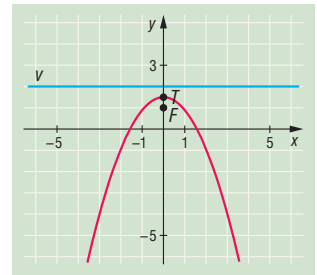


b) Az egyenlet a következő alakra hozható:

$$-\frac{1}{2}x^2 = y - \frac{3}{2}.$$

A parabola adatai:

$$p = 1, \quad T\left(0; \frac{3}{2}\right), \quad F(0; 1), \quad v: y = 2.$$

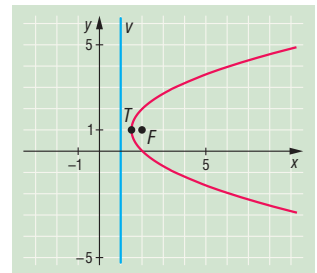


c) Az egyenlet a következő alakra hozható:

$$\frac{1}{2}(y - 1)^2 = x - \frac{3}{2}.$$

A parabola adatai:

$$p = 1, \quad T\left(\frac{3}{2}; 1\right), \quad F(2; 1), \quad v: x = 1.$$

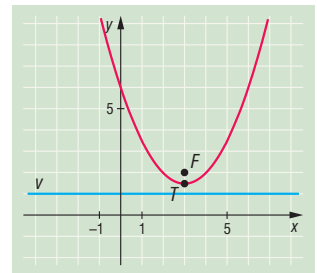


d) Az egyenlet a következő alakra hozható:

$$y - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}(x - 3)^2.$$

A parabola adatai:

$$p = 1, \quad T\left(3; \frac{3}{2}\right), \quad F(3; 2), \quad v: y = 1.$$



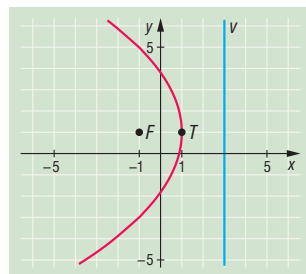


e) Az egyenletet a következő alakra hozható:

$$x - 1 = -\frac{1}{8}(y - 1)^2.$$

A parabola adatai:

$$p = 4, \quad T(1; 1), \quad F(-1; 1), \quad v: x = 3.$$

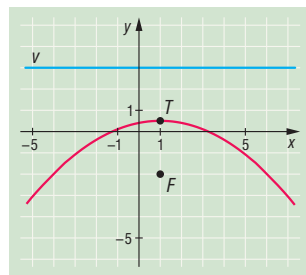


f) Az egyenletet a következő alakra hozható:

$$-\frac{1}{10}(x - 1)^2 = y - \frac{1}{2}.$$

A parabola adatai:

$$p = 5, \quad T\left(1; \frac{1}{2}\right), \quad F(1; -2), \quad v: y = 3.$$



3738 A parabola tengelypontját jelölje $T(u; v)$. Mivel a parabola paramétere 0,5, továbbá tengelye az x tengellyel párhuzamos, ezért egyenletét a következő alakban kereshetjük:

$$x - u = (y - v)^2 \quad \text{vagy} \quad x - u = -(y - v)^2.$$

Az első esetben az adott pontok koordinátáit az egyenletbe beírva az alábbi egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{cases} 1 - u = v^2 \\ 6 - u = (5 - v)^2 \end{cases}.$$

Az első egyenletből a második egyenletet kivonva:

$$\begin{aligned} -5 &= v^2 - (5 - v)^2, \\ -5 &= -25 + 10v, \\ v &= 2. \end{aligned}$$

Ekkor $u = -3$, a parabola tengelypontja $T(-3; 2)$, egyenlete pedig:

$$x + 3 = (y - 2)^2.$$

Amennyiben a parabola egyenlete $x - u = -(y - v)^2$ alakú, akkor az adott pontok koordinátáit az egyenletbe helyettesítve az alábbi egyenletrendszerhez jutunk:

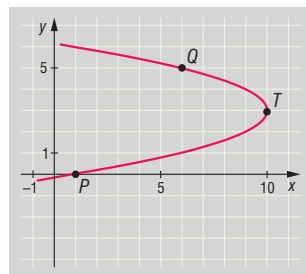
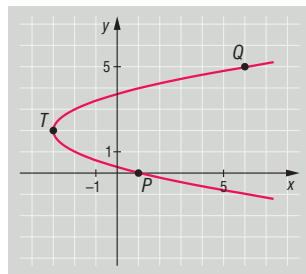
$$\begin{cases} 1 - u = -v^2 \\ 6 - u = -(5 - v)^2 \end{cases}.$$

A megfelelő oldalak különbsége:

$$\begin{aligned} -5 &= -v^2 + (5 - v)^2, \\ -5 &= 25 - 10v, \\ v &= 3. \end{aligned}$$

Ekkor $u = 10$, a tengelypont $T(10; 3)$, a parabola egyenlete:

$$x - 10 = -(y - 3)^2.$$

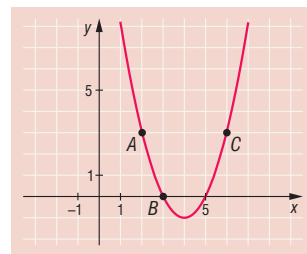




- 3739** a) Mivel a parabola tengelye az y tengellyel párhuzamos, ezért egyenletét $y = ax^2 + bx + c$ alakban kereshetjük.

Az adott pontok koordinátáit az egyenletbe beírva a következő egyenletrendszerhez jutunk:

$$\begin{cases} 3 = 4a + 2b + c \\ 0 = 9a + 3b + c \\ 3 = 36a + 6b + c \end{cases}.$$



Ha a második, illetve a harmadik egyenletből kivonjuk az első egyenlet megfelelő oldalát, akkor a következő összefüggéseket kapjuk:

$$\begin{cases} -3 = 5a + b \\ 0 = 32a + 4b \end{cases}.$$

A kapott kétismeretlenes egyenletrendszer megoldása: $a = 1$ és $b = -8$. A kapott értékeket az első egyenletrendszer első egyenletébe visszaírva kapjuk, hogy $c = 15$. A feltételeknek megfelelő parabola egyenlete:

$$y = x^2 - 8x + 15.$$

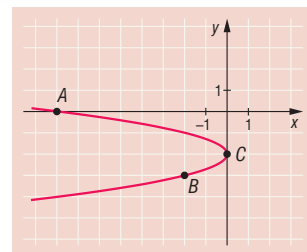
Megjegyzés: Ha az egyenletet átírjuk $y = (x - 4)^2 - 1$ alakba, akkor a parabolát könnyen ábrázolhatjuk is.

- b) Az x tengellyel párhuzamos tengelyű parabolák egyenletét felírhatjuk

$$x = ay^2 + by + c$$

alakban. Az ismert pontok koordinátáit behelyettesítve adódik a következő egyenletrendszer:

$$\begin{cases} -8 = c \\ -2 = 9a - 3b + c \\ 0 = 4a - 2b + c \end{cases}.$$



Az egyenletrendszer megoldása: $a = -2$, $b = -8$ és $c = -8$. A kapott parabola egyenlete:

$$x = -2y^2 - 8y - 8.$$

- 3740** A parabola egyenletét átalakítva:

$$y - \frac{9}{4} = -\left(x + \frac{1}{2}\right)^2,$$

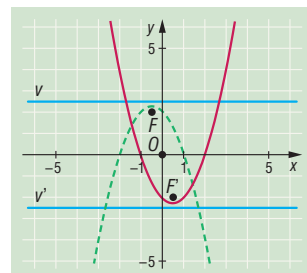
így a parabola tengelypontja $T\left(-\frac{1}{2}; \frac{9}{4}\right)$, paramétere $p = \frac{1}{2}$, fókuszpontja $F\left(-\frac{1}{2}; 2\right)$, vezéregyenésének egyenlete $v: y = \frac{5}{2}$. Az ábrákon ezt a parabolát zöld szaggatott vonallal jelöltük.

- a) A tengelypont origóra vonatkozó tükörképe $T'\left(\frac{1}{2}; -\frac{9}{4}\right)$, a fókuszponté $F'\left(\frac{1}{2}; -2\right)$, a vezéregyenes v' tükörképe: $y = -\frac{5}{2}$.

A parabola tükörképének egyenlete:

$$y + \frac{9}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2.$$

A tükörképet az ábrán pirossal jelöltük.





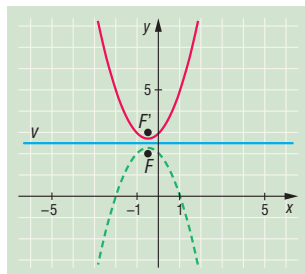
b) Ha a parabolát a vezéregyenesére tükrözzük, akkor a tükörkép

fókuszpontja $F'(-\frac{1}{2}; 3)$, tengelypontja $T'(-\frac{1}{2}; \frac{11}{4})$.

A tükörkép egyenlete:

$$y - \frac{11}{4} = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2.$$

A tükörképet az ábrán pirossal jelöltük.



