



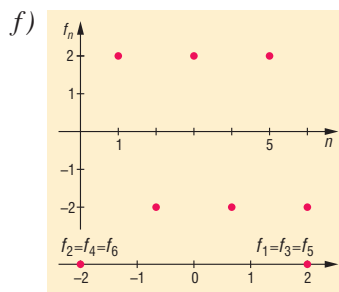
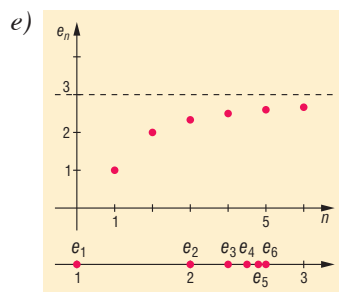
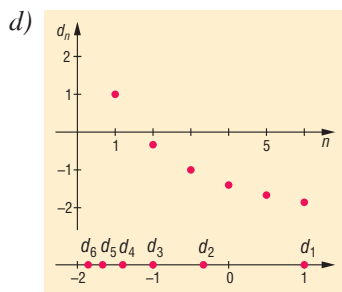
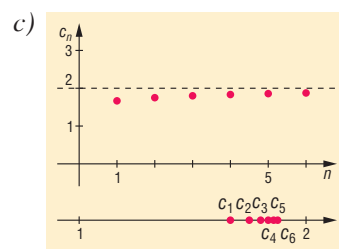
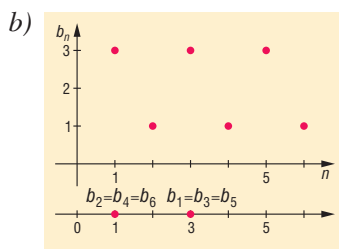
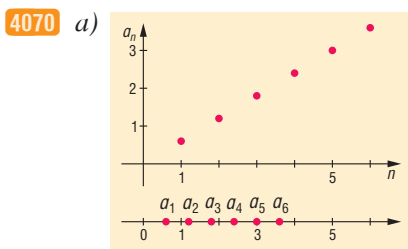
## 12.2. SZÁMSOROZATOK

### A sorozat fogalma, példák sorozatokra – megoldások

4068 a)  $a_5 = -2$ ,  $a_{20} = 28$ ; b)  $b_5 = 75$ ,  $b_{20} = 0$ ; c)  $c_5 = -100$ ,  $c_{20} = 200$ ;  
 d)  $d_5 = 53$ ,  $d_{20} = 7703$ ; e)  $e_5 = \sqrt{19}$ ,  $e_{20} = 8$ ; f)  $f_5 = \sqrt{21} - 5$ ,  $f_{20} = -11$ ;  
 g)  $g_5 = 0$ ,  $g_{20} = \frac{45}{41}$ ; h)  $h_5 = 11$ ,  $h_{20} = \frac{397}{17}$

4069 a)  $a_n = 4 + n$ ; b)  $b_n = 2n - 5$ ; c)  $c_n = -2^{n-1}$ ;  
 d)  $d_n = (-1)^{n+1}$ ; e)  $e_n = \frac{1}{n}$ ; f)  $f_n = {}^{n+1}\sqrt{7}$ ;

g)  $g_n = \log_2 n$ ; h)  $h_n = \begin{cases} 1, & \text{ha } n = 3k + 1, \\ 2, & \text{ha } n = 3k + 2, \\ 3, & \text{ha } n = 3k. \end{cases}$



4071 a)  $16$ ;  $4$ ;  $1$ ;  $\frac{1}{4}$ ;  $\frac{1}{16}$ ;  $\frac{1}{64}$ ; b)  $2006$ ;  $2002$ ;  $1998$ ;  $1994$ ;  $1990$ ;  $1986$ ;

c)  $\sqrt{3}$ ;  $\sqrt{7}$ ;  $\sqrt{11}$ ;  $\sqrt{15}$ ;  $\sqrt{19}$ ;  $\sqrt{23}$ .

4072  $a_{2010} = 1$ ,  $S_{2010} = 6030$ .

4073 a)  $a_{50} = 12 = b_{25}$ ; b)  $a_{12} = 4 = b_{99}$ ; c)  $a_{60} = 1 = b_{67}$ ;

d)  $a_{43} = \frac{1}{2} < b_{101} = \frac{7}{13}$ ; e)  $a_{77} = 3 > b_7 = 2$ .

4074 a)  $n = 6$ ; b)  $n = 10$ ; c)  $n = 11$ ;  
 d)  $n = 12$ ; e)  $n = 2^{30}$ ; f)  $n = 1; 5; 13; 17; \dots$



## Példák rekurzív sorozatokra – megoldások

4075 a) 5; 4; 2; -2; -10;

b) 5; 6; 3; 12; -15;

c)  $5; \frac{7}{3}; \frac{5}{9}; -\frac{17}{27}; -\frac{115}{81};$

d)  $5; \frac{5}{2}; \frac{5}{6}; \frac{5}{24}; \frac{1}{24}.$

4076 Építsük fel a sorozatot:  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 2$ ,  $a_3 = 4$  és a negyedik tagtól kezdve:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3},$$

tehát a további tagok:

$$a_4 = 7; a_5 = 13; a_6 = 24; a_7 = 44; a_8 = 81; a_9 = 149; a_{10} = 274.$$

Tehát 274-féleképpen érhetünk fel.

4077 A sorozat tagjai: 1; 1; 1; 1; 1, ..., tehát  $a_{2010} = 1$  és  $S_{2010} = 2010$ .

4078 A sorozat tagjai: 1; 1; 0; -1; -1; 0; 1; 1; ..., látható, hogy egy hatos periódus után újra ugyanazok a számok lesznek a sorozat elemei.

Mivel  $2009 = 6 \cdot 334 + 5$ , a 2009-edik tag -1 lesz.