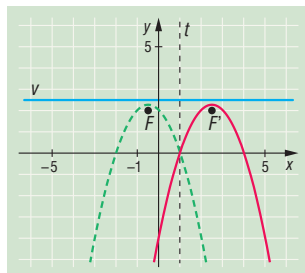
c) A tükörkép tengelypontja $T'(\frac{5}{2}; \frac{9}{4})$, fókuszpontja pedig $F'(\frac{5}{2}; 2)$,

vezéregyenes v .

A tükörkép egyenlete:

$$y - \frac{9}{4} = -\left(x - \frac{5}{2}\right)^2.$$

A tükörképet az ábrán pirossal jelöltük.

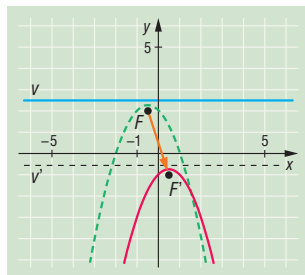


d) A \vec{v} vektorral eltolt parabola tengelypontja $T'(\frac{1}{2}; -\frac{3}{4})$, fókuszpontja $F'(\frac{1}{2}; -1)$, v' vezéregyenes $y = -\frac{1}{2}$.

A kapott parabola egyenlete:

$$y + \frac{3}{4} = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2.$$

Az eltolt parabolát az ábrán pirossal jelöltük.



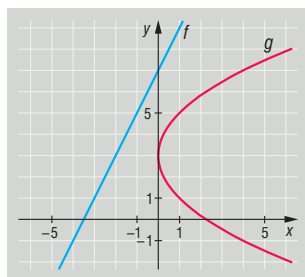
3741 a) Az első egyenletből kifejezett y értékét a második egyenletbe helyettesítve:

$$(2x + 7)^2 - 6(2x + 7) + 9 = 4x,$$

$$4x^2 + 12x + 16 = 0,$$

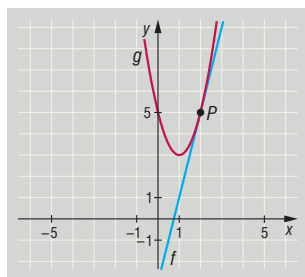
$$x^2 + 3x + 4 = 0.$$

A kapott egyenlet diszkriminánsa negatív, ezért a két alakzatnak nincsen közös pontja.



b) Az egyenes érinti a parabolát. A két alakzat közös pontja:

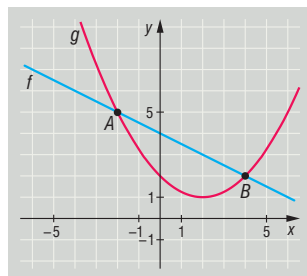
$$P(2; 5).$$





c) A metszéspontok:

$$A(-2; 5) \text{ és } B(4; 2).$$

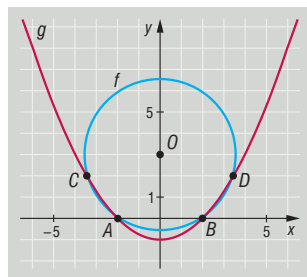


d) Az f kör egyenletét átalakítva a következő egyenletrendszerhez jutunk:

$$\begin{cases} x^2 + (y - 3)^2 = 13 \\ x^2 - 4y = 4 \end{cases}.$$

A két egyenlet megfelelő oldalainak különbsége:

$$\begin{aligned} (y - 3)^2 + 4y &= 9, \\ y^2 - 2y &= 0, \\ y \cdot (y - 2) &= 0. \end{aligned}$$



A fenti egyenlet megoldásai: $y_1 = 0$ és $y_2 = 2$. Ha y_1 értékét a g egyenletébe helyettesítjük, akkor $x^2 = 4$ adódik, amiből a két alakzat alábbi metszéspontjait kapjuk:

$$A(-2; 0) \text{ és } B(2; 0).$$

Ha $y_2 = 2$ értékével számolunk, akkor $x^2 = 12$, amiből a további metszéspontok:

$$C(-2 \cdot \sqrt{3}; 2), \text{ illetve } D(2 \cdot \sqrt{3}; 2).$$

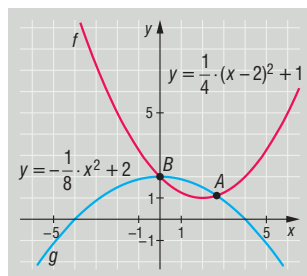
Megjegyzés: Ha a parabola egyenletét $y = \frac{1}{4}x^2 - 1$ alakban írjuk, akkor könnyen ábrázolható.

e) Az f és g egyenletének különbsége:

$$-4x - 12y + 24 = 0, \quad \text{amiből} \quad y = \frac{-x + 6}{3}.$$

A kapott összefüggést a g egyenletébe visszahelyettesítve:

$$\begin{aligned} x^2 + 8 \cdot \frac{-x + 6}{3} - 16 &= 0, \\ 3x^2 - 8x &= 0, \\ x \cdot (3x - 8) &= 0. \end{aligned}$$

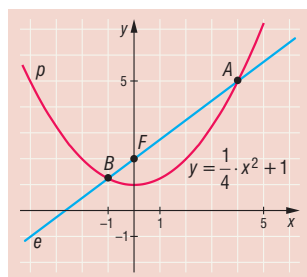


A fenti egyenlet megoldásai: $x_1 = 0$ és $x_2 = \frac{8}{3}$. A két alakzat metszéspontjai:

$$A\left(\frac{8}{3}; \frac{10}{9}\right) \text{ és } B(0; 2).$$

3742 Az adott parabola fókuszpontja $F(0; 2)$. Az F ponton áthaladó, $\vec{v}(4; 3)$ irányvektorú e egyenes egyenlete: $3x - 4y = -8$. A parabola és az egyenes metszéspontjait az alábbi egyenletrendszer megoldásaiból kapjuk:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{4}x^2 + 1 \\ 3x - 4y = -8 \end{cases}.$$





Az y értékét a második egyenletbe helyettesítve:

$$3x - 4\left(\frac{1}{4}x^2 + 1\right) = -8,$$

$$-x^2 + 3x + 4 = 0.$$

A fenti egyenlet megoldásai: $x_1 = 4$ és $x_2 = -1$.

Az egyenes a parabolát a következő pontokban metszi:

$$A(4; 5) \quad \text{és} \quad B\left(-1; \frac{5}{4}\right).$$

3743 a) Az érintő egyenletének irányítányezős egyenlete:

$$y - 5 = m(x - 3).$$

Mivel a feltétel szerint az egyenes érinti a parabolát, ezért az

$$\left. \begin{aligned} y - 5 &= m(x - 3) \\ y &= \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van.

Az y értékét az első egyenletbe visszahelyettesítve:

$$\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} - 5 = m(x - 3),$$

$$\frac{1}{2}x^2 - mx + 3m - \frac{9}{2} = 0.$$

Mivel a fenti egyenletnek is csak egy megoldása van, ezért diszkriminánsa 0, így:

$$m^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(3m - \frac{9}{2}\right) = 0,$$

$$m^2 - 6m + 9 = 0,$$

$$(m - 3)^2 = 0.$$

A fenti egyenlet megoldása $m = 3$, ezért a keresett érintő egyenlete:

$$y - 5 = 3(x - 3), \quad \text{azaz} \quad y = 3x - 4.$$

b) Az érintő egyenletét ezúttal a következő alakban keressük:

$$y + 1 = m(x + 1).$$

Mivel a feltétel szerint az egyenes érinti a parabolát, ezért az

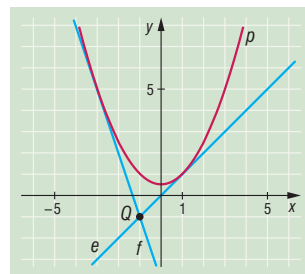
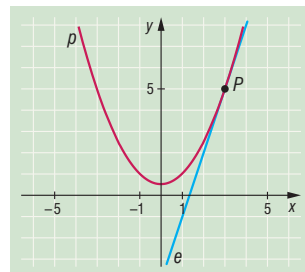
$$\left. \begin{aligned} y + 1 &= m(x + 1) \\ y &= \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \end{aligned} \right\}.$$

egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van.

Az y értékét az első egyenletbe visszahelyettesítve:

$$\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2} = m(x + 1),$$

$$\frac{1}{2}x^2 - mx - m + \frac{3}{2} = 0.$$





A kapott egyenletnek csak egy megoldása van, így diszkriminánsa 0, azaz:

$$m^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(-m + \frac{3}{2}\right) = 0,$$

$$m^2 + 2m - 3 = 0.$$

Az egyenlet megoldásai: $m_1 = 1$ és $m_2 = -3$. Az adott ponton át két érintő is húzható a parabolához, ezek egyenlete:

$$e: y = x,$$

illetve

$$f: y + 1 = -3 \cdot (x + 1), \text{ azaz } y = -3x - 4.$$

c) Az adott (az ábrán e -vel jelölt) egyenessel párhuzamos érintő egyenletének alakja:

$$f: y = 2x + c.$$

Mivel az

$$\left. \begin{array}{l} f: y = 2x + c \\ p: y = \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{2} \end{array} \right\}$$

egyenletrendszernek egy megoldása van, ezért az

$$\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} = 2x + c$$

egyenlet diszkriminánsa 0. Az egyenlet 0-ra redukált alakja:

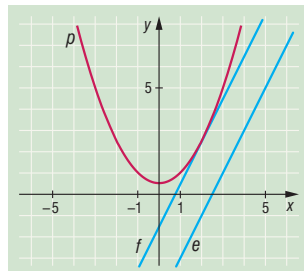
$$\frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{1}{2} - c = 0,$$

amelynek diszkriminánsa:

$$4 - 2 \cdot \left(\frac{1}{2} - c\right) = 0, \quad \text{amiből} \quad c = -\frac{3}{2}.$$

A keresett f érintő egyenlete:

$$y = 2x - \frac{3}{2}.$$



3744 Az eldobott kavics parabolapályán mozog. A parabola síkjában helyezzünk el egy koordináta-rendszert, amelynek kezdőpontjában Barnabás található (A), a vízbe érkezés helye pedig az x tengely pozitív felére illeszkedik.

Ekkor a kavics mozgása során áthalad a következő pontokon:

$$A(0; 0), \quad B(6; 4) \quad \text{és} \quad C(12; 0).$$

Mivel a feltételek szerint B a parabola tengelypontja, ezért egyenletét a következő alakban kereshetjük:

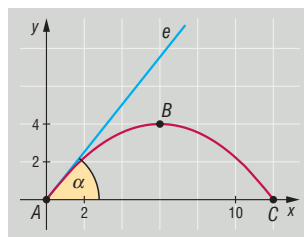
$$y = -a(x - 6)^2 + 4.$$

Az A pont koordinátáit az egyenletbe helyettesítve:

$$0 = -36a + 4, \quad \text{amiből} \quad a = \frac{1}{9},$$

a parabola egyenlete pedig:

$$y = -\frac{1}{9}(x - 6)^2 + 4.$$





Barnabás a kavicsot a parabola e érintője mentén indította útnak. Az A ponton átmenő érintő egyenlete $y = mx$ alakú, továbbá az

$$\left. \begin{aligned} y &= mx \\ y &= -\frac{1}{9}(x-6)^2 + 4 \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszernek egyetlen megoldása van.

Az y változó kiküszöbölése után:

$$mx = -\frac{1}{9}(x-6)^2 + 4,$$

$$\frac{1}{9}x^2 + \left(m - \frac{4}{3}\right) \cdot x = 0,$$

$$x\left(\frac{1}{9}x + m - \frac{4}{3}\right) = 0.$$

A kapott egyenletnek csak egy megoldása lehet, amiből következik, hogy $m = \frac{4}{3}$, az érintő egyenlete pedig $y = \frac{4}{3}x$.

Ha Barnabás a kavicsot a vízszinteshez képest α szögben hajította el, akkor:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}, \quad \text{amiből} \quad \alpha \approx 53,1^\circ.$$

3745 A parabola adott (e -vel jelölt) egyeneshez legközelebb eső pontja éppen az egyenessel párhuzamos érintő érintési pontjával esik egybe. Az érintő egyenlete a következő alakú:

$$y = 3x + c,$$

továbbá az

$$\left. \begin{aligned} y &= 3x + c \\ y &= -x^2 + 5x \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszernek egyetlen megoldása van.

Ebből következik, hogy a

$$\begin{aligned} -x^2 + 5x &= 3x + c, \\ -x^2 + 2x - c &= 0, \end{aligned}$$

egyenlet diszkriminánsa 0, azaz

$$4 - 4c = 0, \quad \text{így} \quad c = 1.$$

A keresett érintő (amit az ábrán f -fel jelöltünk) egyenlete:

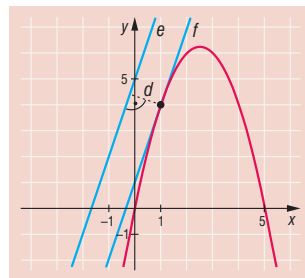
$$y = 3x + 1,$$

az érintési pont, egyben az e -hez legközelebbi parabolapont koordinátái: $E(1; 4)$.

A parabola és az e egyenes távolsága megegyezik az E pont e egyenestől mért távolságával.

A 3689. feladat eredménye alapján a távolság:

$$d = \frac{\left| 3 \cdot 1 - 4 + 5 \right|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{4}{\sqrt{10}} = \frac{2 \cdot \sqrt{10}}{5} \approx 1,26.$$





3746 A parabola egyenlete alapján a fókuszpontja $F\left(0; \frac{1}{4}\right)$, v -vel jelölt vezéregyenesének egyenlete $y = -\frac{1}{4}$. A vezéregyenesen felvett P pont koordinátáit jelölje $P\left(p; -\frac{1}{4}\right)$, ahol p valós szám. A továbbiakban felírjuk a PF szakasz felezőmerőlegesének (e) egyenletét. A szakasz felezőpontja $Q\left(\frac{p}{2}; 0\right)$, a felezőmerőleges egy normálvektora pedig $\overrightarrow{FP}\left(p; -\frac{1}{2}\right)$. Az e egyenes egyenlete:

$$px - \frac{1}{2}y = \frac{p^2}{2}. \quad (1)$$

Megmutatjuk, hogy az (1) egyenletű egyenes valóban érinti az $y = x^2$ egyenletű parabolát. Az y értékét az (1) egyenletbe helyettesítve:

$$\begin{aligned} px - \frac{1}{2}x^2 &= \frac{p^2}{2}, \\ x^2 - 2px + p^2 &= 0, \\ (x - p)^2 &= 0. \end{aligned}$$

A kapott egyenlet megoldása $x = p$, amiből következik, hogy az (1) egyenletű egyenesnek a parabolával egy közös pontja van, amelynek koordinátái $E(p; p^2)$. Mivel az e egyenes nyilvánvaló módon nem lehet párhuzamos a parabola tengelyével, ezért csakis a parabola érintője lehet.

3747 Az y tengely a parabolának, és így a beírt téglalapnak is szimmetriatengelye, ezért a téglalap csúcsainak koordinátái $A(-b; 0)$, $B(b; 0)$, $C(b; -b^2 + 6)$, illetve $D(-b; -b^2 + 6)$, ahol $0 < b < \sqrt{6}$.

Az $ABCD$ téglalap területe:

$$T = AB \cdot BC = 2b \cdot (-b^2 + 6).$$

Feladatunk a $T(b) = 2b \cdot (-b^2 + 6)$ függvény maximumának megtalálása a $0 < b < \sqrt{6}$ feltétel mellett. Mivel a szóban forgó függvény pozitív értékű, ezért pontosan akkor lesz maximális, amikor négyzete, vagyis elegendő a $T^2(b) = 4b^2 \cdot (-b^2 + 6)^2$ függvény maximumhelyét keresnünk. A kapott függvényt tovább alakítva:

$$T^2(b) = 2 \cdot (2b^2) \cdot (-b^2 + 6) \cdot (-b^2 + 6).$$

A zárójelben álló számok szorzatáról eszünkbe juthat azok mértani közepe, amely közismerten nem lehet nagyobb a számtani közepükénél, azaz:

$$\sqrt[3]{(2b^2) \cdot (-b^2 + 6) \cdot (-b^2 + 6)} \leq \frac{2b^2 + (-b^2 + 6) + (-b^2 + 6)}{3} = 4,$$

majd mindkét oldal harmadik hatványát véve:

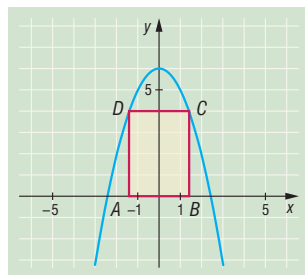
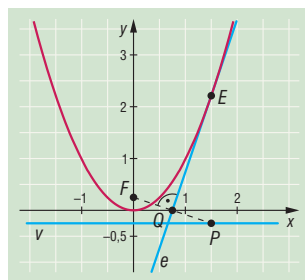
$$(2b^2) \cdot (-b^2 + 6) \cdot (-b^2 + 6) \leq 64.$$

A kapott egyenlőtlenségből közvetlenül következik, hogy

$$T^2(b) \leq 128,$$

amiből a $0 < b < \sqrt{6}$ feltétel figyelembevételével kapjuk, hogy

$$T(b) \leq 8 \cdot \sqrt{2}.$$





Eredményünk mutatja, hogy a beírt $ABCD$ téglalap területe nem lehet nagyobb, mint $8 \cdot \sqrt{2}$. A terület a maximumát akkor éri el, amikor a mértani és számtani közép közötti összefüggésben egyenlőség teljesül, azaz amikor a három szám, amelyre az egyenlőtlenséget alkalmaztuk, egymással megegyezik. Ez pontosan akkor fordul elő, amikor:

$$\begin{aligned} 2b^2 &= -b^2 + 6, \\ b &= \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Összefoglalva: a maximális területű beírt téglalap csúcsai:

$$A(-\sqrt{2}; 0), \quad B(\sqrt{2}; 0), \quad C(\sqrt{2}; 4) \quad \text{és} \quad D(-\sqrt{2}; 4).$$

A maximális terület:

$$8 \cdot \sqrt{2}.$$

3748 A keresett pontot jelölje $A(a; 0)$, a szabályos háromszög további, az y tengelyre illeszkedő csúcsait B , illetve C .