Egy periódusban a számok összege 0, mivel a hatodik elem is 0, az első 2009 tag összege is 0.

4079 Vizsgáljuk meg a sorozat tagjait:

$$a_3 = \frac{q+1}{p}; \quad a_4 = \frac{\frac{q+1}{p} + 1}{q} = \frac{p+q+1}{p \cdot q}; \quad a_5 = \frac{\frac{p+q+1}{p} + 1}{\frac{q+1}{p}} = \frac{(p+1) \cdot (q+1)}{p \cdot q} \cdot \frac{p}{q+1} = \frac{p+1}{q};$$

$$a_6 = \frac{\frac{p+1}{q} + 1}{\frac{p+q+1}{p \cdot q}} = p; \quad a_7 = \frac{p+1}{\frac{p+1}{q}} = q.$$

A tagok ismétlődnek, a periódus öt. Tehát:

$$a_{2014} = a_4 = \frac{p+q+1}{p \cdot q}.$$

4080 a) Lehet, például: 1; 2009; 2010; ...

b) Ha a második tag  $x$ , a sorozat tagjai:

$$1; x; 1+x; 2 \cdot (1+x); 4 \cdot (1+x); 8 \cdot (1+x); \dots; a_n = 2^{n-3} \cdot (1+x).$$

A  $2^{n-3} \cdot (1+x) = 1000$  egyenlet legnagyobb megoldása  $n = 6$ , ekkor  $x = 124$ .

## Számtani sorozatok – megoldások

4081 a)  $a_{11} = 23;$

b)  $a_{56} = 158;$

c)  $a_{237} = 701;$

d)  $a_{2010} = 6020.$

4082 a) 46;

b) 91;

c) 9721.

4083 a) 2773-adik;

b) 3016-odik;

c) nem tagja a sorozatnak.

4084  $d = -1.$

4085 a) 116;

b) 798.



**4086** a)  $a_6 = 23 + 5 \cdot 5 = 48$  km.      b)  $S_7 = 266$  km.

**4087** A világcsúcs 158 kg.

**4088** a)  $a_1 = 7$  és  $d = 3$ .      b)  $S_{40} = 2620$ .

**4089** a)  $a_1 = 50$  és  $d = -4$ .      b)  $S_{50} = -2400$ .

**4090** Igen, mivel

$$\frac{11\sqrt{5} - 1}{2} = \frac{3\sqrt{5} + 1 + 8\sqrt{5} - 2}{2}.$$

A sorozat különbsége:

$$d = \frac{5\sqrt{5} - 3}{2}.$$

**4091** a) A következő egyenletrendszert kell megoldani:

$$\begin{cases} a_1 + 2d + a_1 + 7d = 34 \\ a_1 + d + a_1 + 10d = 46 \end{cases}.$$

A megoldás:  $a_1 = -10$  és  $d = 6$ .

b)  $2012 = a_{338}$ .

**4092** Az alábbi egyenletrendszert kell megoldani:

$$\begin{cases} a_1 + (a_1 + 3d) = 38 \\ (a_1 + 6d) - (a_1 + 2d) = 16 \end{cases}.$$

A megoldás:  $d = 4$  és  $a_1 = 13$ .

a) 92;      b) 101;      c) 7860.

**4093** A következő egyenletrendszert kell megoldani:

$$\begin{cases} (a_1 + 4d) \cdot (a_1 + 9d) = -25 \\ 2a_1 + 8d = 10 \end{cases}.$$

A megoldás:  $a_1 = 13$  és  $d = -2$ .

**4094** Az egyenletrendszerünk:

$$\begin{cases} 3a_1 + 3d = -9 \\ 3a_1 + 9d = 39 \end{cases}.$$

A megoldás:  $d = 8$  és  $a_1 = -11$ .

**4095** Az egyenletrendszerünk a következő:

$$\begin{cases} 8a_1 + 28d = 14 \\ 4a_1 + 26d = 1 \end{cases}.$$

A megoldás:  $d = -\frac{1}{2}$  és  $a_1 = \frac{7}{2}$ .

**4096** A feltétel szerint:

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{a_5 + a_6 + a_7 + a_8} = \frac{4a_1 + 6d}{4a_1 + 22d} = \frac{1}{3}, \quad \text{amiből} \quad d = 2a_1.$$

A keresett arány:

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{10}}{a_{11} + a_{12} + a_{13} + \dots + a_{20}} = \frac{10a_1 + 45d}{10a_1 + 145d} = \frac{1}{3}.$$



**4097** A feltétel alapján:

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5}{a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10}} = \frac{(a_5 - 4d) + (a_5 - 3d) + (a_5 - 2d) + (a_5 - d) + a_5}{(a_5 + d) + (a_5 + 2d) + (a_5 + 3d) + (a_5 + 4d) + (a_5 + 5d)} =$$

$$= \frac{50 - 10d}{50 + 15d} = \frac{1}{5},$$

ebből pedig a sorozat differenciája:  $d = \frac{40}{13}$ .

**4098** a) Mivel  $a_1 = 3$  és  $d = 8$ , ezért:  $a_n = 2011 = 251 \cdot 8 + 3$ , amiből leolvasható, hogy  $n = 252$ .

A  $2011 = 3 + (n - 1) \cdot 8$  egyenlet megoldásából szintén  $n = 252$  adódik.

Tehát 252 házhoz kézbesített levelet a postás.

b) Mivel  $a_1 = 6$  és  $d = 10$ , továbbá az utolsó 6-ra végződő házszám a 2006, ezért felírható:  $a_n = 2006 = 200 \cdot 10 + 6$ , amiből leolvasható, hogy  $n = 201$ .

A  $2006 = 6 + (n - 1) \cdot 10$  egyenlet megoldásából szintén  $n = 201$  adódik.

Tehát 201 házhoz kézbesített levelet a postás.

**4099** A számtani sorozat első  $k$  elemének összege  $S_k = \frac{a_1 + a_k}{2} \cdot k$ , ez alapján:  $k = 28$ .

**4100** A következő egyenletet kell megoldanunk:

$$\frac{2 \cdot 17 + (n - 1) \cdot 10}{2} \cdot n = 1472.$$

Rendezett alakja:  $5n^2 + 12n - 1472 = 0$ , megoldásai  $n_1 = 16$  és  $n_2 = -18,4$ . Természetesen csak a pozitív egész szám lehet megoldás. Tehát 16 számot adtunk össze.

**4101** Az alábbi egyenletrendszert kell megoldani:

$$\left. \begin{aligned} 5010 &= \frac{2a_1 + 3 \cdot (n - 1)}{2} \cdot n \\ 6895 &= \frac{2a_1 + 3 \cdot (n + 9)}{2} \cdot (n + 10) \end{aligned} \right\}.$$

Az  $a_1$  kiejtése után a  $3n^2 - 347n + 10020 = 0$  egyenletet kapjuk, amelynek pozitív egész megoldása:  $n = 60$ , ebből  $a_1 = -5$ .

**4102** a) A következő egyenletet kapjuk:

$$\frac{44 + (n - 1) \cdot 5}{2} \cdot n = 385, \quad \text{ahonnan} \quad 5n^2 + 39n - 770 = 0.$$

Ennek pozitív megoldása:  $n \approx 9,12$ , tehát 10 nap alatt ki tudja olvasni a könyvet.

b)  $S_9 = 378$ , tehát a tizedik napra csak 7 oldal olvasnivaló marad.

**4103** Egy vágásnál 9-cel nő a lapok száma, ha összesen  $k$  darab lapot vágunk el:

$$2010 = 30 + 9k \Rightarrow k = 220.$$

Tehát 220 lap szétvágásával létrejöhetett 2010 darab, valószínűleg jól számolt az illető.

**4104** Az alábbi egyenlőtlenséget kell megoldanunk:

$$10000 \leq 13 + 17 \cdot (n - 1) \leq 99999.$$

Azt kapjuk, hogy  $588,47 \leq n \leq 5882,53$ . Az első ötjegyű tag:  $a_{589} = 10009$ , az utolsó ötjegyű tag:  $a_{5882} = 99990$ . Tehát a sorozatnak 5294 ötjegyű tagja van.



- 4105** Ha a középső oldal  $b$  és a sorozat különbsége  $d$ , akkor az oldalak:

$$b - d; \quad b; \quad b + d.$$

Ha az utóbbi az átfogó, akkor Pitagorasz tétele alapján:

$$(b - d)^2 + b^2 = (b + d)^2,$$

amiből  $b^2 = 4bd$ . Mivel  $b \neq 0$ , ezért  $b = 4d$ .

Tehát a háromszög oldalai:  $3d$ ;  $4d$ ;  $5d$ .

Az egyik hegyesszög:

$$\sin \alpha = \frac{3d}{5d} = \frac{3}{5} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 36,87^\circ$$

A másik hegyesszög:  $\beta = 53,13^\circ$ .

- 4106** Ha az oldalak hossza:

$$b - d; \quad b; \quad b + d;$$

a kerületből:  $b = 40$ . A másik feltételből:

$$(40 - d) \cdot (40 + d) = 1431, \quad \text{azaz} \quad 1600 - d^2 = 1413,$$

amiből  $d = 13$  vagy  $d = -13$ .

Így az oldalak hossza:  $27$  cm,  $40$  cm és  $53$  cm.

A területet Héron-képlettel érdemes számolni:  $T \approx 526,5 \text{ cm}^2$ .

- 4107** Az  $n$  oldalú konvex sokszög belső szögeinek összege:  $(n - 2) \cdot 180^\circ$ . A számtani sorozat miatt:

$$(n - 2) \cdot 180^\circ = \frac{142,5 + 172,5}{2} \cdot n,$$

melynek megoldása:  $n = 16$ .

- 4108** Az első 201 természetes szám összege:

$$1 + 2 + 3 + \dots + 201 = 201 \cdot 101 = 20\,301.$$

Ha az összegbe  $k$  helyett  $-k$  kerül, akkor  $2k$ -val csökken. Mivel kezdetben páratlan volt az összeg, nem kaphatunk 2010-et.

- 4109** Például nincs 3-ra végződő négyzetszám, ezért az  $a_n = 10n + 3$  megfelel, de megoldás lehet a  $b_n = 16n + 7$  is.

- 4110** Ha az első szám  $\overline{ab}$ , akkor a számok:

$$10a + b; \quad 10b + a; \quad 100a + b.$$

Mivel számtani sorozatot alkotnak:

$$10b + a = \frac{10a + b + 100a + b}{2}, \quad \text{amiből} \quad b = 6a.$$

Csak a  $16$ ;  $61$ ;  $106$  számhármass felel meg.

- 4111** A feltételek alapján:

$$\left. \begin{aligned} m &= a_1 + (k - 1) \cdot d \\ k &= a_1 + (m - 1) \cdot d \end{aligned} \right\}.$$

Kivonva egymásból:

$$m - k = d \cdot [(k - 1) - (m - 1)] = d \cdot (k - m),$$

ahonnan, mivel  $k \neq m$ , adódik, hogy:

$$d = -1 \quad \text{és} \quad a_1 = k + m - 1, \quad \text{tehát} \quad a_n = k + m - 1 - (n - 1) = k + m - n.$$



**4112** Jelöljük az  $\{a_n\}$  sorozat első elemét  $a_1$ -gyel, különbségét pedig  $d$ -vel. Írjuk fel a  $\{b_n\}$  sorozat általános tagját:

$$b_n = \frac{a_{5n-4} + a_{5n}}{2} \cdot 5 = \frac{2a_1 + (10n-6) \cdot d}{2} \cdot 5 = 5a_1 + 25n \cdot d - 15d = \\ = (5a_1 - 15d) + 25d \cdot n = (5a_1 - 15d) + (n-1) \cdot 25d + 25d = (5a_1 + 10d) + (n-1) \cdot 25d.$$

Az általános tag azt mutatja, hogy egy olyan számtani sorozatot kapunk, melynek első eleme:  $b_1 = 5a_1 + 10d$ , differenciája pedig  $D = 25d$ .