Mivel az x tengely a parabolának és az ABC háromszögnek is szimmetriatengelye, ezért az AB egyenes irányszöge $\alpha = 30^\circ$, iránytangense pedig:

$$m = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Ebből adódóan az AB egyenes iránytényezőss egyenlete:

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot (x - a).$$

Mivel az egyenes a parabolát érinti, ezért az

$$\left. \begin{aligned} y &= \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot (x - a) \\ x &= y^2 \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszernek egyetlen megoldása van. Az x változó kiküszöbölése után azt kapjuk, hogy

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot (y^2 - a),$$

$$\sqrt{3} \cdot y^2 - 3y - a \cdot \sqrt{3} = 0.$$

Természetesen a fenti egyenletnek is csak egy megoldása van, tehát az egyenlet diszkriminánsa 0:

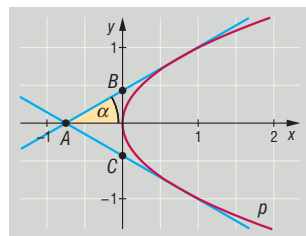
$$9 - 4 \cdot \sqrt{3} \cdot (-a \cdot \sqrt{3}) = 0, \quad \text{amiből} \quad a = -\frac{3}{4}, \quad \text{így} \quad A\left(-\frac{3}{4}; 0\right).$$

Ha a B csúcs koordinátái $B(0; b)$, és $C(0; -b)$, akkor az ABC háromszög oldala $2b$, és magassága az A pont első koordinátájának ismeretében $\frac{3}{4}$, ezért:

$$\begin{aligned} \frac{3}{4} &= 2b \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ b &= \frac{\sqrt{3}}{4}. \end{aligned}$$

A háromszög további csúcsai:

$$B\left(0; \frac{\sqrt{3}}{4}\right) \quad \text{és} \quad C\left(0; -\frac{\sqrt{3}}{4}\right).$$





3749 A parabola fókuszpontja $F\left(0; \frac{1}{4}\right)$. Tegyük fel, hogy az F pontból

kiinduló fénysugár a $P(p; p^2)$ pontban éri el a parabolát. Ekkor a fénysugár visszaverődés előtti FP „útja” ugyanakkora szöget zár be a parabola P pontbeli érintőjével, mint a visszaverődés utáni „útja”. Ezt a közös szöget az ábrán β jelöli.

A β szög azonban még egy helyen megjelenik az ábrában; ha a fénysugár nem verődne vissza a tükörről, hanem útja egyenesen folytatódna tovább, akkor a kapott (ábrán PF' -vel jelölt) szakasz szintén ezt a szöget zárja be a P pontbeli érintővel. Ezt könnyen beláthatjuk, ha arra gondolunk, hogy így a P pontnál csúcsszögek alakulnak ki.

Megállapításaink lehetővé teszik, hogy felírjuk annak az egyenesnek az egyenletét, amelyen a fénysugár a visszaverődés után halad. Ehhez például a következő lépések vezethetnek el:

1. Az F pont P -re vonatkozó F' tükörképének meghatározása. A fénysugár az FF' egyenesen haladna, ha nem verődne vissza a parabolatükörről. Az F' pont koordinátái:

$$F'\left(2p; 2p^2 - \frac{1}{4}\right).$$

2. A P pontbeli érintő egyenletének felírása. Az érintő egyenletét $y - p^2 = m(x - p)$ alakban kereshetjük. Az

$$\begin{cases} y - p^2 = m(x - p) \\ y = x^2 \end{cases}$$

egyenletrendszernek egy megoldása van csakúgy, mint a belőle kapott

$$x^2 - mx + mp - p^2 = 0$$

egyenletnek. Ebből adódóan az egyenlet diszkriminánsa 0, azaz

$$m^2 - 4(mp - p^2) = 0,$$

amiből

$$(m - 2p)^2 = 0, \quad \text{végül} \quad m = 2p.$$

A P ponton átmenő e érintő egyenlete:

$$e: y - p^2 = 2p \cdot (x - p).$$

3. Az F' -ben az érintőre emelt merőleges egyenes egyenletének meghatározása. A kapott érintő egyenletéből leolvasható annak egy normálvektora: $\vec{n}(2p; -1)$. Mivel ez a vektor a keresett merőlegesnek egyben irányvektora, ezért az egyenes egyenlete:

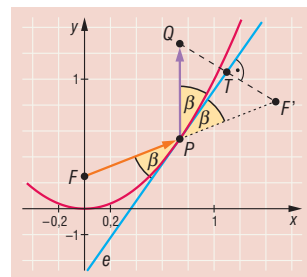
$$x + 2py = 2p + 2p \cdot \left(2p^2 - \frac{1}{4}\right), \quad \text{azaz} \quad x + 2py = 4p^3 + \frac{3}{2}p.$$

4. A 3. pontban felírt egyenes, valamint a P pontbeli érintő T metszéspontjának meghatározása. A T metszéspont koordinátáit az

$$\begin{cases} x + 2py = 4p^3 + \frac{3}{2}p \\ y - p^2 = 2p \cdot (x - p) \end{cases}$$

egyenletrendszer megoldása után kapjuk. A második egyenlet $2p$ -szeresét kivonva az első egyenletből:

$$x + 2p^3 = 4p^3 + \frac{3}{2}p - 4p^2x + 4p^3.$$





Az egyenlet megoldása:

$$x = \frac{6p^3 + \frac{3}{2}p}{1 + 4p^2} = \frac{\frac{3}{2}p \cdot (4p^2 + 1)}{1 + 4p^2} = \frac{3}{2}p.$$

A kapott értéket a második egyenletbe visszahelyettesítve, majd a műveleteket elvégezve kapjuk: $y = 2p^2$, így

$$T\left(\frac{3}{2}p; 2p^2\right).$$

5. Az F' pont tükrözése a T pontra vonatkozóan. Ha az eredményt Q jelöli, akkor a parabola-tükrörről visszaverődött fénysugár áthalad a Q ponton. Mivel T a QF' szakasz felezőpontja, ezért ha $Q(q_1; q_2)$, akkor:

$$\frac{q_1 + 2p}{2} = \frac{3}{2}p \quad \text{és} \quad \frac{q_2 + 2p^2 - \frac{1}{4}}{2} = 2p^2.$$

Az egyenletrendszer megoldása után:

$$Q\left(p; 2p^2 + \frac{1}{4}\right).$$

6. A fénysugár útját a PQ egyenes mentén folytatja. A P és Q pontok első koordinátája egyaránt p , ezért a PQ egyenes párhuzamos az y tengellyel, ami a parabola tengelye. Ezzel a feladat állítását beláttuk.

Vegyes feladatok – megoldások

3750 a) (9; 5); b) (-9; -5); c) (0; 0); d) (45; 25).

3751 $B(10; 3)$.

3752 a) -11; b) -44; c) $-11\lambda^2$.

A skaláris szorzat az eredeti vektorok skaláris szorzatának λ^2 -szeresére változik.

3753 Megmutathatjuk például, hogy $\overrightarrow{AP} = \lambda \cdot \overrightarrow{AB}$, ahol $0 \leq \lambda \leq 1$.

a) $\overrightarrow{AP}(4; -3)$, $\overrightarrow{AB}(16; -12)$, így $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{4} \cdot \overrightarrow{AB}$ és $\frac{AP}{PB} = \frac{1}{3}$.

b) $\overrightarrow{AP}(2; -4)$, $\overrightarrow{AB}(5; -10)$, így $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{5} \cdot \overrightarrow{AB}$ és $\frac{AP}{PB} = \frac{2}{3}$.

c) $\overrightarrow{AP}(-8; 2)$, $\overrightarrow{AB}(-12; 3)$, így $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{AB}$ és $\frac{AP}{PB} = 2$.

d) $\overrightarrow{AP}(5; -6)$, $\overrightarrow{AB}(10; -12)$, így $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB}$ és $\frac{AP}{PB} = 1$.

3754 $y = 4x + 5$ [$M(-1; 1)$].

3755 $y = \frac{1}{2}x - \frac{7}{2}$ [$M(1; -3)$].



3756 $p = 4$, $q = 2$, a kör sugara 5.

3757 a) $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 5$;

b) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 5$;

c) $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 5$;

d) $(x - 9)^2 + (y + 8)^2 = 5$;

e) $(x + 4)^2 + y^2 = 5$;

f) $(x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 5$;

g) $(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 20$, illetve $(x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 20$;

h) $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$, illetve $\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{13}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$.

3758 Az ACD háromszög területére:

$$T_{ACD} = \frac{CD \cdot m}{2},$$

ahol m a háromszög CD oldalához tartozó magasságát jelöli.

Mivel $CD = 3$, továbbá $m = 5$, ezért

$$T_{ACD} = 7,5.$$

Az ABC háromszög területe az ábra alapján könnyen kiszámolható:

$$T_{ABC} = T_{AEC} - T_{AFB} - T_{BFEC}.$$

Az AEC , illetve AFB háromszögek területére:

$$T_{AEC} = 25, \quad T_{AFB} = 2,5.$$

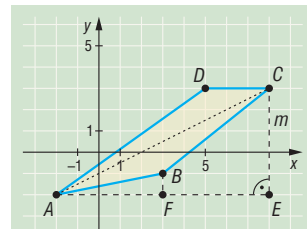
A $BFEC$ trapéz alapjai 1, illetve 5, magassága szintén 5, ezért területe:

$$T_{BFEC} = \frac{1+5}{2} \cdot 5 = 15.$$

Végül az ABC háromszög területére:

$$T_{ABC} = 25 - 2,5 - 15 = 7,5$$

adódik, ami mutatja, hogy az AC átló valóban megfelel az $ABCD$ négyszög területét.