## Mértani sorozatok – megoldások

**4113** A sorozat első hat tagja:

$$a_1 = -2; \quad a_2 = \frac{3}{4}; \quad a_3 = -\frac{9}{32}; \quad a_4 = \frac{27}{256}; \quad a_5 = -\frac{81}{2048}; \quad a_6 = \frac{243}{16384}.$$

**4114** A keresett tagok:

$$a_1 = \frac{a_4}{q^3} = -\frac{5}{27}; \quad a_6 = a_4 \cdot q^2 = 45; \quad a_9 = -1215.$$

**4115** Mivel:

$$q^3 = \frac{a_4}{a_1} = -\frac{1}{8} \Rightarrow q = -\frac{1}{2}.$$

Így a tizedik elem, illetve az első tíz tag összege:

$$a_{10} = 20 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^9 = -\frac{5}{128}, \quad \text{illetve} \quad S_{10} = 20 \cdot \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{10} - 1}{-\frac{1}{2} - 1} = \frac{1705}{128}.$$

**4116** Mivel

$$q^4 = \frac{a_5}{a_1} = 16 \Rightarrow q = 2 \quad \text{vagy} \quad q = -2.$$

Az első esetben:  $a_8 = -384$  és  $S_8 = -765$ . A második esetben:  $a_8 = 384$  és  $S_8 = 255$ .

**4117** Mivel

$$q^2 = \frac{a_8}{a_6} = \frac{1}{4} \Rightarrow q = \frac{1}{2} \quad \text{vagy} \quad q = -\frac{1}{2}.$$

Az első esetben:

$$a_1 = \frac{a_6}{q^5} = 896 \quad \text{és} \quad S_6 = 1764.$$

A második esetben:

$$a_1 = \frac{a_6}{q^5} = -896 \quad \text{és} \quad S_6 = -588.$$

**4118** Mivel  $q = 1$ , ezért minden tag 23, így  $S_9 = 207$ .

**4119** Mivel  $q = -1$ , ezért  $S_{100} = 0$ .



**4120** Ha a mértani sorozat elemei:

$$1 + x; \quad 8 + x; \quad 22 + x;$$

akkor

$$(8 + x)^2 = (1 + x) \cdot (22 + x).$$

Megoldva az egyenletet:  $x = 6$ , tehát a sorozatunk:

$$7; \quad 14; \quad 28.$$

A sorozat hányadosa:  $q = 2$ .

**4121** A hosszak olyan mértani sorozatot alkotnak, ahol  $q = 1,25$  és  $a_1 = 1$ .

A következő egyenletet kell megoldanunk:

$$15 = 1 \cdot 1,25^{n-1}.$$

Tízes alapú logaritmussal számolva:

$$n = 1 + \frac{\lg 15}{\lg 1,25} \approx 13,14.$$

Tehát a 14. napon éri el a 15 méteres hosszúságot.

**4122** Keressük az alábbi egyenlőtlenség megoldásait:

$$10\,000 \leq 3 \cdot 5^{n-1} \leq 99\,999.$$

Tízes alapú logaritmussal számolva:

$$\lg 3333,33 \leq \lg 5^{n-1} \leq \lg 33333,$$

azaz

$$\frac{\lg 3333,33}{\lg 5} \leq n - 1 \leq \frac{\lg 33333}{\lg 5},$$

ahonnan

$$6,04 \leq n \leq 7,47.$$

Tehát a sorozatnak csak a hetedik tagja ötjegyű. Valóban:  $a_7 = 46\,875$ .

**4123** A következő egyenletrendszert írhatjuk fel:

$$\left. \begin{aligned} a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3 &= 80 \\ a_1 \cdot q^4 - a_1 \cdot q^2 &= 240 \end{aligned} \right\},$$

kiemelés után:

$$\left. \begin{aligned} a_1 \cdot q^2 \cdot (1 + q) &= 80 \\ a_1 \cdot q^2 \cdot (q^2 - 1) &= 240 \end{aligned} \right\}.$$

Mivel  $q \neq -1$ , a második és első egyenlet hányadosából adódik, hogy:

$$\frac{q^2 - 1}{q + 1} = 3,$$

tehát  $q = 4$ , a sorozat első eleme  $a_1 = 1$ .

**4124** a) Az alábbi egyenletrendszert kell megoldani:

$$\left. \begin{aligned} a_1 \cdot (1 + q) &= 15 \\ a_1 \cdot q^2 \cdot (1 + q) &= 60 \end{aligned} \right\}.$$

Megoldásai:

$$a_1 = 5 \text{ és } q = 2 \quad \text{vagy} \quad a_1 = -15 \text{ és } q = -2.$$



b) A megoldást a

$$\frac{16}{q} + 16 + 16q = 56, \quad \text{azaz} \quad 2q^2 - 5q + 2 = 0$$

egyenletből kapjuk:

$$q = 2 \text{ és } a_1 = 8 \quad \text{vagy} \quad q = \frac{1}{2} \text{ és } a_1 = 32.$$

c) A következő egyenletrendszert kell megoldani:

$$\left. \begin{aligned} a_1 \cdot (1 + q + q^2) &= 57 \\ a_1 \cdot (1 - q^2) &= 15 \end{aligned} \right\}.$$