3759 $C(-5; -1)$.

3760 a) Két vektor pontosan akkor merőleges egymásra, ha skaláris szorzatuk 0. A két vektor skaláris szorzata a koordinátáik segítségével:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x \cdot (x - 1) + (x + 2) \cdot (x + 3) = 0,$$

$$2x^2 + 4x + 6 = 0.$$

Mivel a fenti egyenletnek nincsen valós megoldása, ezért a két vektor nem lehet merőleges egymásra.

b) A két vektor skaláris szorzata:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x \cdot (x + 3) + (x + 2) \cdot (x + 3) = (x + 3) \cdot (2x + 2) = 0.$$

Mivel egy szorzat csak akkor lehet 0, ha valamelyik tényezője 0, ezért

$$x = -3 \quad \text{vagy} \quad x = -1.$$

Megjegyzés: Az előbbi esetben $\vec{b} = \mathbf{0}$, amely minden vektorra merőleges. Ha $x = -1$, akkor $\vec{a}(-1; 1)$, $\vec{b}(2; 2)$.



3761 a) Mivel $\overrightarrow{AB}(6; 2)$ és $\overrightarrow{DC}(3; 1)$, ezért látható, hogy $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{DC}$, amiből már azonnal következik, hogy az AB oldal párhuzamos a DC oldallal, így az $ABCD$ négyszög valóban trapéz. Noéminek igaza volt.

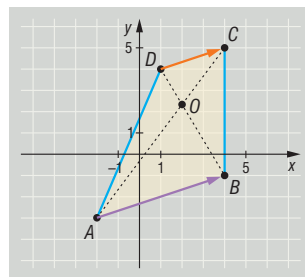
b) Az AB és DC alapok hosszának aránya az a) feladat eredményei

alapján $\frac{AB}{DC} = 2$. Ha az átlók metszéspontja O , akkor az ABO

és COD háromszögek hasonlók egymáshoz, és a hasonlóság aránya 2. Ebből azonnal következik, hogy az átlók 2:1 arányban osztják egymást, a hosszabb részek a hosszabb (AB) alaphoz vannak közelebb.

c) Az O pont koordinátái:

$$O\left(\frac{1 \cdot (-2) + 2 \cdot 4}{3}; \frac{1 \cdot (-3) + 2 \cdot 5}{3}\right), \quad \text{azaz} \quad O\left(2; \frac{7}{3}\right).$$



3762 a) Mivel $\overrightarrow{AC}(3; 2)$ és $\overrightarrow{AB}(6; -4)$, ezért:

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{13} \quad \text{és} \quad |\overrightarrow{AB}| = 2 \cdot \sqrt{13}.$$

A két vektor skaláris szorzatára:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3 \cdot 6 + 2 \cdot (-4) = 10,$$

másrészt

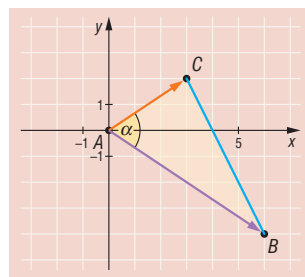
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \sqrt{13} \cdot 2 \cdot \sqrt{13} \cdot \cos \alpha = 26 \cdot \cos \alpha.$$

A két eredmény összevetéséből:

$$26 \cdot \cos \alpha = 10,$$

$$\cos \alpha = \frac{5}{13},$$

$$\alpha \approx 67,38^\circ.$$



b) Az α szögfelezője illeszkedik az x tengelyre. Az a) feladatban meghatározott két vektor az AC , illetve az AB egyenesnek egy-egy irányvektora, ezért AC egyenes iránytangense $\frac{2}{3}$, AB iránytangense $-\frac{2}{3}$.

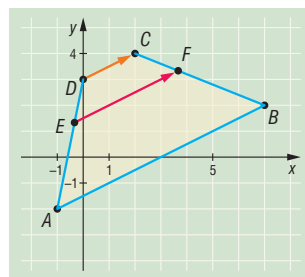
A tangensfüggvény tulajdonságai alapján ezért AC és AB ugyanakkora nagyságú szöget zár be az x tengely pozitív felével, amit másként úgy is megfogalmazhatunk, hogy az x tengely szögfelezője a két egyenes által bezárt α szögnek.

3763 a) Az E pont a DA szakaszt 1:2 arányban osztja, ezért $E\left(-\frac{1}{3}; \frac{4}{3}\right)$.

Hasonló módon az F pont 1:2 arányban osztja a CB szakaszt,

így $F\left(\frac{11}{3}; \frac{10}{3}\right)$. Ennek megfelelően az \overrightarrow{EF} koordinátái: $\overrightarrow{EF}(4; 2)$.

b) Mivel $\overrightarrow{DC}(2; 1)$, ezért $\overrightarrow{EF} = 2\overrightarrow{DC}$, amiből következik, hogy az EF szakasz párhuzamos az $ABCD$ trapéz DC , és így természetesen az AB alapjával is.





3764 A háromszög Euler-egyenese tartalmazza a háromszög M magasságpontját, valamint S súlypontját. Az S pont koordinátái:

$$S\left(\frac{11}{3}; \frac{4}{3}\right).$$

Az M pont meghatározásához felírjuk az m_c , valamint az m_b magasságvonalak egyenletét. Mivel m_c párhuzamos az y tengellyel, továbbá átmegy a C ponton, így m_c egyenlete: $x = 5$.

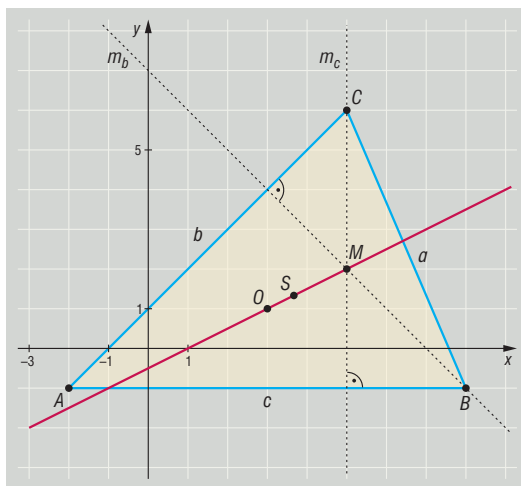
Az m_b egyenesnek az $\frac{1}{7}\overrightarrow{AC}(1; 1)$ normálvektora, B pedig egy pontja, ezért m_b egyenlete: $x + y = 7$. A két egyenes metszéspontja:

$$M(5; 2).$$

Az Euler-egyenest a $\frac{3}{2}\overrightarrow{SM}(2; 1)$ vektor irányvektora, ezért az SM Euler-egyenest egyenlete:

$$x - 2y = 1.$$

Megjegyzés: Az Euler-egyenest átmegy az ABC háromszög köré írt kör O középpontján is. Az O pont koordinátái: $O(3; 1)$.



3765 A rombusz adott csúcsát A -val, átlóinak metszéspontját O -val, az adott oldalegyenest e -vel jelöltük. Az $ABCD$ rombusz az O pontra vonatkozóan középpontosan szimmetrikus, így az A pont O -ra vonatkozó tükörképe egybeesik a C ponttal. A megfelelő tükörkép koordinátái: $C(4; 0)$.

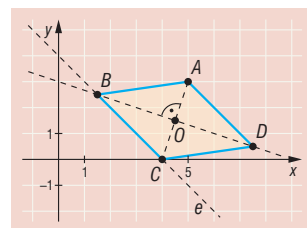
A rombusz átlói merőlegesek egymásra, így a BD egyenesnek a $\overrightarrow{CA}(1; 3)$ normálvektora, O pedig egy pontja, ezért egyenlete: $x + 3y = 9$.

A B csúcsot a BD egyenes metszi ki az e egyenesből. A megfelelő egyenletrendszer megoldása után $B\left(\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right)$.

A BD szakasznak O a felezőpontja, amiből $D\left(\frac{15}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

A rombusz hiányzó csúcsai:

$$B\left(\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right), \quad C(4; 0), \quad D\left(\frac{15}{2}; \frac{1}{2}\right).$$



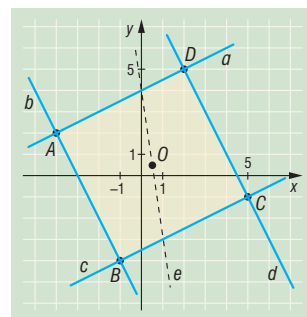
3766 a) Az adott egyenesek egy-egy irányvektora:

$$\vec{v}_a(2; 1), \quad \vec{v}_b(1; -2), \quad \vec{v}_c(2; 1) \quad \text{és} \quad \vec{v}_d(1; -2).$$

Mivel $\vec{v}_a = \vec{v}_c$ és $\vec{v}_b = \vec{v}_d$, ezért az egyenesek által közrefogott négyszög szemközti oldalai párhuzamosak, így a négyszög parallelogramma. Vegyük észre továbbá, hogy például:

$$\vec{v}_a \cdot \vec{v}_b = 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) = 0,$$

ezért az a és b egyenesek merőlegesek egymásra. Hasonló igaz a négyszög további szomszédos oldalegyenesesire, ezért a megadott egyenesek téglalapot fognak közre.





A megfelelő egyenletrendszerek megoldása után kiszámíthatjuk a szóban forgó négyszög csúcsainak koordinátáit is. Az a és b egyenesek metszéspontja: $A(-4; 2)$, a b és c egyeneseké $B(-1; -4)$, a c és d egyeneseké $C(5; -1)$, végül a d és az a egyeneseké $D(2; 5)$.

Mivel $AB = BC = \sqrt{45}$, ezért az $ABCD$ téglalap szomszédos oldalai megegyeznek, ami igazolja, hogy $ABCD$ négyzet.

b) A négyzet köré írt kör középpontja az AC szakasz O felezőpontja. Az O pont koordinátái:

$O\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$. A kör sugara: $r = OA = \sqrt{\frac{45}{2}}$. Az $ABCD$ négyzet köré írt kör egyenlete:

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{45}{2}.$$

c) A négyzet köré írt kör területe: $T = \frac{45}{2}\pi$, a négyzet területe pedig $t = 45$. Mivel

$$\frac{T}{t} = \frac{\pi}{2} \approx 1,571,$$

ezért a kör területe a négyzet területének körülbelül 157%-a.

d) Egyszerű behelyettesítéssel meggyőződhetünk arról, hogy a négyzet köré írt kör O középpontja illeszkedik az e egyenesre. Ebből adódóan az e egyenes a négyzetet két egybevágó trapézra bontja, így területük aránya 1 : 1.

3767 Behelyettesítés mutatja, hogy az A pont nem illeszkedik az e egyenesre, ezért az A pontot is tartalmazó átló egyenese (melyet az ábrán f jelöl) merőleges e -re. Ebből adódóan az e egyenes irányvektora az f egyenesnek normálvektora. Az e egyenletéből leolvasható egy irányvektora: $\vec{v}(2; 1)$. Az f egyenes egyenlete ennek megfelelően $2x + y = 2$. A rombusz átlóinak metszéspontját a két átlóegyenestől álló

$$\left. \begin{aligned} y &= \frac{1}{2}x + 2 \\ y &= -2x + 2 \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszer megoldása adja. Az O metszéspont: $O(0; 2)$. Az $ABCD$ rombusz átlói felezik egymást, így O az AC szakasz felezőpontja, amiből $C(1; 0)$. A feltételek alapján a rombusz oldala $\sqrt{10}$, ezért a hiányzó B és D csúcsokat az A középpontú, $\sqrt{10}$ sugarú kör metszi ki az e egyenesből. A szóban forgó kör egyenlete:

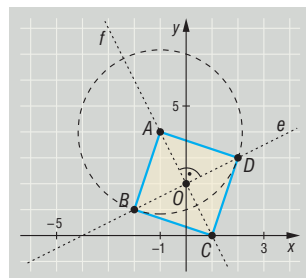
$$(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 10.$$

A kör és az e egyenes egyenletéből álló

$$\left. \begin{aligned} (x + 1)^2 + (y - 4)^2 &= 10 \\ y &= \frac{1}{2}x + 2 \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszerből y értékét kiküszöbölve:

$$\begin{aligned} (x + 1)^2 + \left(\frac{1}{2}x - 2\right)^2 &= 10, \\ \frac{5}{4}x^2 &= 5, \\ x^2 &= 4. \end{aligned}$$





A kapott egyenlet megoldásai: $x_1 = -2$, illetve $x_2 = 2$. Ennek megfelelően $B(-2; 1)$ és $D(2; 3)$.

A rombusz hiányzó csúcsai:

$$C(1; 0), \quad B(-2; 1) \quad \text{és} \quad D(2; 3).$$

3768 a) A két templom távolsága:

$$AB = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 \text{ km.}$$

b) Azok a pontok, amelyekből az AB szakasz 90° -os szög alatt látszik, illeszkednek a szakasz fölé emelt Thalész-körre, amit az ábrán c jelöl. A kör középpontja $O(4; 0)$, sugara 5, ezért egyenlete:

$$(x - 4)^2 + y^2 = 25.$$

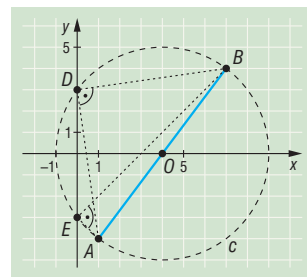
Mivel az útszakasz egyenlete $x = 0$, ezért a metszéspontok második koordinátájára:

$$(0 - 4)^2 + y^2 = 25, \quad \text{amiből} \quad y_1 = 3 \quad \text{és} \quad y_2 = -3.$$

Két olyan pont is van, amelyből a templomok 90° -os szög alatt látszanak, ezek koordinátái:

$$D(0; 3) \quad \text{és} \quad E(0; -3).$$

c) A két templom a c kör belső pontjaiból látszik tompaszög alatt. Ez az útszakasznak összesen 6 km hosszú része (D és E pont között).



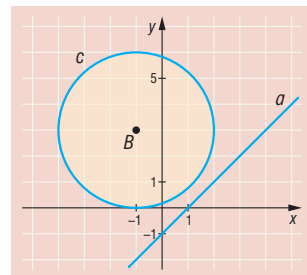
3769 Bodri a: $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 9$ egyenletű körvonalat, illetve annak belső pontjait éri el. A kör, valamint az a -val jelölt sétaút metszéspontjait az alábbi egyenletrendszer megoldásai adják:

$$\begin{cases} (x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 9 \\ y = x - 1 \end{cases}.$$

Az y értékét az első egyenletbe visszahelyettesítve:

$$\begin{aligned} (x + 1)^2 + (x - 4)^2 &= 9, \\ x^2 - 3x + 4 &= 0. \end{aligned}$$

A fenti egyenlet diszkriminánsa negatív, így a sétaút nem metszi a Bodri által elérhető körvonalat. Ezzel a feladat állítását igazoltuk.



3770 a) A hozzárendelési utasítást átalakítva:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + (x - 3)^2} + \sqrt{(x - 6)^2 + x^2}.$$

Vegyük észre, hogy a jobb oldalon éppen a $P(x; x)$ pontnak az $A(0; 3)$ és $B(6; 0)$ pontoktól mért távolságösszege áll.

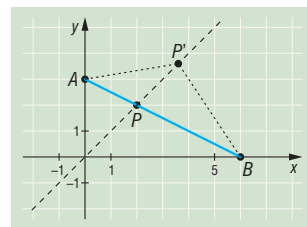
A feladatot így az alábbiak szerint fogalmazhatjuk át: keressük az $y = x$ egyenletű egyenesnek azt a P pontját, amelyre a $PA + PB$ összeg a lehető legkisebb.

Könnyen végiggondolható, hogy a P pontnak illeszkednie kell az AB szakaszra. Ha ugyanis P' az $y = x$ egyenletű egyenes egy P -től különböző pontja, akkor az ABP' háromszögben a háromszög-egyenlőtlenség mutatja, hogy:

$$AP + PB = AB < AP' + P'B.$$

Az AB szakasz az adott egyenest a $P(2; 2)$ pontban metszi, ezért az f függvény a minimumát az $x = 2$ helyen veszi fel. A minimum értéke:

$$f(2) = AB = \sqrt{45} = 3 \cdot \sqrt{5}.$$





- b) Az a) feladathoz hasonlóan járhatunk el. A hozzárendelési szabályt átalakítva:

$$g(x) = \sqrt{x^2 + (4x - 3)^2} + \sqrt{(x - 6)^2 + (4x)^2}.$$

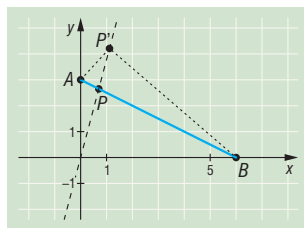
A jobb oldalon a $P(x; 4x)$ pontnak az $A(0; 3)$ és $B(6; 0)$ pontoktól mért távolságösszege áll. Feladatunk tehát ezúttal az $y = 4x$ egyenletű egyenes, valamint az AB szakasz metszéspontjának meghatá-

rozása. Az AB egyenes tengelymetszeti egyenlete $\frac{x}{6} + \frac{y}{3} = 1$, ezért a megfelelő P pont koordinátáira:

$$\frac{x}{6} + \frac{4x}{3} = 1, \quad \text{amiből} \quad x = \frac{2}{3}.$$

A minimumot szolgáltató P pont koordinátái $P\left(\frac{2}{3}; \frac{8}{3}\right)$. A g függvény a minimumát az $x = \frac{2}{3}$ helyen veszi fel. A minimum értéke:

$$g\left(\frac{2}{3}\right) = AB = \sqrt{45} = 3 \cdot \sqrt{5}.$$



- 3771** a) Az a -val jelölt autópályán olyan P pontot keresünk, amelyre az $AP + PB$ összeg a lehető legkisebb. Tükrözzük ennek érdekében a B pontot az a egyenesre, a tükröképet jelölje B' . Mivel a tükrözés távolságtartó transzformáció, ezért:

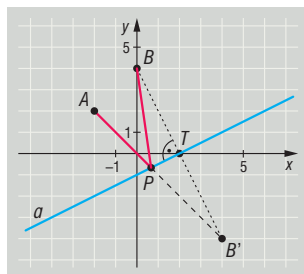
$$PB = PB', \quad \text{így} \quad AP + PB = AP + PB',$$

amiből következik, hogy a keresett összeg pontosan akkor minimális, amikor az $AP + PB'$ összeg is minimális. A fenti összeg akkor lesz a lehető legkisebb, amikor a P pont illeszkedik az AB' szakaszra.