Elosztva a két egyenletet, adódik hogy:

$$24q^2 + 5q - 14 = 0.$$

Megoldásai:

$$q = \frac{2}{3} \text{ és } a_1 = 27 \quad \text{vagy} \quad q = -\frac{7}{8} \text{ és } a_1 = 64.$$

d) Az alábbi egyenletrendszert kell megoldani:

$$\left. \begin{aligned} a_1 \cdot (1 + q) &= 160 \\ a_1 \cdot q^5 \cdot (1 + q) &= 1215 \end{aligned} \right\}.$$

A két egyenlet hányadosából:

$$q^5 = \frac{243}{32},$$

ebből adódik, hogy:

$$q = \frac{3}{2} \text{ és } a_1 = 64.$$

**4125** A következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\left. \begin{aligned} a_1 \cdot (1 + q + q^2 + q^3) &= 468 \\ a_1 \cdot q^4 \cdot (1 + q + q^2 + q^3) &= 292500 \end{aligned} \right\}.$$

Az egyenletek osztásával kapjuk, hogy  $q^4 = 625$ , amiből  $q = 5$  vagy  $q = -5$ .

A megoldás:

$$a_1 = 3 \text{ és } q = 5 \quad \text{vagy} \quad a_1 = -\frac{9}{2} \text{ és } q = -5.$$

**4126** Mivel:

$$\frac{7 + 4\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1} \cdot (5 + 3\sqrt{3}) = 97 + 56\sqrt{3},$$

a négyzetre emelés és a nevező gyöktelenítése után:

$$\left( \frac{\sqrt{3} + 2}{2 - \sqrt{3}} \right)^2 = (7 + 4\sqrt{3})^2 = 97 + 56\sqrt{3},$$

ezért az állítás igaz. A mértani sorozat hányadosa:

$$q = \sqrt{3} - 1.$$





**4127** Ha a számtani sorozat differenciája  $d$ , a feltétel szerint:

$$(10 - d)^2 = (10 - 2d) \cdot (10 + 2d).$$

Az egyenlet két megoldása:

$$d_1 = 0 \text{ és } d_2 = 4.$$

A számtani sorozat első tagjai és a mértani sorozat hányadosai:

$$d = 0 \text{ esetén } a_1 = 10 \text{ és } q = 1, \text{ illetve } d = 4 \text{ esetén } a_1 = -2 \text{ és } q = 3.$$

**4128** Az  $\{a_n\}$  számtani sorozatra vonatkozó feltételből:  $a_2 = 2$ , így a számok:

$$2 - d; \quad 2; \quad 2 + d.$$

A  $\{b_n\}$  mértani sorozat első három eleme:

$$7 - d; \quad 4; \quad 3 + d.$$

Ebből:

$$4^2 = (7 - d) \cdot (3 + d),$$

ennek megoldásai:

$$d_1 = 5 \text{ és } d_2 = -1.$$

Az első esetben:  $q_1 = 2$  és  $b_1 = 2$ , a második esetben:  $q_2 = \frac{1}{2}$  és  $b_1 = 8$ .

**4129** A mértani sorozat elemei:

$$\frac{12}{q}; \quad 12; \quad 12q.$$

A számtani sorozat elemei:

$$\frac{12}{q} + 4; \quad 15; \quad 12q + 1.$$

A számtani sorozat tulajdonságából:

$$15 = \frac{\frac{12}{q} + 4 + 12q + 1}{2}, \quad \text{ahonnan} \quad 12q^2 - 25q + 12 = 0,$$

ezt megoldva:

$$q_1 = \frac{4}{3} \quad \text{és} \quad q_2 = \frac{3}{4}.$$

**4130** Ha a legkisebb oldal  $a$ , és a sorozat hányadosa  $q$ ,  $q > 1$ , akkor az oldalak:

$$a; \quad aq; \quad aq^2.$$

Pitagorasz tétele alapján:

$$a^2 + (aq)^2 = (aq^2)^2.$$

Mivel  $a \neq 0$ , eloszthatjuk az egyenletet, és a  $q^4 - q^2 - 1 = 0$  negyedfokú egyenlethez jutunk.

Megoldva:

$$(q^2)_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2},$$

mivel  $q^2 > 0$ , ezért adódik, hogy:

$$q^2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \Rightarrow q = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}}.$$

A háromszög hegyesszögei:

$$\cos \alpha = \frac{a}{aq^2} = \frac{1}{q^2},$$

ebből  $\alpha = 51,83^\circ$ , a másik szög  $\beta = 38,17^\circ$ .



**4131** Az oldalak hossza:

$$9; 9q; 9q^2.$$

A kerület:

$$19 = 9 + 9q + 9q^2,$$

ebből:

$$q_1 = \frac{2}{3} \quad \text{és} \quad q_2 = -\frac{5}{3}.$$

Természetesen csak a  $q = \frac{2}{3}$  megoldás.

A háromszög oldalai: 9 cm, 6 cm, 4 cm.

A legnagyobb szög a leghosszabb oldallal szemben van, koszinusztétellel számolva:

$$\cos \alpha = \frac{6^2 + 4^2 - 9^2}{48} \Rightarrow \alpha = 127,17^\circ.$$

A háromszög legnagyobb szöge  $\alpha = 127,17^\circ$ .

**4132** A következő egyenletrendszert kell megoldani:

$$\left. \begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 &= 63 \\ a_2 \cdot (a_1 + a_3) &= 810 \end{aligned} \right\}.$$

A megoldáshoz vezessünk be új változót, legyen  $x = a_1 + a_3$ , a kapott

$$\left. \begin{aligned} a_2 + x &= 63 \\ a_2 \cdot x &= 810 \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszer megoldásai:  $a_2 = 45$  és  $x = 18$ , vagy  $a_2 = 18$  és  $x = 45$ .