Első lépésben a B' pont koordinátáit számoljuk ki. A tükrözés miatt B' illeszkedik a B pontban az a egyenesre emelt merőlegesre. Ebből kifolyólag a BB' egyenes egy irányvektora megegyezik az a egyenes egy normálvektorával. Az adott egyenletből a BB' egyenes egy irányvektora: $\vec{v}(1; -2)$, így egyenlete: $2x + y = 4$. A BB' egyenes és az a egyenes T metszéspontját a két egyenes egyenletéből álló egyenletrendszer megoldása adja. A T pont koordinátái: $T(2; 0)$. Mivel a T pont egyben a BB' szakasz felezőpontja is, ezért $B'(4; -4)$.

A következő lépésben felírjuk az AB' egyenes egyenletét. Az egyenesnek az $\overrightarrow{AB'}(6; -6)$ egy irányvektora, ezért az $\vec{n}(1; 1)$ egy normálvektora. Az egyenes normálvektoros egyenlete: $x + y = 0$.

Végül a lehajtó helyét (amit az ábrán P jelöl) az AB' egyenes metszi ki az a egyenesből. A megfelelő egyenletrendszer megoldása után $P\left(\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}\right)$ adódik. A lehajtót a $P\left(\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}\right)$ pontban kell kialakítani.



- b) Korábbi megjegyzésünk alapján a megépítendő útszakasz hossza megegyezik az AB' szakasz hosszával. Mivel $AB' = 6 \cdot \sqrt{2} \approx 8,49$, ezért körülbelül 8,49 km hosszú utat kell építeni. Ez hozzávetőlegesen 1 273 500 000 Ft-ba kerül.

- 3772** a) Ha a kör középpontja $O(u; v)$, sugara r , továbbá $u, v, r \in \mathbb{Z}$, akkor a következő pontok koordinátái egészek, és illeszkednek a körre:

$$A(u - r; v), \quad B(u + r; v), \quad C(u; v - r) \quad \text{és} \quad D(u; v + r).$$

Az $O(0; 0)$ középpontú, $r = 1$ sugarú kör pontosan négy rácspontot tartalmaz, ezek:

$$A(-1; 0), \quad B(1; 0), \quad C(0; -1) \quad \text{és} \quad D(0; 1).$$



b) Az $O\left(-\sqrt{3}; \frac{1}{4}\right)$ középpontú r sugarú kör egyenlete:

$$(x + \sqrt{3})^2 + \left(y - \frac{1}{4}\right)^2 = r^2.$$

Indirekt módon bizonyítunk, ezért tegyük fel, hogy az állítással ellentétben két olyan rácspont is létezik, amelyek illeszkednek a körvonalra. Legyenek ezek $A(a_1; a_2)$, illetve $B(b_1; b_2)$, továbbá $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Z}$, valamint az $a_1 = b_1$ és $a_2 = b_2$ egyenlőségek egyidejűleg nem teljesülnek. Mivel mindkét pont koordinátái kielégítik a kör egyenletét, ezért:

$$(a_1 + \sqrt{3})^2 + \left(a_2 - \frac{1}{4}\right)^2 = r^2,$$

$$(b_1 + \sqrt{3})^2 + \left(b_2 - \frac{1}{4}\right)^2 = r^2.$$

A két egyenlet jobb oldala megegyezik, ezért a bal oldalak is egyenlők, így:

$$(a_1 + \sqrt{3})^2 + \left(a_2 - \frac{1}{4}\right)^2 = (b_1 + \sqrt{3})^2 + \left(b_2 - \frac{1}{4}\right)^2.$$

A műveletek elvégzése után azt kapjuk, hogy

$$a_1^2 + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot a_1 + a_2^2 - \frac{1}{2}a_2 = b_1^2 + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot b_1 + b_2^2 - \frac{1}{2}b_2,$$

majd rendezés után:

$$a_1^2 - b_1^2 + a_2^2 - b_2^2 + \frac{1}{2}b_2 - \frac{1}{2}a_2 = 2 \cdot \sqrt{3} \cdot (b_1 - a_1).$$

A fenti egyenlőség bal oldalán racionális szám áll, ezért értelemszerűen a jobb oldalán is racionális szám szerepel. Mivel $2 \cdot \sqrt{3}$ irracionális szám, ezért a jobb oldal egyetlen esetben lehet racionális, mégpedig ha értéke 0, azaz ha $a_1 = b_1$. Ekkor persze a bal oldal is 0, ezért:

$$a_1^2 - b_1^2 + a_2^2 - b_2^2 + \frac{1}{2}b_2 - \frac{1}{2}a_2 = 0,$$

majd szem előtt tartva, hogy $a_1 = b_1$:

$$a_2^2 - b_2^2 + \frac{1}{2}b_2 - \frac{1}{2}a_2 = 0,$$

$$a_2^2 - b_2^2 = \frac{1}{2}(a_2 - b_2),$$

$$(a_2 - b_2) \cdot (a_2 + b_2) = \frac{1}{2}(a_2 - b_2).$$

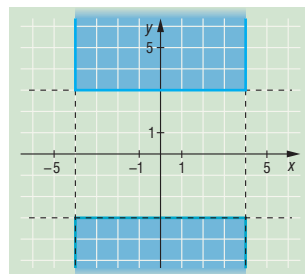
Korábbi megjegyzésünk alapján az $a_1 = b_1$ és $a_2 = b_2$ egyenlőségek egyidejűleg nem teljesülhetnek, ezért $a_2 \neq b_2$, így mindkét oldal osztható $(a_2 - b_2)$ -vel, amiből következik, hogy:

$$a_2 + b_2 = \frac{1}{2}.$$

Mivel a bal oldal két egész szám összege, ezért nem lehet egyenlő a jobb oldallal, azaz ellentmondásra jutottunk. Ebből adódik, hogy az $O\left(-\sqrt{3}; \frac{1}{4}\right)$ középpontú, r sugarú kör valóban legfeljebb egy rácsponton mehet át.



- 3773 a) A határoló vonalak pontjai hozzátartoznak az A halmazhoz.



- b) Az egyenlőtlenséget 0-ra redukálva, majd közös nevezőt kialakítva kapjuk, hogy:

$$\frac{-x - 2y + 3}{2x + y - 1} \leq 0.$$

Ez csak úgy teljesülhet, ha

$$-x - 2y + 3 \leq 0 \quad \text{és} \quad 2x + y - 1 > 0,$$

vagy ha

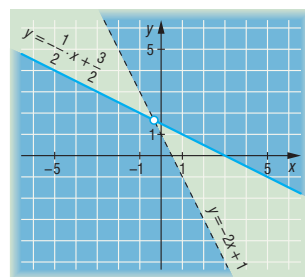
$$-x - 2y + 3 \geq 0 \quad \text{és} \quad 2x + y - 1 < 0.$$

A két feltételből y értékét kifejezve

$$-\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \leq y \quad \text{és} \quad y > 1 - 2x,$$

vagy

$$-\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \geq y \quad \text{és} \quad y < 1 - 2x.$$



A folytonos vonallal rajzolt egyenes pontjai hozzátartoznak, míg a szaggatott egyenes pontjai nem tartoznak hozzá a B halmazhoz.

- c) Az $x = 0$ feltételt kielégítő pontok, vagyis az y tengely pontjai, nem tesznek eleget a feltételnek.