I. Ha  $a_2 = 45$  és  $x = 18$ , akkor a  $18 = \frac{45}{q} + 45q$  egyenletnek nincs megoldása.

II. Ha  $a_2 = 18$  és  $x = 45$ , akkor a  $45 = \frac{18}{q} + 18q$  egyenlet megoldásai és a keresett sorozat:

$$q_1 = 2, \quad a_1 = 9 \quad \text{vagy} \quad q_2 = \frac{1}{2}, \quad a_1 = 36.$$

**4133** Legyenek a számtani sorozat tagjai:

$$a_1 = x - d; \quad a_2 = x; \quad a_3 = x + d; \quad d \neq 0.$$

A mértani sorozat elemei:

$$b_{n-1} = a_1 \cdot a_2 = (x - d) \cdot x; \quad b_n = a_2 \cdot a_3 = x \cdot (x + d); \quad b_{n+1} = a_3 \cdot a_1 = x^2 - d^2.$$

A mértani sorozat tulajdonsága alapján:  $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$ , vagyis:

$$[x \cdot (x + d)]^2 = (x - d) \cdot x \cdot (x^2 - d^2).$$

A műveletek elvégzése után, mivel  $d \neq 0$ ,  $x \neq 0$ ,  $x + d \neq 0$ , adódik, hogy:  $d = 3x$ .

A számtani sorozat tagjai:

$$a_1 = -2x; \quad a_2 = x; \quad a_3 = 4x.$$

A mértani sorozat elemei:

$$b_{n-1} = -2x^2; \quad b_n = 4x^2; \quad b_{n+1} = -8x^2.$$

A keresett hányados:  $q = -2$ .



**4134** Jelöljük  $x$ -szel a sorozat ötödik tagját:

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{q} + xq &= -40 \\ \frac{x}{q^2} + xq^2 &= 68 \end{aligned} \right\}, \quad \text{ebből mivel } x \neq 0: \quad \left. \begin{aligned} \frac{1}{q} + q &= \frac{-40}{x} \\ \frac{1}{q^2} + q^2 &= \frac{68}{x} \end{aligned} \right\}.$$

Felhasználva, hogy

$$\left(q + \frac{1}{q}\right)^2 = q^2 + \frac{1}{q^2} + 2,$$

a kapott egyenlet:

$$\left(\frac{-40}{x}\right)^2 = \frac{68}{x} + 2.$$

Ennek megoldásai:  $x_1 = 16$  és  $x_2 = -50$ .

Az elsőt visszahelyettesítve:

$$q + \frac{1}{q} = -\frac{5}{2}, \quad \text{ebből: } q_1 = -2 \quad \text{és} \quad q_2 = -\frac{1}{2},$$

a sorozat első tagjai pedig:

$$\{a_1\}_1 = 1 \quad \text{és} \quad \{a_1\}_2 = 256.$$

A második esetben  $q + \frac{1}{q} = \frac{4}{5}$ . Ennek nincs megoldása.

## Kamatszámítás, törlesztőrészletek kiszámítása – megoldások

**4135**  $180\,000 \cdot 1,07^{10} = 354\,087$  Ft.

**4136**  $9800 \cdot 0,97^{10} \approx 7227$  fő.

**4137**  $500\,000 \cdot 1,06^8 - 500\,000 = 796\,924 - 500\,000 = 296\,924$  Ft lesz a haszon.

**4138**  $1\,000\,000 \cdot 1,08^5 \cdot 1,06^{15} = 3\,521\,330$  Ft.

**4139** A  $118\,000 \cdot x^{30} = 170\,000$  egyenlet megoldása:  $x \approx 1,0122$ , ami 1,22%-os éves növekedést jelent.

**4140** A  $0,87^x = 0,5$  egyenlet megoldása:

$$x = \frac{\lg 0,5}{\lg 0,87} \approx 4,98.$$

Ha nem lesz változás, körülbelül 5 év múlva már felére csökken a fecskék száma.

**4141** A  $6\,506\,300 = 4\,800\,000 \cdot x^6$  egyenlet megoldása:  $x \approx 1,052$ , tehát a bank 5,2%-os kamatot adott.

**4142** Az  $1,047^x = 3$  egyenlet megoldása:

$$x = \frac{\lg 3}{\lg 1,047} \approx 23,92,$$

tehát 24 év alatt növekszik háromszorosára a betétünk.



**4143** A keresett összeg kiszámítása:

$$\begin{aligned} & (200\,000 \cdot 1,045^{14} + 200\,000 \cdot 1,045^{13} + 200\,000 \cdot 1,045^{12} + \dots + 200\,000) \cdot 1,045^6 = \\ & = 200\,000 \cdot (1 + 1,045 + 1,045^2 + \dots + 1,045^{14}) \cdot 1,045^6 = \\ & = 200\,000 \cdot \frac{1,045^{15} - 1}{1,045 - 1} \cdot 1,045^6 = 5\,413\,249. \end{aligned}$$

Tehát 5 413 249 Ft lesz a számlán a gyermek 20 éves korában.

**4144** A  $250\,000 \cdot 1,05^x = 400\,000$  egyenletből:  $1,05^x = 1,6$ , ahonnan:  $x = \frac{\lg 1,6}{\lg 1,05} \approx 9,6$ .

Tehát 10 év múlva, azaz 2010 januárjában éri el a betét a 400 000 Ft-ot.

**4145** Az első bank öt év múlva

$$1\,000\,000 \cdot 1,04^5 + 700\,000 \cdot 1,063^5 \approx 2\,166\,742 \text{ Ft-ot fizet.}$$

A második bank öt év múlva

$$1\,700\,000 \cdot 1,019^{20} \approx 2\,477\,038 \text{ Ft-ot fizet.}$$

Tehát a Peták Bankot érdemes választani.