Ha $x > 0$, vagyis az első és a negyedik síknegyed pontjait tekintjük, akkor:

$$x^3 - 2x - xy > 0,$$

$$x(x^2 - 2 - y) > 0.$$

Mivel az első tényező pozitív, ezért

$$x^2 - 2 > y.$$

Ha pedig $x < 0$, akkor:

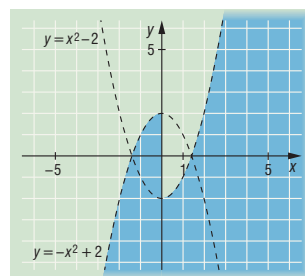
$$x^3 - 2x + xy > 0,$$

$$x(x^2 - 2 + y) > 0.$$

Mivel az első tényező negatív, ezért

$$y < 2 - x^2.$$

Az ábrán szaggatottan jelölt parabolák, valamint az y tengely pontjai nem tartoznak a C halmazhoz.





d) Az egyenlőség bal oldalán a lehetséges kiemeléseket elvégezve:

$$xy \cdot (x^2 + y^2) = 16xy,$$

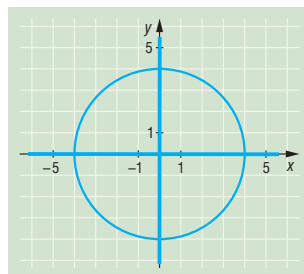
majd 0-ra redukálva, és ismét elvégezve a kiemeléseket:

$$xy \cdot (x^2 + y^2 - 16) = 0.$$

A bal oldalon álló szorzat csak úgy lehet 0, ha:

$$x = 0, \text{ vagy } y = 0, \text{ vagy } x^2 + y^2 = 16.$$

Az első egyenlőségnek az y tengely, a másodiknak az x tengely, míg a harmadiknak az origó középpontú, 4 egység sugarú kör pontjai tesznek eleget.



e) Az egyenlőtlenség mindkét oldalán nemnegatív kifejezés áll, ezért mindkét oldalt négyzetre emelhetjük, így:

$$(x^2 + y^2 - 4x - 4)^2 \leq 4y^2,$$

majd 0-ra redukálva és szorzattá alakítva:

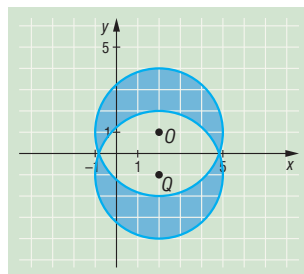
$$(x^2 + y^2 - 4x - 4)^2 - 4y^2 \leq 0,$$

$$(x^2 + y^2 - 4x - 4 - 2y) \cdot (x^2 + y^2 - 4x - 4 + 2y) \leq 0.$$

A zárójeleken belül teljes négyzetek kialakítása után azt kapjuk, hogy:

$$((x-2)^2 + (y-1)^2 - 9) \cdot ((x-2)^2 + (y+1)^2 - 9) \leq 0.$$

Ha a P pont illeszkedik az $O(2; 1)$ vagy a $Q(2; -1)$ középpontú, 3 egység sugarú körre, akkor P az E halmazhoz is hozzátartozik. Ezenkívül a fenti egyenlőtlenség bal oldalán pontosan akkor áll negatív szám, ha a tényezők közül az egyik pozitív, a másik negatív. A feltételnek ezért azok a pontok felelnek meg, amelyek az említett körök közül egyiknek belső, míg a másiknak külső pontjai.



f) A feltételnek megfelelő P pontok koordinátáira:

$$(x^2 - y) \cdot (x^2 + y) \leq 0.$$

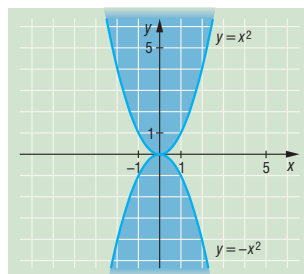
Ez csak úgy teljesülhet, ha

$$x^2 \leq y \text{ és } -x^2 \leq y,$$

vagy ha

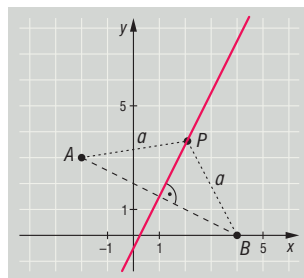
$$x^2 \geq y \text{ és } y \leq -x^2.$$

Az első feltétel szerint $x^2 \leq y$, a második alapján $y \leq -x^2$.



3774 a) A feltételnek eleget tevő pontok halmaza az AB szakasz felezőmerőlegese. Ennek egyenlete:

$$2x - y = \frac{1}{2}.$$





b) Ha a $P(x; y)$ pont eleget tesz a feltételnek, akkor:

$$\frac{\sqrt{(x+2)^2 + (y-3)^2}}{\sqrt{(x-4)^2 + y^2}} = \frac{1}{2}.$$

Mindkét oldalt négyzetre emelve:

$$\frac{(x+2)^2 + (y-3)^2}{(x-4)^2 + y^2} = \frac{1}{4}.$$

Szorozzuk meg mindkét oldalt a törtek nevezőjével:

$$4(x+2)^2 + 4(y-3)^2 = (x-4)^2 + y^2,$$

végül végezzük el a kijelölt műveleteket, és így adódik, hogy

$$3x^2 + 3y^2 + 24x - 24y + 36 = 0,$$

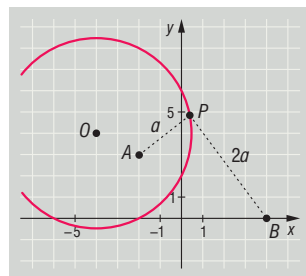
$$x^2 + y^2 + 8x - 8y + 12 = 0.$$

A kapott egyenletben teljes négyzeteket kialakítva:

$$(x+4)^2 + (y-4)^2 = 20.$$

A fenti egyenlet az $O(-4; 4)$ középpontú, $r = 2 \cdot \sqrt{5}$ sugarú kör egyenlete.

Átalakításaink végig ekvivalensek voltak, ami mutatja, hogy a $P(x; y)$ pont akkor és csak akkor tesz eleget az $\frac{AP}{PB} = \frac{1}{2}$ feltételnek, ha illeszkedik a fent meghatározott körre.



3775 a) A parabola egyenlete a következő alakban is felírható:

$$y = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + a - 1, \quad \text{amiből} \quad y - \left(-\frac{a^2}{4} + a - 1\right) = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2.$$

A fenti egyenlet mutatja, hogy a parabola tengelypontjának koordinátái:

$$T\left(\frac{a}{2}; -\frac{a^2}{4} + a - 1\right).$$

b) Vegyük észre, hogy az a) feladatban meghatározott T pontok koordinátái kielégítik az

$$y = -x^2 + 2x - 1, \quad \text{azaz} \quad y = -(x-1)^2$$

egyenletet. A felírt egyenlet parabola egyenlete, így a T tengelypontok parabolára illeszkednek. Könnyen belátható az is, hogy a most kapott parabola minden pontja az a) feladatban felírt parabolák valamelyikének tengelypontja. Eredményünk alapján a T pontok halmaza parabola.

c) Ismét átalakítva a felírt parabola egyenletét:

$$y = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + a - 1, \quad \text{amiből} \quad y - (a-1) = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2.$$

A parabola tengelypontjának koordinátái ezúttal:

$$T\left(\frac{a}{2}; a-1\right)$$

A T pont koordinátái ezúttal az $y = 2x - 1$ egyenletnek tesznek eleget. Mivel egyenes egyenletét kaptuk, ezért ebben az esetben a tengelypontok halmaza az $y = 2x - 1$ egyenletű egyenes. Ezúttal is szükséges megjegyeznünk, hogy az egyenes bármely pontja egy alkalmasan választott parabola tengelypontjával esik egybe.



- 3776 a) Jelölje x az A sütemények, y pedig a B sütemények számát.

Ekkor a feltételek szerint a következő egyenlőtlenségek teljesülnek:

$$\begin{aligned} x &\geq 0, \quad y \geq 0, \quad \text{továbbá } x, y \in \mathbb{Z}; \\ x + 2y &\leq 45 \quad (\text{a liszt mennyiségére}); \\ 2x + y &\leq 35 \quad (\text{a cukor mennyiségére}); \\ x + y &\leq 25 \quad (\text{a margarin mennyiségére}). \end{aligned}$$

A nyereséget az alábbi kétváltozós függvény írja le:

$$f(x, y) = 70x + 50y.$$

Feladatunk tehát a fenti öt egyenlőtlenség teljesülése mellett az f függvény maximumának meghatározása.

Az első két egyenlőtlenség együtt a koordináta-rendszer első síknegyedét írja le. Ha a többi egyenlőtlenségben a relációjelet egyenlőségre cseréljük, akkor mindegyik feltétel egy-egy egyenes egyenletét adja. Ha közös koordináta-rendszerben ábrázoljuk a megfelelő egyeneseket, akkor láthatjuk, hogy az öt egyenlőtlenséget egyidejűleg egy konvex ötszög belső, illetve határpontjainak koordinátái elégítik ki (ld. ábra). Ebben a tartományban keressük azt a $P(x; y)$ pontot, amelynek koordinátáira az $f(x, y)$ érték a lehető legnagyobb.

Vegyük észre, hogy bármely rögzített c valós számra az $f(x, y) = c$, vagyis a $70x + 50y = c$ egyenlet egy $\vec{n}(7; 5)$ normálvektorú egyenes egyenlete. Ha egy-egy ilyen egyenes belemetsz az ötszögbe, akkor a kapott pontokra az f függvény értéke állandó.

Észrevételünk alapján az $\vec{n}(7; 5)$ normálvektorú párhuzamos egyenes-sereg tagjai közül keressük azt, amely belemetsz az ötszögbe, továbbá (például) x tengellyel való metszete a lehető legnagyobb. Az ábra alapján is meggyőződhetünk arról, hogy a keresett egyenes áthalad az ötszög $P(10; 15)$ koordinátájú csúcsán. Ekkor:

$$70x + 50y = 1450.$$

A maximális nyereség elérése érdekében az A süteményből 10, a B süteményből 15 darabot kell készíteni.

- b) A maximális nyereség 1450 Ft.