**4146** Ha az évenként felvett összeg  $x$ , akkor az alábbi egyenletet kell megoldanunk:

$$\{[(10^8 \cdot 1,05 - x) \cdot 1,05 - x] \cdot \dots \cdot 1,05 - x\} = 0.$$

Átrendezve:

$$10^8 \cdot 1,05^{20} = x \cdot (1,05^{19} + 1,05^{18} + \dots + 1),$$

vagyis

$$x = \frac{10^8 \cdot 1,05^{20}}{\frac{1,05^{20} - 1}{1,05 - 1}} = 8\,024\,258,72 \approx 8\,024\,259 \text{ Ft.}$$

Tehát évente 8 024 259 Ft-ot vehet fel a bankból.

**4147** a) Ha  $x$  a havi törlesztőrészlet, akkor a következő egyenletet kell megoldani:

$$15 \cdot 10^6 \cdot \left(1 + \frac{8}{12 \cdot 100}\right)^{180} - x \cdot \left(1 + \frac{8}{12 \cdot 100}\right)^{179} - x \cdot \left(1 + \frac{8}{12 \cdot 100}\right)^{178} - \dots - x = 0.$$

A megoldás:

$$x = \frac{15 \cdot 10^6 \cdot 1,006667^{180}}{\frac{1,006667^{180} - 1}{1,006667 - 1}} = 143\,372 \text{ Ft.}$$

Tehát a havi díj: 143 372 Ft.

b) Az évente fizetendő összeg legyen  $y$ . Ekkor az egyenletünk:

$$15 \cdot 10^6 \cdot 1,08^{15} - y \cdot (1,08^{14} + 1,08^{13} + \dots + 1) = 0.$$

A megoldás:

$$y = \frac{15 \cdot 10^6 \cdot 1,08^{15}}{\frac{1,08^{15} - 1}{1,08 - 1}} = 1\,752\,443,$$

ebből a havi díj: 146 037 Ft.

c) Az első esetben a  $\frac{180 \cdot 143\,372}{15\,000\,000} = 1,72$ , a második esetben a  $\frac{15 \cdot 1\,752\,443}{15\,000\,000} = 1,752$ -szeresét kell visszafizetni.



## Vegyes feladatok – megoldások

**4148** A megadott számtani sorozat adatai:

$$a_1 = -2, \quad d = 5, \quad S_{30} = 2115.$$

**4149** A megadott mértani sorozat adatai:

$$a_1 = 7, \quad q = 2, \quad S_{20} = 7\,340\,025.$$

**4150** Célszerű a sorozatok első néhány tagját kiszámítani, majd a kialakult sejtést a definíciók segítségével  $\left(a_{n+1} - a_n = d, \text{ illetve } \frac{a_{n+1}}{a_n} = q\right)$  igazolni.

Számtani sorozatok:  $a)$ ,  $b)$ ,  $d)$ ,  $j)$ ,  $k)$ .

Mértani sorozatok:  $c)$ ,  $g)$ ,  $h)$ ,  $i)$ .

**4151**  $S_{30} = 630\sqrt{3} - 195.$

**4152** A következő egyenlőtlenséget kapjuk:

$$500 < 7 + \frac{3}{7} \cdot (n-1) < 1000,$$

ennek megoldása:

$$1151,33 < n < 2318.$$

Tehát 1166 tag felel meg.

**4153** A három tag szorzatából  $a_2 = 105.$

A három tag összegéből:

$$\frac{105}{q} + 105 + 105q = 1687.$$

Az egyenlet megoldásai:  $q_1 = 15$  és  $q_2 = \frac{1}{15}.$

A feltételnek megfelelő sorozatok:  $a_1 = 7, q = 15$  és  $a_1 = 1575, q = \frac{1}{15}.$

**4154** Mivel

$$a_n = S_n - S_{n-1} = 2n^2 - 7n - [2 \cdot (n-1)^2 - 7 \cdot (n-1)] = 4n - 9,$$

a sorozat számtani,  $a_1 = -5$  és  $d = 4.$

**4155** Számtani sorozat, ahol:  $d = 11, a_1 = 1008, a_{818} = 9995,$  és az összeg:  $S_{818} = 4\,500\,227.$

**4156** A feltételekből adódik:  $q^{17} = \frac{120}{18} = \frac{20}{3},$  azaz  $q = \sqrt[17]{\frac{20}{3}}.$

a) Mivel az  $a_3 \cdot q^x = 108,$  azaz a  $q^x = \frac{108}{18} = 6$  egyenlet megoldása

$$x = \frac{\lg 6}{\lg q} = \frac{\lg 6}{\lg \sqrt[17]{\frac{20}{3}}} \approx 16,056$$

nem egész szám, ezért a 108 nem tagja a sorozatnak.

b) Mivel  $a_3 \cdot q^x = 800,$  ezért  $q^x = \frac{800}{18} = \frac{400}{9},$  az egyenlet megoldása:  $x = 34,$  tehát a sorozat 37. tagja 800.



**4157** Az egyenletek hányadosait véve:  $q^2 = 4$ , azaz  $q_1 = 2$  vagy  $q_2 = -2$ .

Visszahelyettesítés után a következő négy sorozat adódik:

$$a_1 = \frac{1}{2}, q = 2 \quad \text{vagy} \quad a_1 = -\frac{1}{2}, q = 2 \quad \text{vagy} \quad a_1 = \frac{1}{2}, q = -2 \quad \text{vagy} \quad a_1 = -\frac{1}{2}, q = -2.$$

**4158** A feltételekből az alábbi egyenletrendszert kapjuk:

$$\left. \begin{aligned} a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 &= \frac{21}{4} \\ \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1 \cdot q} + \frac{1}{a_1 \cdot q^2} &= \frac{7}{3} \end{aligned} \right\}$$

Az egyenletek hányadosát véve:  $(a_1 \cdot q)^2 = \frac{9}{4}$ . Ebből  $a_1 \cdot q = \frac{3}{2}$  vagy  $a_1 \cdot q = -\frac{3}{2}$ .

Mivel  $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = (a_2)^3$ , a keresett szorzat:  $\frac{27}{8}$  vagy  $-\frac{27}{8}$ .

**4159** a) Mivel a különbség:  $d = \frac{45}{4} = 11\frac{1}{4}$ , ezért a számok:

$$3; \quad 14\frac{1}{4}; \quad 25\frac{1}{2}; \quad 36\frac{3}{4}; \quad 48.$$

b) Mivel  $q^4 = 16$ , ebből  $q_1 = 2$  vagy  $q_2 = -2$ .

A lehetséges számok:

$$3; \quad 6; \quad 12; \quad 24; \quad 48 \quad \text{vagy} \quad 3; \quad -6; \quad 12; \quad -24; \quad 48.$$

**4160** Mivel az első három tag összege 18, ezért a számtani sorozatban  $a_2 = 6$ .

A számtani sorozat elemei:

$$6 - d; \quad 6; \quad 6 + d;$$

a mértani sorozat elemei:

$$7 - d; \quad 6; \quad 6 + d.$$

A mértani sorozat tulajdonsága alapján:

$$6^2 = (7 - d) \cdot (6 + d).$$

Az egyenlet megoldásai:  $d_1 = 3$  és  $d_2 = -2$ .

Az első esetben a számtani sorozatban  $a_1 = 3$  és a mértani sorozatban  $q = \frac{3}{2}$ .

A második esetben a számtani sorozatban  $a_1 = 8$  és a mértani sorozatban  $q = \frac{2}{3}$ .

**4161** Az első feltétel alapján a számokra:

$$a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 = 114.$$

A számtani sorozat miatt:

$$a_1 \cdot q = a_1 + 3d \quad (1) \quad \text{és} \quad a_1 \cdot q^2 = a_1 + 24d \quad (2).$$

(1)-ből (2)-be helyettesítve:

$$a_1 \cdot q^2 = a_1 + 8 \cdot (a_1 \cdot q - a_1).$$

Mivel  $a_1 \neq 0$ , adódik, hogy:

$$q^2 - 8q + 7 = 0, \quad \text{ebből} \quad q_1 = 7 \quad \text{és} \quad q_2 = 1.$$

Ha  $q = 7$ , az első feltételbe visszahelyettesítve:  $a_1 = 2$ , a számok: 2; 14; 98.

Ha  $q = 1$ , akkor  $a_1 = 38$ , a számok: 38; 38; 38.



**4162** a) A feltételek miatt:

$$x = \frac{y + 4x - 5}{2} \quad \text{és} \quad (4x - 5)^2 = x \cdot (7x + 10).$$

A második egyenlet megoldásai:  $x_1 = 5$  és  $x_2 = \frac{5}{9}$ . Az elsőbe helyettesítve:  $y_1 = -5$  és  $y_2 = \frac{35}{9}$ .

Tehát a négy szám:

$$-5; \quad 5; \quad 15; \quad 45 \quad \text{vagy} \quad \frac{35}{9}; \quad \frac{5}{9}; \quad -\frac{25}{9}; \quad \frac{125}{9}.$$

b) Az első esetben a különbség 10, a hányados 3, a második esetben a különbség  $-\frac{30}{9} = -\frac{10}{3}$ , a hányados pedig  $-\frac{10}{3}$ .

**4163** a)  $41,9 \cdot 10^6 \cdot 1,054^4 \approx 51\,710\,230$ .

$$b) \frac{41,9 \cdot 10^6}{1,011^6} \approx 39\,238\,020.$$

c) Ha az évenkénti csökkenésnek megfelelő szorzószám  $p$ , akkor  $48,8 \cdot p^5 = 38$ , ahonnan:

$$p = \sqrt[5]{\frac{38}{48,8}} \approx 0,9512.$$

Tehát évente 4,88%-kal csökken a termelés.

d) Jelölje  $x$  a 2013 után eltelt évek számát. A  $0,97^x = 0,74$  egyenletből:

$$x = \frac{\lg 0,74}{\lg 0,97} \approx 9,89.$$

10 év múlva, azaz 2023-ban éri el a termelés a 2013-as év 74%-át.

**4164** Ha  $\{\log_5 a_n\}$  számtani sorozat, akkor:

$$\log_5 a_n = \frac{\log_5 a_{n-1} + \log_5 a_{n+1}}{2}.$$

Ebből a logaritmusfüggvény monotonitását felhasználva kapjuk, hogy:

$$a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1},$$

ami azt jelenti, hogy az  $\{a_n\}$  mértani sorozat.

A keresett elem kiszámítása:

$$a_1 = 1 \quad \text{és} \quad a_4 = \frac{1}{8} \quad \Rightarrow \quad q = \frac{1}{2} \quad \text{és} \quad a_{10} = \frac{1}{512}.$$

**4165** a) A különbség:  $d = \frac{b-a}{5}$ , így a számok:

$$a; \quad \frac{b+4a}{5}; \quad \frac{2b+3a}{5}; \quad \frac{3b+2a}{5}; \quad \frac{4b+a}{5}; \quad b.$$

b) A hányados:  $q = \sqrt[5]{\frac{b}{a}}$ , így a számok:

$$a; \quad \sqrt[5]{a^4 \cdot b}; \quad \sqrt[5]{a^3 \cdot b^2}; \quad \sqrt[5]{a^2 \cdot b^3}; \quad \sqrt[5]{a \cdot b^4}; \quad b.$$